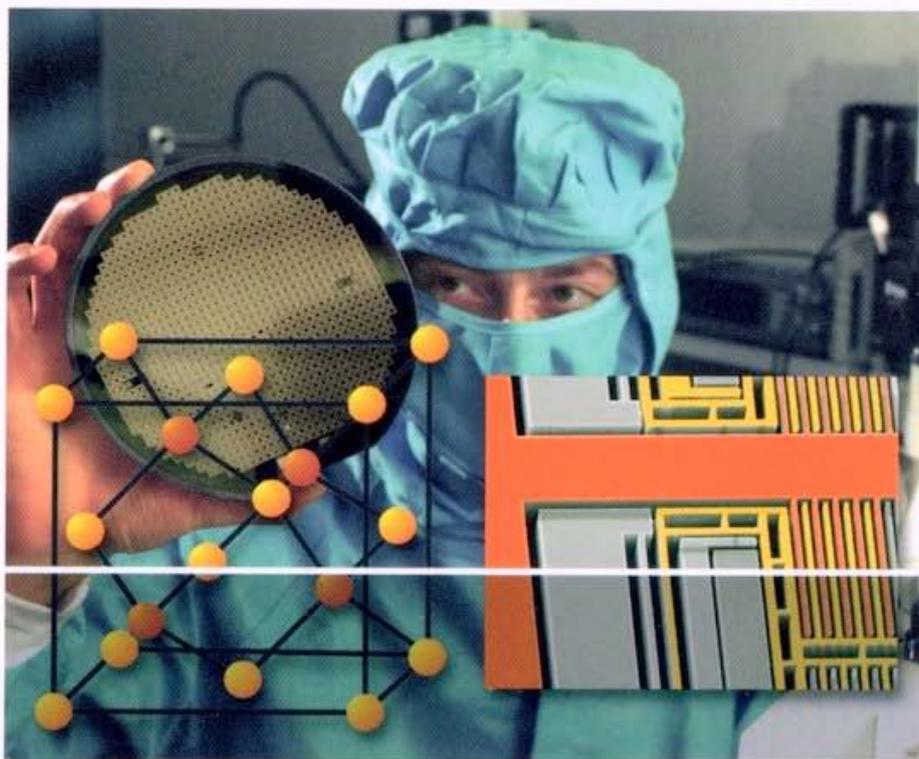


Gerald Gerlach  
Wolfram Dötzel

# Einführung in die Mikrosystemtechnik

Ein Kursbuch für Studierende



HANSER

## Lösungen zu den Aufgaben für Kapitel 1: Einführung

### Aufgabe 1.1

Funktionsprinzipien der Mikrosysteme von Bild 1.2 vom Buch:

- a) Der Siliziumdehnstreifen ändert seinen Widerstand  $R_0$  in Abhängigkeit von der Dehnung  $\varepsilon$  (siehe Abschnitt 7.2.5a im Buch)  
Dehnung  $\varepsilon \rightarrow$  Widerstand  $R = R_0 + \Delta R(\varepsilon)$ .
- b) Zwischen den beiden Seiten der abgedünnten Druckplatte des Siliziumsensors wirkt eine Druckdifferenz  $p$ . Diese führt zu einer Deformation, d. h. Auslenkung der Druckplatte. Durch Biegung entstehen an der Oberfläche in den verschiedenen Bereichen der Druckplatte Zug- ( $\sigma > 0$ ) oder Druckspannungen ( $\sigma < 0$ ) bzw. gedehnte ( $\varepsilon > 0$ ) oder gestauchte ( $\varepsilon < 0$ ) Bereiche. Die eindiffundierten Widerstände im Drucksensorchip werden dadurch entsprechend Beispiel 1.1a geändert. Typischerweise wird die Widerstandsänderung mit einer WHEATSTONE-schen Messbrücke in eine elektrische Ausgangsspannung überführt (siehe Beispiel 7.8 im Buch). Das Funktionsprinzip entspricht damit dem von Bild 7.2.1 im Buch.
- c) Die Messbeschleunigung lenkt die am Gate einseitig mit dem Substrat befestigte Zunge infolge deren Trägheit aus. Bei Änderung des Abstands zwischen der auf dem Gatepotenzial liegenden Biegezungge und dem Source-Drain-Bereich ändert sich dort die elektrische Feldstärke und damit der Stromfluss zwischen Source und Drain. Dies entspricht der Arbeitsweise eines Feldeffekttransistors mit veränderlicher Gatespannung.  
Beschleunigung  $\rightarrow$  Auslenkung der Biegezungge  $\rightarrow$  Änderung des Stroms zwischen Source und Drain.
- c) Dieser Drucksensor entspricht vom Wirkprinzip her dem von Bild 1.2b im Buch. Die Druckplatte ist jedoch in diesem Fall nicht durch lokale Abdünnung wie im Bild 1.2b, sondern durch den Siliziumwafer selbst gebildet, der auf dem polykristallinen Silizium-Ring fixiert (eingespannt) ist (1970 betragen die Durchmesser von Si-Wafern etwa  $\frac{1}{2} \dots \frac{3}{4}$  Zoll).

