TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Institut für Grundlagen der Elektrotechnik und Elektronik
Professur für Mess- und Sensorsystemtechnik
Prof. Dr.-Ing. habil. J. Czarske

FAKULTÄT ELEKTROTECHNIK UND INFORMATIONSTECHNIK

# Klausur „Mess- und Sensortechnik“

Studiengänge Elektrotechnik und Mechatronik
(120 min)

## Probeklausur

Nachname: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Studiengang/
Studienrichtung: ______________________________

E-Mail-Adresse: ______________________________ (Angabe freiwillig)

**Zulässige Hilfsmittel:**

- Stifte (kein Bleistift, kein Stift mit der Farbe rot/rosa)
- Taschenrechner: Casio FX xxx-ES, Casio FX xxx-DE, Casio FX xxx-MS, Sharp 500er Serie, Texas Instruments 30er Serie

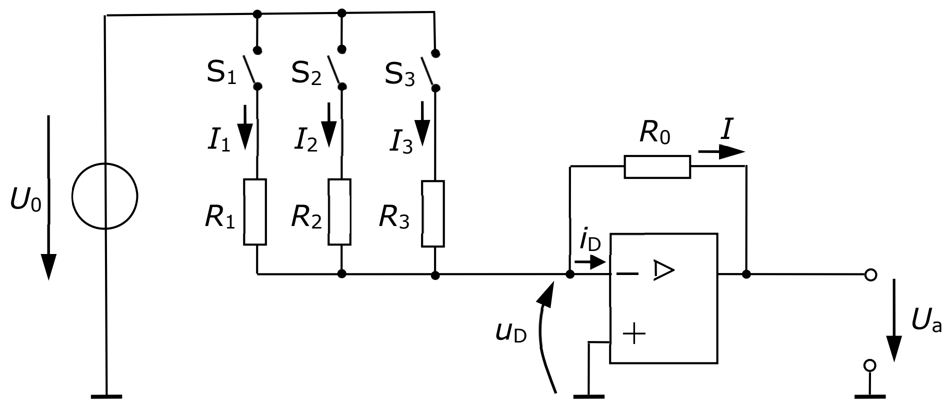
⇨ Die Verwendung anderer Unterlagen (z. B. Buch, Skript) oder Handys ist nicht gestattet.
⇨ Sie lösen die Aufgaben handschriftlich auf eigenem Papier (Kein Tablet!)
⇨ Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt
⇨ Achten Sie auf Lesbarkeit und die richtige Lösungsreihenfolge!

**Die Benutzung unerlaubter Hilfsmittel und Handys gelten als Betrugsversuch!**

| **Aufgabe** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **Bonus** | **Σ** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Soll-Punktzahl | 14 | 9 | 11 | 10 | 13 | 14 | 0 (+5) | **71** |
| Ist-Punktzahl | | | | | | | | |

## Aufgabe 1: Operationsverstärkerschaltung mit drei Schaltern (14 Punkte)

Gegeben ist folgende Schaltung mit einem idealen Operationsverstärker ($u_D = 0$, $i_D = 0$):




$R_1 = 10\ \text{k}\Omega$
$R_2 = 20\ \text{k}\Omega$
$R_3 = 40\ \text{k}\Omega$
$R_0 = 1\ \text{k}\Omega$

$U_0 = 1\ \text{V}$

**Abbildung 2: Operationsverstärkerschaltung**

Die Ubertragungsfunktion lautet: $U_a = -U_0\left(s_3\frac{R_0}{R_3} + s_2\frac{R_0}{R_2} + s_1\frac{R_0}{R_1}\right)$

mit $s_i = 1$ Schalter $S_i$ geschlossen,

$s_i = 0$ Schalter $S_i$ offen.

a) Welche Funktion erfüllt diese Schaltung, wenn man die Schalterstellungen ($s_1$, $s_2$, $s_3$) als Eingangsgröße und die Ausgangsspannung als Ausgangsgröße betrachtet? (*Hinweis:* Beachten Sie die Widerstandsverhältnisse!) (1 Punkte)

Für die Schalterstellungen gelte nun: $s_1 = s_2 = s_3 = 1$. Die Bandbreite des Operationsverstärkers ist mit 10 MHz gegeben. Die Boltzmann-Konstante beträgt $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K.

