Diagonalisierung

Zwei $(n \times n)$-Matrizen A und B heißen **ähnlich**, falls eine invertierbare $(n \times n)$-Matrix P existiert mit

$$B = P \cdot A \cdot P^{-1} \ .$$

Für ähnliche Matrizen A und B gilt:

- A und B haben dieselben Eigenwerte.
- Für alle Eigenwert λ von A und B gilt $\dim E_A(\lambda) = \dim E_B(\lambda)$.

Eine $(n \times n)$-Matrix A heißt **diagonalisierbar**, falls A zu einer Diagonalmatrix D ähnlich ist.

Für eine $(n \times n)$-Matrix A gilt:

- A ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ A hat n linear unabhängige Eigenvektoren.
- Existiert eine Diagonalisierung von A, so sind die Einträge gerade die Eigenwerte von A und die Diagonalmatrix ist bis auf die Reihenfolge der Einträge eindeutig bestimmt.

Diagonalisierung

Algorithmus zur Matrix-Diagonalisierung:

1. Schritt: Berechnung aller Eigenwerte von A.

2. Schritt: Berechnung einer Eigenvektorbasis für jeden Eigenraum $E_A(\lambda)$ von A.

3. Schritt: Umfasst die Menge, die aus den Vektoren aller dieser Eigenraumbasen besteht, insgesamt n Elemente, so bildet sie eine Eigenvektorbasis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von $\mathbb{K}^n$ bzgl. A und A ist diagonalisierbar mit $P := [v_1, \ldots, v_n]$.

   Andernfalls ist die Matrix A nicht diagonalisierbar.

Es gilt:

A ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ Alle Eigenwerte von A sind reell und für jeden Eigenwert stimmt die algebraische Vielfachheit mit der geometrischen Vielfachheit überein.

Eigenwerte für lineare Abbildungen

Betrachten eine lineare Abbildung $f : V \to V$ auf einem n-dimensionalen Vektorraum V über einem Körper $\mathbb{K}$.

Die **Eigenwerte** der linearen Abbildung F sind als die Eigenwerte einer beliebigen Darstellungsmatrix von f definiert.

Es gilt:

- Die Definition der Eigenwerte ist korrekt, da alle Darstellungsmatrizen von f zueinander ähnlich sind.
- Ist eine Darstellungsmatrix von f diagonalisierbar, so gilt dies für alle Darstellungsmatrizen von f.
- Ist eine Darstellungsmatrix von f diagonalisierbar, so ist die Darstellungsmatrix von f in einer Eigenvektorbasis von f eine Diagonalmatrix.