### Aufgabe 1.2

- a) Piezoresistiver Drucksensor von Bild 7.23a im Buch:  
Funktionselemente: - Biegeplatte  
                          - dicker Einspannrand  
                          - Piezowiderstände  
Komponente: - piezoresistiver Drucksensor
- b) Mikropumpe nach Bild 6.13b aus dem Buch:  
Funktionselemente: - Einlasskanal ( $R_E, L_E$ )  
                          - Auslasskanal ( $R_A, L_A$ )  
                          - Einlassventil ( $R_{V1}, C_{V1}$ )  
                          - Auslassventil ( $R_{V2}, C_{V2}$ )  
                          - Druckquelle ( $\Delta p_S, C_{11}$ )  
Komponente: - Mikropumpe
- c) Bolometerarray (siehe Bilder 10.2 und 10.3 in der englischen Ausgabe, Wiley 2008):  
Funktionselemente: - Widerstands-(Bolometer-)element  
                          - Absorptionsschicht  
                          - Kontaktsäulen  
                          - Strahlungsreflektor  
                          - Kontaktierung  
Komponenten: - CMOS-Auswerteschaltung  
                          - Infrarot-Bolometer

### Aufgabe 1.3

Siehe im Internet.

## Lösungen zu den Aufgaben für Kapitel 2: Skalierung und Ähnlichkeit

### Aufgabe 2.1

Der Wirkungsgrad  $\eta$  ist eine Kennzahl, die das Verhältnis zwischen der Ausgangs- und der Eingangsenergie bei einem System beschreibt:

$$\eta = W_{\text{Ausgang}} / W_{\text{Eingang}}.$$

Für einen elektromechanischen Antrieb wäre

$$\eta = W_{\text{mech}} / W_{\text{el}}.$$

### Aufgabe 2.2

Die REYNOLDS-Zahl beschreibt das Verhältnis der in einem strömenden Fluid an den Strömungsteilchen angreifenden Trägheitskraft und der viskosen Reibungskraft.

Als Modell benutzen wir ein Flüssigkeitsvolumen in einem Strömungskanal, an dessen Oberseite eine quadratische Platte mit der Fläche  $A = a \cdot a$  mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt wird. Der Abstand der bewegten Platte zur ortsfesten Unterseite des Strömungskanals ( $u = 0$ ) sei ebenfalls  $a$ . Zwischen der bewegten Platte und der ortsfesten Unterseite des Strömungskanals bildet sich ein lineares Geschwindigkeitsprofil aus (s. Abbildung 6.6). Die Reibungskraft  $F_R$  zur Bewegung der Platte ist

$$F_R = \tau \cdot A = \mu \cdot \frac{u}{a} \cdot A = \mu \cdot \frac{u}{a} \cdot a^2 = \mu \cdot u \cdot a.$$

Dabei ist  $\tau$  die Scherspannung im Fluid und  $\eta$  dessen dynamische Viskosität.