b) Die Widerstandswerte von $R_0$, $R_1$, $R_2$, $R_3$ weichen maximal um ± 2 % von ihren Sollwerten ab. Die Spannung $U_0$ schwankt um bis zu ± 5 mV. Welche maximale relative Abweichung $\Delta\hat{U}_a/U_a$ ergibt sich für die Ausgangsspannung $U_a$? (**Formeln und Werte**) (5 Punkte)

c) Zeichnen Sie ein erweitertes Ersatzschaltbild der Schaltung aus Abbildung 2, in dem das thermische Rauschen der vier Ohmschen Widerstände als Rauschspannungsquellen berücksichtigt ist! Andere Rauschquellen liegen nicht vor. (2 Punkte)

d) Berechnen Sie die Effektivwerte dieser unkorrelierten Rauschspannungen, wenn die Temperatur aller Widerstände einheitlich 400 K beträgt! Berechnen Sie dann für jede einzelne Rauschspannungsquelle die resultierende Standardabweichung der Ausgangsspannung $U_a$ (Überlagerungssatz!) und stellen Sie ein Unsicherheitsbudget für $U_a$ auf! Wie groß ist insgesamt die Standardabweichung der Spannung $U_a$? (**Werte**)

(5 Punkte)

*Hinweise:*

- Die Rauschquellen seien unkorreliert.
- Für den Effektivwert der thermischen Rauschspannung an einem Widerstand gilt: $u_{\text{eff}} = \sqrt{4kTR\Delta f}$.

e) Nennen Sie zwei Maßnahmen, wie man den Einfluss des Widerstandrauschens reduzieren könnte, ohne die Schaltung zu verändern? (1 Punkte)

## Aufgabe 2: Pkw-Geschwindigkeitsmessung mit Zähler (9 Punkte)

Zur Geschwindigkeitsmessung eines Pkw wird die Drehzahl $n$ einer Pkw-Radachse mit einem Multipolrad mit $p = 6$ Polpaaren und einem Zähler gemessen (siehe Abb. 1). Der Zähler erfasst innerhalb einer festen Zeitspanne von $T_{\mathrm{ref}} = 1$ s die Anzahl $z$ der Impulse im Spannungssignal $U(t)$ einer Hall-Sonde. Schließlich wird mit dem bekannten Reifenradius $R = 25$ cm die Geschwindigkeit $v > 0$ des Pkw bestimmt.

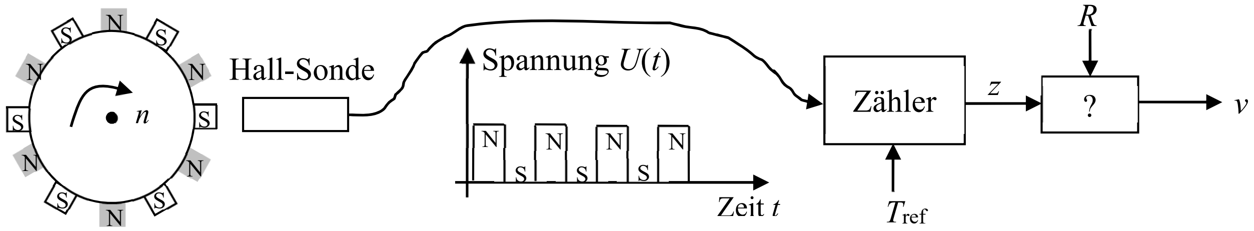



**Abb. 1:** Messanordnung für Pkw-Geschwindigkeitsmessung.

a) Geben Sie den Zusammenhang zwischen dem Zählergebnis $z$ und der Geschwindigkeit $v$ des Pkw an! (**Formel**) (3 Punkte)

b) Fertigungsbedingt weist die Winkelposition jedes Polpaares eine Toleranz von $|\Delta\varphi| \leq 0{,}5°$ auf. Wie groß ist die allein daraus resultierende maximale Abweichung $|\Delta\hat{v}|$ (**Wert**)? (2 Punkte)

<u>Hinweis</u>: $\partial z/\partial\varphi = p/360°$

c) Wie ist vorzugehen, wenn anstatt der Frequenzmessung nun eine Periodendauermessung erfolgen soll?
Wie kann dann die Geschwindigkeit $v$ aus dem Zählergebnis $z$ berechnet werden (**Formel**)? (3 Punkte)

d) Beschreiben Sie ein Vorgehen zur Vorzeichenbestimmung der Geschwindigkeit! (1 Punkt)