Die Trägheitskraft  $F_m$  kann mit der kinetischen Energie berechnet werden. Um das Fluidvolumen unter der bewegten Platte auf die Geschwindigkeit  $v$  zu beschleunigen, muss die Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot u^2 = F_m \cdot s$$

zugeführt werden. Dabei ist  $m = \rho \cdot V = \rho \cdot a^3$  und  $s$  der von der Fluidmenge unter der Platte durchschnittlich zurückgelegte Weg. Bei einer Bewegung der Platte um den Weg  $a$  ist  $s = a/2$ . Damit wird

$$F_m = \frac{E_{\text{kin}}}{s} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot u^2 \cdot \frac{2}{a} = \frac{m \cdot u^2}{a} = \frac{\rho \cdot a^3 \cdot u^2}{a} = \rho \cdot a^2 \cdot u^2.$$

Daraus ergibt sich für die REYNOLDS-Zahl

$$Re = \frac{F_m}{F_R} = \frac{\rho \cdot a^2 \cdot u^2}{\mu \cdot u \cdot a} = \frac{\rho}{\mu} \cdot a \cdot u = \frac{a \cdot u}{\nu}.$$

Dabei ist  $\nu = \mu/\rho$  die kinematische Viskosität des Fluids.

### Aufgabe 2.3

Das Staubkorn haftet an der Decke, wenn seine Gewichtskraft  $F_G$  betragsmäßig kleiner als die elektrostatische Anziehungskraft  $F_{\text{el}}$  zur Decke ist:

$$|F_G| < |F_{\text{el}}| \quad (1)$$

Die Gewichtskraft beträgt

$$F_G = m \cdot g = \rho \cdot \ell^3 g \quad (2)$$

mit  $\rho$  der spezifischen Dichte  $\ell$  der Kantenabmessung des Staubwürfels und  $g$  der Erdbeschleunigung ( $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$ ).

Die elektrostatische Kraft ergibt sich aus den Gleichungen (2.3) und (2.4) zu

$$F_{\text{el}} = - \frac{dW_{\text{el}}}{dx} \quad (3)$$

mit

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C},$$

wobei  $Q$  die Ladung an der Oberfläche des Staubkorns,  $C$  die elektrische Kapazität und  $x$  der Abstand zwischen Staubkorn und Decke sind.

Die Oberflächenladung  $Q$  auf einer Seite des Staubkorns ist durch die Anzahl der Oberflächenatome  $n = (\ell/a)^2$  gegeben:

$$Q = 2 \cdot \left(\frac{\ell}{a}\right)^2 \cdot e.$$

Der Faktor 2 berücksichtigt, dass das Siliziumgitter aus zwei kubisch-flächenzentrierten Basisgittern gebildet ist (siehe Tabelle 3.4 im Buch).

Die Kapazität  $C$  beträgt

$$C = \varepsilon_0 \cdot \frac{\ell^2}{x}. \quad (4)$$

Aus den Gleichungen (2.3.3) bis (2.3.6) ergibt sich

$$F_{\text{el}} = -\frac{dW_{\text{el}}}{dx} = -\frac{d}{dx} \left( \frac{Q^2}{2C} \right) = -\frac{d}{dx} \left( \frac{2e^2 \cdot \ell^2}{\varepsilon_0 a^4} x \right) = -\frac{2e^2 \ell^2}{\varepsilon_0 a^4} \quad (5)$$

Für die Bedingung von Gleichung (2.3.1) folgt mit den Gleichungen (2.3.2) und (2.3.7):

$$\rho \cdot \ell^3 \cdot g < \frac{2e^2 \ell^2}{\varepsilon_0 a^4} \quad \text{bzw.} \quad \ell < \frac{2e^2}{\rho \cdot g \cdot \varepsilon_0 a^4} \sim \frac{1}{a^4}. \quad (6)$$

Gleichung (6) zeigt, dass die zulässige Abmessung für den Fall, dass das Staubkorn haftet, mit  $a^{-4}$  skaliert.

Mit den Werten für  $e$  und  $\varepsilon_0$  aus Anhang A1,  $\rho_{\text{Si}} = 2.300 \text{ kgm}^{-3}$  und  $a = 0,543 \text{ nm}$  ergibt sich im konkreten Fall:

$$\ell = \frac{2 \cdot (1,6022 \cdot 10^{-19})^2 \cdot (\text{As})^2}{2.300 \text{ kgm}^{-3} \cdot 9,81 \text{ ms}^{-2} \cdot 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ As(Vm)}^{-1} \cdot (0,543 \cdot 10^{-9})^4 \text{ m}^4} \quad (7)$$

und mit  $1 \text{ Ws} = 1 \text{ kgm}^2 \text{ s}^{-2}$

$$\ell < 3,03 \cdot 10^6 \text{ m}.$$

Dieses Ergebnis scheint auf den ersten Blick falsch zu sein, da man sich einen Würfel mit einer Kantenlänge von rund 3.000 km, der an der Decke nur durch elektrostatische Kräfte gehalten wird, schwerlich vorstellen kann. Dazu sei angemerkt, dass nicht dieses Ergebnis falsch ist, sondern die Annahme, dass der Würfel einen Abstand von nur  $a = 0,543 \text{ nm}$  von der Decke hat!

Betrachten wir realistische Abstände von  $a^* = 1 \mu\text{m}$ , ergibt sich mit dem Skalierungsfaktor  $\lambda_a = a^*/a = 1.842$  und der Beziehung

$$\ell \cdot a^4 = \ell^* \cdot a^{*4} = \frac{2e}{\rho \cdot g \cdot \varepsilon_0}$$

eine zulässige Staubkorngröße

$$\ell^* < \ell \cdot \left(\frac{a}{a^*}\right)^4 = \ell \cdot \frac{1}{\lambda_a^4} = 3,03 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \left(\frac{0,543 \text{ nm}}{1.000 \text{ nm}}\right)^4 = 0,264 \mu\text{m}.$$

Dieses Ergebnis spiegelt die eigene Erfahrung, dass sich nur kleine Teilchen an die Decke anhaften können, viel besser wider. Der mittlere Abstand von  $1 \mu\text{m}$  zwischen Staubkorn und Decke ist durch die Oberflächenrauheit gegeben.

Abschließend sei zum Ergebnis von Gleichung (7) noch Folgendes angemerkt. Wenn es gelingt, zwei Körper mit großen Flächen in atomar engen Kontakt zu bringen, lassen sich sehr große

elektrostatistische Anziehungskräfte erzeugen. Dies wird beispielsweise beim anodischen Bonden (siehe Abschn. 4.8.2) und beim Siliziumdirektbonden (siehe Abschn. 4.8.3) durch die Wafervorbehandlung realisiert.

#### Aufgabe 2.4

Die Resonanzkreisfrequenz  $\omega_0$  des schwingenden Feder-Masse-Systems von Bild 2.4 ist

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{mn}}$$

Mit

$$m = \rho \cdot V_m = \rho \cdot a^3$$

für eine würfelförmige Masse ( $\rho$  Dichte,  $V_m$  Volumen der Masse,  $a$  Kantenabmessung des Massewürfels) und

$$n = \frac{\ell}{EA} = \frac{\ell}{E \cdot b^2}$$

für eine Feder mit quadratischem Querschnitt ( $\ell$  Federlänge,  $E$  Elastizitätsmodul,  $A$  Federquerschnittsfläche,  $b$  Kantenlänge des quadratischen Federquerschnitts) ergibt sich

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{E \cdot b^2}{\rho \cdot a^3 \cdot \ell}}$$

Mit den Reduktionskoeffizienten  $\lambda_a, \lambda_b$  und  $\lambda_\ell$  für die geometrischen Abmessungen  $a, b$  und  $\ell$

$$\lambda_a = a_m/a_0; \lambda_b = b_m/b_0; \lambda_\ell = \ell_m/\ell_0$$

(Indizes 0 und m kennzeichnen die Ausgangs- und die miniaturisierte Anordnung) ergibt sich

$$\frac{\omega_{0m}}{\omega_{00}} = \frac{\lambda_b}{\sqrt{\lambda_a^3 \cdot \lambda_\ell}}$$

Ein größerer Dynamikbereich erfordert

$$\frac{\omega_{0m}}{\omega_{00}} > 1.$$

Dies ist durch Miniaturisierung ( $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_\ell < 1$ ) nur durch  $\lambda_a$  und  $\lambda_\ell$  zu erreichen. Zur Vergrößerung des Dynamikbereiches sollten also die Masse und die Federlänge  $\ell$  verringert werden.