## Aufgabe 3: Messung von Gravitationswellen (11 Punkte)

2017 wurde der Nobelpreis für Physik für die Messung von Gravitationswellen vergeben, welche bereits vor mehr als 100 Jahren von Albert Einstein vorhergesagt wurden. Eine vereinfachte Version des verwendeten interferometrischen Messsystems ist in Abb. 3 dargestellt. Ein Laserstrahl wird in zwei Teilstrahlen aufgeteilt, welche am Ende zweier Tunnel der Länge $L_1$ und $L_2$ reflektiert werden. Die reflektierten Strahlen werden auf einem Detektor überlagert. Ändert sich die Weglänge eines Teilstrahls aufgrund einer Gravitationswelle, kommt es zu einer Phasenverschiebung der Laserstrahlen und die Interferenz ändert die Intensität des gemessenen Lichtes. Es kann somit auf die Phasendifferenz der Teilstrahlen:

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi f}{c} \cdot (L_1 - L_2) \cdot n_L$$

geschlossen werden. Vereinfachend soll davon ausgegangen werden, dass eine Gravitationswelle nur die Länge des ersten Armes $L_1$ um $x$ verändert, das bedeutet: $L_1 = L_0 + x$. Im Ruhezustand gilt: $L_1 = L_0$, $L_2 = L_0$ und $L_0 = 4$ km. Weiterhin gilt: Brechungsindex der Luft $n_L = 1$, Lichtgeschwindigkeit c = 300 000 km/s, Lasermittenfrequenz $f = 292 \cdot 10^{12}$ Hz.

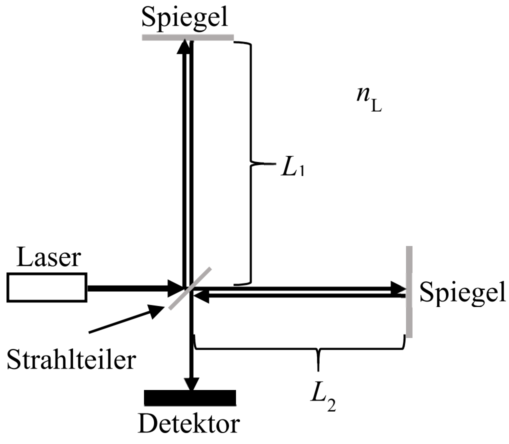



**Abb. 3:** Interferometrische Messanordnung

a) Wie groß ist der Eineindeutigkeitsbereich für die zu messende Längenänderung $x$? Nennen Sie eine Möglichkeit den Bereich zu vergrößern! (**Wert**) (3 Punkte)

**Es werde nun zu einem Zeitpunkt eine relative Längenänderung von $\frac{x}{L_0} = 2 \cdot 10^{-21}$ durch eine Gravitationswelle erzeugt.**

b) Welche absolute Längenänderung $x$ müsste mit dem Messsystem erfasst werden? (**Wert**) (1 Punkt)

c) Stellen Sie für die Messung der Längenänderung $x = L_1 - L_0$ ein Messunsicherheitsbudget auf und berücksichtigen Sie dabei folgende Unsicherheitsbeiträge:

i. Schwankung der nominalen Wellenlänge des Lasers: $\sigma_\lambda / \lambda = 0{,}05$ %
ii. Unsicherheit des Brechungsindex: $\sigma_n = 0.3 \cdot 10^{-6}$
iii. Unbekannte systematische Abweichung der Phase: $\sigma_{\Delta\varphi} / \Delta\varphi = 0{,}4$ %

Bestimmen Sie die resultierende Gesamtmessunsicherheit! (**Formeln und Werte**) (5 Punkte)

d) An mehreren hinreichend weit auseinanderliegenden Orten auf der Erde wird die gleiche Gravitationswelle gemessen. Mit welcher Signalauswertetechnik kann der Zeitversatz zwischen den Ankunftszeiten bestimmt werden? Nach welchem Prinzip kann dann eine Ortung der Quelle der Gravitationswelle vorgenommen werden? (2 Punkte)

## Aufgabe 4: Frequenzmessung mit QDT **(10 Punkte)**

Für die Frequenzmessung eines Spannungssignals der Form

$$b(t) = A\sin(\varphi(t)) \text{ mit } \varphi(t) = 2\pi ft + \varphi_0$$

soll die Quadratur-Demodulations-Technik (QDT) eingesetzt werden. Hierfür wird zuerst ein um 90° phasenverschobenes Signal $a(t) = A\cos(\varphi(t))$ erzeugt, so dass sich das Phasensignal $\varphi(t)$ wie folgt extrahieren lässt:

$$\varphi(t) = \arctan\frac{b(t)}{a(t)}.$$

Schließlich erhält man die Signalfrequenz $f$ aus dem Anstieg von $\varphi(t)$, der sich mit einer linearen Regression bestimmen lässt.