## Lösungen zu den Aufgaben für Kapitel 3: Werkstoffe

### Aufgabe 3.1

Rechte Winkel  $\alpha = 90^\circ$  zwischen zwei Flächen  $(h_1, k_1, \ell_1)$  und  $(h_2, k_2, \ell_2)$  erfordern mit Gleichung 3.5 aus dem Buch die Bedingung

$$\alpha = 90^\circ = \arccos 0$$

bzw.

$$h_1 h_2 + k_1 k_2 + \ell_1 \ell_2 = 0. \quad (8)$$

{100}-Silizium:

Da nur einer der Parameter  $h_1, k_1$  oder  $\ell_1$  für {100}-Flächen den Wert null hat, der entsprechende Wert  $h_2, k_2$  oder  $\ell_2$  für {111}-Flächen den Wert  $\pm 1$  besitzt, ist die Bedingung von Gleichung (8) nicht erfüllbar. Die auftretenden Winkel können nur

$$\alpha = \arccos \frac{\pm 1}{\sqrt{3}} = 54,74^\circ \text{ oder } 125,26^\circ$$

betragen.

{110}-Silizium:

Gleichung (8) ist erfüllt, wenn sich z. B. für  $\ell_1 = 0$  Kombinationen finden lassen, für die  $h_1 h_2 = -k_1 k_2$  ist.

Beispiele:

$$\begin{aligned} & (110) \text{ oder } (\bar{1}\bar{1}0) \text{ und } (\bar{1}11) \text{ oder } (\bar{1}\bar{1}\bar{1}) \text{ oder } (\bar{1}\bar{1}\bar{1}) \text{ oder } (\bar{1}\bar{1}\bar{1}) \\ & (\bar{1}\bar{1}0) \text{ oder } (\bar{1}\bar{1}0) \text{ und } (111) \text{ oder } (\bar{1}\bar{1}\bar{1}) \text{ oder } (11\bar{1}) \text{ oder } (\bar{1}\bar{1}\bar{1}) \end{aligned}$$

{111}-Silizium:

Da für zwei beliebige {111}-Flächen immer

$$|h_1 h_2| = |k_1 k_2| = |\ell_1 \ell_2| = 1$$

gilt, ist die Bedingung von Gleichung (8) nicht erfüllbar.

### Aufgabe 3.2

Einätzungen im Silizium, die von der Waferoberfläche ausgehen, haben entsprechend Abschnitt 4.6 nur Begrenzungsflächen mit einem Neigungswinkel von höchstens  $90^\circ$ . Hinterschneidungen, d. h. Strukturen, die in der Tiefe breiter werden, sind ohne spezielle Zusatzprozesse nicht möglich. Bei einem (001)-Silizium-Wafer schneiden nur vier {111}-Flächen die Scheibenoberfläche: (111),  $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$ ,  $(1\bar{1}\bar{1})$  und  $(\bar{1}\bar{1}1)$ .

Bei (111)-Scheiben ergeben sich als mögliche {111}-Seitenflächen nur die  $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$ -, die  $(\bar{1}\bar{1}1)$ - und die  $(1\bar{1}\bar{1})$ -Fläche sowie die (111)-Bodenfläche.

Bei (110)-Silizium können neben der (110)-Bodenfläche sechs weitere seitliche Begrenzungsflächen auftreten.

$$(\bar{1}\bar{1}\bar{1}), (\bar{1}\bar{1}\bar{1}), (\bar{1}\bar{1}\bar{1}), (\bar{1}\bar{1}\bar{1}): \quad 90,00^\circ \text{ zur } (110)\text{-Fläche}$$

$$(111), (\bar{1}\bar{1}\bar{1}): \quad 35,26^\circ \text{ zur } (110)\text{-Fläche}$$

Die Flächen  $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$  und  $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$  haben dabei zu den Flächen  $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$  und  $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$  einen Winkel von  $70,53^\circ$  bzw.  $109,47^\circ$ . Damit ergibt sich die Geometrie von Bild 4.33 aus dem Buch.