a) $a(t)$ und $b(t)$ sind mit einem unkorrelierten, weißen gaußschen Rauschen mit der Standardabweichung $\sigma$ additiv überlagert. Wie groß ist demzufolge die Standardabweichung $\sigma_\varphi$ von $\varphi(t)$? (**Formel**) (4 Punkte)

<u>Hinweis</u>: $\arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Der Zusammenhang $\varphi(t)$ soll durch eine Regressionsgerade der Form $\varphi = f \cdot t + \varphi_0$ beschrieben werden, wobei $\varphi_0$ den Phasenwinkel zum Zeitpunkt $t = 0$ kennzeichnet.

b) Leiten Sie mit der Methode der kleinsten Quadrate (<u>ohne Wichtung</u>) die Bestimmungsgleichung für die gesuchte Frequenz $f$ sowie für den Anfangsphasenwinkel $\varphi_0$ in Abhängigkeit der gemessenen Wertepaare ($t_i$, $\varphi_i$) für $i$ = 1, 2, 3 her! (**Formel**) (6 Punkte)

<u>Hinweis:</u> Der Rechenweg wird bewertet!

## Aufgabe 5: Temperaturmessung mittels Lumineszenz (13 Punkte)

Fluoreszenzmikroskope werden in der Forschung, insbesondere auch in der Biomedizin, eingesetzt. Durch die Markierung biologischer Proben mittels Fluoreszenzfarbstoffen können diese gezielt untersucht werden. Dabei gilt, dass Eigenschaften der Fluoreszenz (z. B. die Abklingdauer $\tau$) im Allgemeinen temperaturabhängig ist. Somit ist es möglich auch die Temperatur fluoreszenzmarkierter Proben zu messen und so beispielsweise biologische Aktivität zu erfassen.

Das Abklingverhalten fluoreszenter Stoffe wird durch eine Exponentialfunktion beschrieben:

$$P(t) = P_0 \cdot \exp(-t/\tau)$$

Dabei ist $P_0$ die Anfangsleistung nach Beendigung der Anregung und $\tau$ die mittlere Lebensdauer. Fluoreszenzsignale sind meistens sehr schwach, weshalb die quantisierten Photonen Schrotrauschen verursachen. Der Effektivwert des Schrotrauschens lässt sich wie folgt beschreiben:

$$p_{s,eff} = \sqrt{2h\nu P\Delta f}$$

Hierbei ist $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J·s das plancksche Wirkungsquantum, $\nu$ die Frequenz des detektierten Lichts und $\Delta f$ die Bandbreite der Messung.
Im Folgenden soll ein Fluoreszenzfarbstoff betrachtet werden, dessen temperaturabhängige mittlere Lebensdauer im Bereich von $20\,°C < \vartheta < 60\,°C$ wie folgt beschrieben wird:

$$\tau(\vartheta) = (400 - 5 \cdot (\vartheta/\,°C))\ \mu s$$

a) Geben Sie an wie durch die Messung der Strahlungsleistung zu zwei verschiedenen Zeitpunkten $0 < t_1 < t_2$ die Temperatur gemessen werden kann! (**Formel**)
(4 Punkte)

b) Berechnen Sie die durch Schrotrauschen verursachte Messunsicherheit bei $\vartheta = 20\,°C$, wenn die Strahlungsleistung bei $t_1 = 100\ \mu s$ und $t_2 = t_1 + \Delta t$ mit $\Delta t = 300\ \mu s$ und einer Bandbreite von $\Delta f = 25$ kHz gemessen wird. Die Leistung nach Beendigung der Anregung ($t_0 = 0\ \mu s$) sei $P_0 = 100$ pW. Das abgestrahlte Licht habe eine mittlere Frequenz von $\nu = 550$ THz. **(Formel und Wert)** (8 Punkte)
*Hinweis:* Der Rechenweg wird bewertet!

c) Beschreiben Sie welche Auswirkungen eine Verlängerung des Integrationszeitraums auf die zufällige Messabweichung hat! (1 Punkte)