### Aufgabe 3.3

Gemäß Gleichung (3.13) aus dem Buch gilt

$$\frac{1}{E_{\langle 111 \rangle}} = s_{11} - s \frac{h^2 k^2 + k^2 \ell^2 + h^2 \ell^2}{(h^2 + k^2 + \ell^2)^2}$$

mit  $h = k = \ell = 1$ ,  $s = 7,08 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2 \text{ N}^{-1}$  und  $s_{11} = 7,68 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2 \text{ N}^{-1}$ . Daraus folgt

$$\frac{1}{E_{\langle 111 \rangle}} = 7,68 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2 \text{ N}^{-1} - 7,08 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2 \text{ N}^{-1} / 3 = 5,32 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2 \text{ N}^{-1}$$

$$E_{\langle 111 \rangle} = 1,88 \cdot 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$$

**Aufgabe 3.4**

Die Ausfallwahrscheinlichkeit berechnet sich mit Gleichung 3.16 aus dem Buch zu

$$F(\sigma) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{\sigma}{b}\right)^k\right\}.$$

Bei Raumtemperatur ist gemäß Tabelle 3.8 aus dem Buch für  $\{100\}$ -Si  $b = 3,73 \cdot 10^9$  GPa und  $k = 6,18$ . Damit ergeben sich für die gegebenen Zugspannungen folgende Fehlerausfallwahrscheinlichkeiten  $F(\sigma)$ :

$\sigma$ in $10^9$ GPa	$F(\sigma)$
0,058	$6,7 \cdot 10^{-12}$
0,58	$1,0 \cdot 10^{-5}$
5,8	0,9999998

**Aufgabe 3.5**

Für den Glaskörper von Bild 3.12 aus dem Buch können wir wieder von Gleichung 3.25 ausgehen:

$$\underline{v} = (r + sn)\underline{F}. \quad (9)$$

Gegeben ist eine sprungförmige Deformationsbelastung:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ u_0 & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \quad (10)$$

Bei Verwendung komplexer Frequenzen  $s$  ergibt die LAPLACE-Transformation

$$\underline{u}(s) = u_0 \cdot \frac{1}{s}. \quad (11)$$

Gesucht ist der Verlauf der mechanischen Spannung

$$\sigma(t) = F(t)/A. \quad (12)$$

Aus den Gleichungen (3.5.1) bis (3.5.4) folgt:

$$\underline{\sigma}(s) = \frac{E(s)}{A} = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{r + sn} = \underline{v}(s).$$

Mit  $\underline{v}(s) = s \cdot \underline{u}(s)$  folgt

$$\underline{\sigma}(s) = \frac{u_0}{An} \cdot \frac{1}{s + \frac{r}{n}}.$$

Die LAPLACE-Rücktransformation erbringt mit dem Zusammenhang

$$\frac{1}{s + a} \leftrightarrow e^{-at}$$

die Lösung

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{u_0}{An} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

mit der Zeitkonstante

$$\tau = \frac{n}{r}.$$

Durch die Deformation zum Zeitpunkt  $t = 0$  wird im Glaskörper eine mechanische Spannung erzeugt, die durch die viskosen Eigenschaften mit der Zeit relaxiert (Abbildung 1). Nach unendlich langer Zeit bauen sich die mechanischen Spannungen vollständig ab.

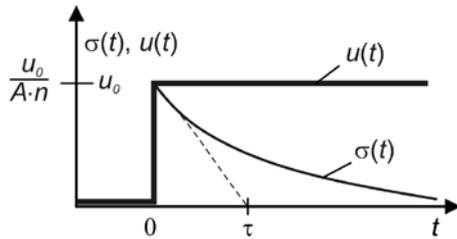


Abbildung 1: Spannungsrelaxation in einem Glaskörper

### Aufgabe 3.6

Zur Berechnung der Schichtspannung  $\sigma_{PI}$  in der Polyimidschicht auf dem Siliziumwafer kann Gleichung (3.39) verwendet werden:

$$\sigma_{PI} = \frac{1}{6} \frac{E_{Si}}{1 - \gamma_{Si}} \frac{h_{Si}^2}{h_{PI}} \frac{1}{R}, \quad (13)$$

wobei  $E_{Si}$ ,  $\gamma_{Si}$  und  $h_{Si}$  der Elastizitätsmodul, die Querkontraktionszahl und die Dicke der Siliziumscheibe und  $h_{PI}$  die Dicke der Polyimidschicht sind. Da der Durchmesser  $d = 150 \text{ mm}$  der Si-Scheibe viel größer als die Durchwölbung  $u = 10 \text{ }\mu\text{m}$  ist, gilt für den Zusammenhang zwischen Krümmungsradius  $R$  in Gleichung (13) und der gegebenen Durchwölbung gemäß Gleichung 3.39 aus dem Buch.

$$\sigma_{PI} = \frac{3}{4} \frac{E_{Si}}{1 - \gamma_{Si}} \cdot \frac{h_{Si}^2}{h_{PI}} \cdot \frac{u}{d^2}$$

Für (100)⟨110⟩-orientiertes Silizium folgt mit den Werten von Tabelle 3.7 ( $E_{Si} = 1,69 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ ;  $\gamma_{Si} = 0,063$ ) und Tabelle 3.10 ( $h_{Si} = 675 \text{ }\mu\text{m}$ )

$$\sigma_{Si} = 9,84 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 9,84 \text{ MPa}.$$

## Lösungen zu den Aufgaben für Kapitel 4: Mikrotechnische Fertigungsverfahren

### Aufgabe 4.1

Siehe Lösung zur Aufgabe 3.2

### Aufgabe 4.2

Wir gehen bei der Konstruktion vom Ätzrattendiagramm von Bild 4.26 aus (Abbildung 2). Die Seitenflächen der Struktur, die mit den Waferoberflächen  $\langle 110 \rangle$ -orientierte Schnittkanten bilden, werden mit der Unterätzrate  $R_u$  and  $R_{\langle 110 \rangle}$  abgetragen. An den beiden rechten konvexen Ecken rechts bilden sich Seitenflächen, die mit der maximalen Unterätzrate  $R_u = R_{\max}$  abgetragen werden.

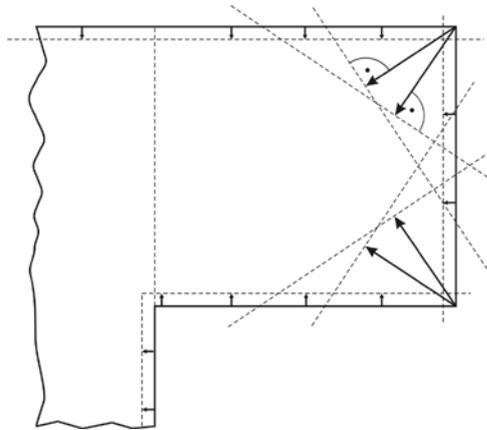


Abbildung 2: Relevante Ätzraten  $R_{\max}$  and  $R_{\langle 110 \rangle}$

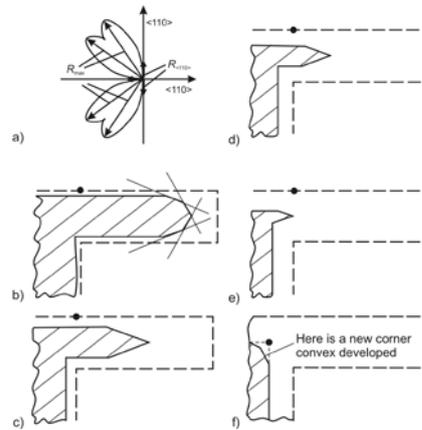


Abbildung 3: Ätzfortschritt beim anisotropen Ätzen der Ätzmaskenecke mit Kompensationsmaskenteil  
a)  $t = t_0$ ; b...f)  $t = t_0 \dots 5t_0$

Nach der Zeit  $t_0$  beträgt in den verschiedenen Richtungen der Unterätzabtrag jeweils  $R_u \cdot t_0$  (Abbildung 3a). Die Struktur wird durch die am weitesten innen liegenden Ätzfronten gebildet (Abbildung 3b). Für die sich neu bildenden konvexen Ecken treten keine anderen schnellgeätzten Flächen auf, so dass die bestehenden Seitenflächen kontinuierlich weiter abgetragen werden. Im Zuge des Ätzfortschritts kann es passieren, dass geometrisch bedingt bestimmte Seitenflächen verschwinden bzw. in andere Seitenflächen aufgehen (Abbildung 3b→c). Nach einer bestimmten Zeit ist der Kompensationsmaskenteil vollständig weg geätzt, so dass sich eine neue konvexe Ecke herausbildet (Abbildung 3e→f). Von dort aus setzt sich der Unterätzprozess analog fort.