## Aufgabe 6: Globale Positionsbestimmung eines Roboters (14 Punkte)

Mit einem System zur globalen Positionsbestimmung (GPS) gemäß Abb. 1 soll die $(x,y)$-Position eines Roboters innerhalb eines quadratischen Raumes mit a = 10 m Kantenlänge bestimmt werden: In zwei Ecken des Raumes sind Sender (S1, S2) angebracht, die nacheinander zu bekannten Zeitpunkten ($t_{01}$, $t_{02}$) Ultraschallpulse aussenden. Der Roboter empfängt diese Pulse und misst mittels eines Zählers (Referenzfrequenz $f_{\text{ref}}$) die jeweiligen Pulslaufzeiten. Daraus lassen sich mit der Schallgeschwindigkeit c = 340 m/s schließlich die Weglängen $d_1$ und $d_2$ berechnen (s. Abb. 1).

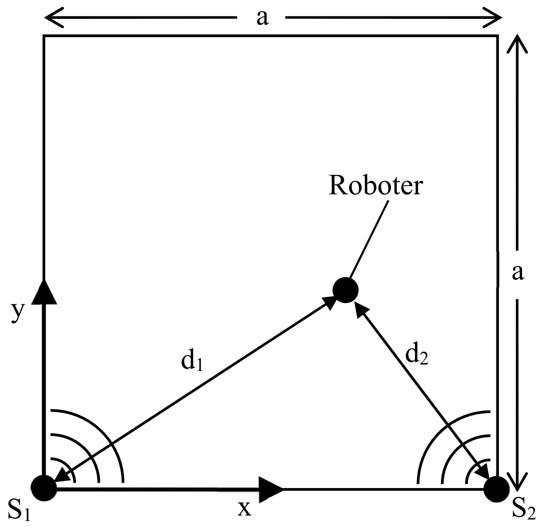



**Abb. 1:** Messanordnung GPS.

a) Wie groß muss der Zeitabstand zwischen den beiden Sendezeitpunkten $\Delta t = t_{02} - t_{01}$ mindestens sein, damit die Pulse immer in der gleichen Reihenfolge beim Roboter ankommen? (**Wert**) (2 Punkte)

b) Geben sie Berechnungsformeln für die Weglängen $d_1$ und $d_2$ in Abhängigkeit der jeweiligen Zählergebnisse $z_1$ bzw. $z_2$ an? (**Formeln**) (2 Punkte)

c) Berechnen Sie unter Berücksichtigung des Quantisierungsfehlers des Zählers und der maximalen relativen Drift der Referenzfrequenz $\Delta f_{\text{ref}} / f_{\text{ref}}$ die maximale systematische Messabweichung $\Delta d_1(d_1)$ für die Bestimmung der Wegstrecke $d_1$ (**Formel**)! Stellen Sie das Ergebnis in Abhängigkeit der Wegstrecke $d_1$ in einem Diagramm dar! (3 Punkte)

d) Wie muss die Referenzfrequenz $f_{\text{ref}}$ bei $|\Delta f_{\text{ref}}| \leq 1$ Hz gewählt werden, damit im gesamten Messgebiet $|\Delta d_1| \leq 1$ mm gilt? (**Werte**) (2 Punkte)

e) Nennen Sie zwei weitere mögliche Ursachen für Messabweichungen neben dem Quantisierungsfehler des Zählers und der Drift der Referenzfrequenz! (1 Punkte)

f) Warum ist es bei dieser Anwendung hinsichtlich der Messunsicherheit vorteilhaft Ultraschallpulse zu verwenden und keine Lichtwellen? (1 Punkte)

Die $x$-Position des Roboters ergibt sich zu: $$x = \frac{d_1^2 - d_2^2 + a^2}{2a}$$

g) Berechnen Sie die innerhalb des Messgebietes maximal auftretende systematische Messabweichung $\Delta x$ bzgl. der x-Position, wenn gilt: $|\Delta d_1| \leq 1$ mm, $|\Delta d_2| \leq 1$mm! Die Kantenlänge a sei exakt bekannt. (**Formel und Werte**) (3 Punkte)

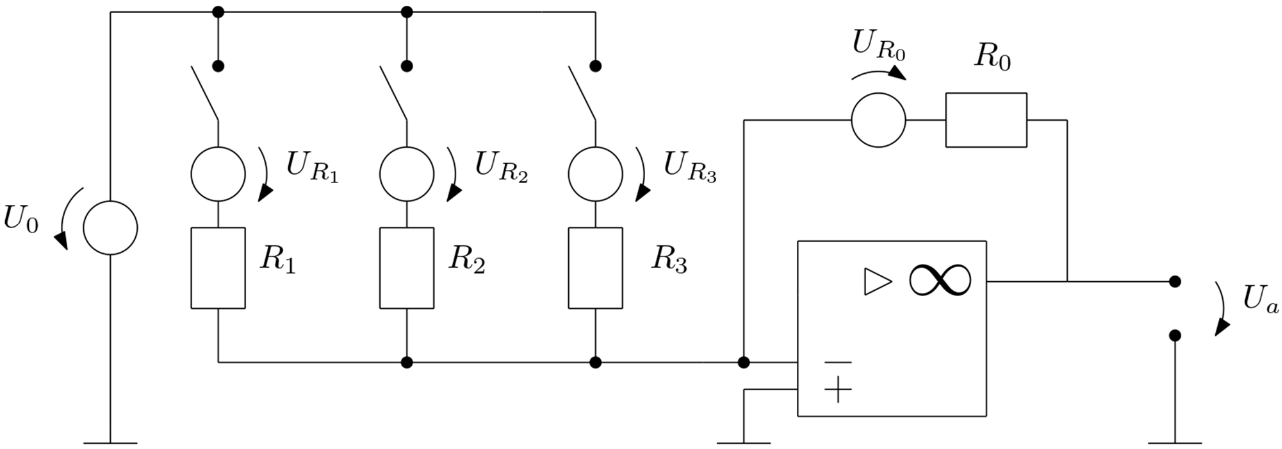
# Kurzlösungen

## Aufgabe 1: Operationsverstärkerschaltung mit drei Schaltern

a) DAU, Addierer

b) $\frac{\Delta \hat{U}_a}{U_a} = 4{,}5\%$

c)




d) $\sigma_{U_a} = 16{,}2\mu V$

e) Temperatur reduzieren, Bandbreite reduzieren

## Aufgabe 2: Pkw-Geschwindigkeitsmessung mit Zähler

a) $v \approx \frac{2\pi\, R\, z}{T_{\text{ref}}\, p}$

b) $|\Delta\hat{v}| = 2{,}2\ \frac{\text{mm}}{\text{s}}$

c) $v \approx \frac{f_{\text{ref}}\, 2\pi\, R}{p\, z}$

d) Zweite Hall-Sonde mit leichtem Winkelversatz verwenden

## Aufgabe 3: Messung von Gravitationswellen

a) x < 256,8 nm; mögliche Maßnahme: Laserfrequenz reduzieren

b) $x = 8 \cdot 10^{-18}$ m

c) $\sigma_x = 32{,}5 \cdot 10^{-21}$ m (bzw. $\sigma_x = 18{,}4 \cdot 10^{-21}$ m auch gültig)

d) Kreuzkorrelation & Triangulation

## Aufgabe 4: Frequenzmessung mit QDT

a) $\sigma_\varphi = \frac{\sigma}{A}$

b) $\varphi_0 = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\varphi_i - \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}t_i \cdot \frac{\sum_{i=1}^{3}\varphi_i t_i - \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\varphi_i \cdot \sum_{i=1}^{3}t_i}{\sum_{i=1}^{3}t_i^2 - \frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{3}t_i\right)^2}$

## Aufgabe 5: Temperaturmessung mittels Lumineszenz

a) $\vartheta = 80°C - \frac{\Delta t}{ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right)\cdot 5\ \mu s}°C$

b) $\sigma_{\vartheta,20°C} = 1{,}8452\ °C$

c) Die Messabweichung wird reduziert, da $P_{s,\mathrm{eff}} \sim \sqrt{\frac{1}{T_{\mathrm{int}}}}$

## Aufgabe 6: Globale Positionsbestimmung eines Roboters

a) $\Delta t = 29{,}4$ ms

b) $d_1 \approx c\frac{z_1}{f_{\mathrm{ref}}}$; $d_2 \approx c\frac{z_2}{f_{\mathrm{ref}}}$

c) $\Delta d_1(d_1) = \left|\frac{c}{f_{\mathrm{ref}}}\right| + \left|d_1 \cdot \frac{\Delta f_{\mathrm{ref}}}{f_{\mathrm{ref}}}\right|$

d) $f_{\mathrm{ref}} \geq 354{,}14$ Hz

e) Temperaturabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit c, Differenz Zeitbasis

f) $c \sim \Delta d$ und $c_{\mathrm{Schall}} < c_{\mathrm{Licht}}$

g) $\Delta x = 2{,}41$ mm