### Aufgabe 4.3

Abbildung 3 stellt die geometrischen Verhältnisse für Druckplatten dar, die mittels anisotropem nasschemischen Tiefenätzen und mittels Bonden und Rückätzen hergestellt wurden.

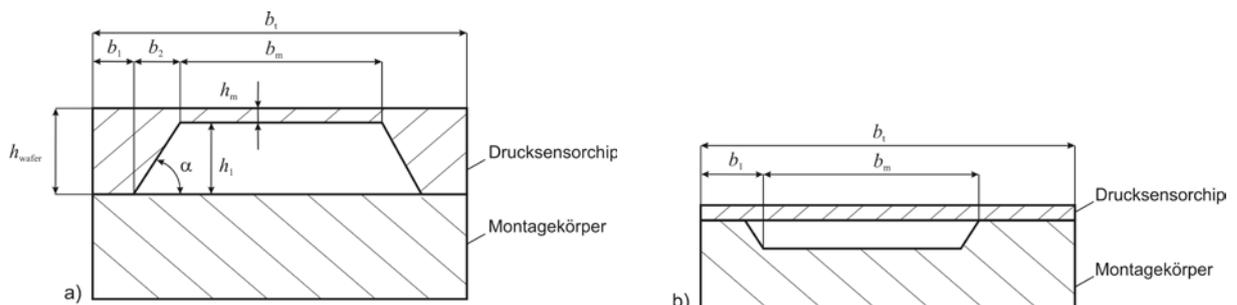


Abbildung 4: Drucksensoren, hergestellt a) mittels anisotropem Ätzen und b) mittels Bonden und Rückätzen

**Anisotrop geätzter Drucksensor (Abbildung 4a):**

Die Gesamtbreite  $b_t$  beträgt

$$b_t = b_m + 2(b_1 + b_2),$$

wobei  $b_m$  die Plattenbreite,  $b_1$  die Montagebreite und  $b_2$  der Platzbedarf für eine Ätزشräge ist. Letztes hängt über den Winkel  $\alpha = 54,74^\circ$  mit der Ätztiefe  $h_1$  zusammen (siehe Bild 3.5d):

$$b_2 = h_1 / \sqrt{2}.$$

Diese ergibt sich aus der Waferdicke  $h_{\text{Wafer}}$  und der Plattendicke  $h_m$  zu

$$h_1 = h_{\text{Wafer}} - h_m.$$

Für eine 150 mm-Si-Scheibe beträgt die Waferdicke  $h_{\text{Wafer}}$  standardmäßig nach Tabelle 3.10 aus dem Buch  $h_{\text{Wafer}} = 675 \mu\text{m}$ .

Mit den gegebenen Werten  $h_m = 25 \mu\text{m}$ ,  $b_m = 500 \mu\text{m}$  und  $b_1 = 100 \mu\text{m}$  ergibt sich für die Gesamtchipbreite aus den obengenannten Gleichungen

$$b_t = b_m + 2b_1 + 2b_2 = b_m + 2b_1 + \sqrt{2}(h_{\text{Wafer}} - h_m) = 1,62 \text{ mm}.$$

Der Bedarf an Chipfläche für einen quadratischen Sensorchip beträgt damit  $A = b_t^2 = 2,62 \text{ mm}^2$ .

**Drucksensor, hergestellt durch Bonden und Rückätzen (Abbildung 4b):**

Durch die spezielle Art der Herstellung entfällt der Platzbedarf für Ätزشrägen. Die Gesamtbreite  $b_t$  ergibt sich damit zu

$$b_t = b_m + 2b_1 = 700 \mu\text{m}$$

und die benötigte Gesamtchipfläche

$$A = b_t^2 = 0,49 \text{ mm}^2.$$

Dies ist knapp 20 % der benötigten Chipfläche des anisotrop hergestellten Drucksensorchips. In der Mikroelektronik ist der Chippreis näherungsweise proportional zur Chipfläche, so dass hier ein entsprechend großer Kostenvorteil entsteht.

**Aufgabe 4.4**

Zur Abschätzung der projizierten Reichweite  $R_p$  können wir von einer symmetrischen Verteilung der Sauerstoffionen sowohl nach der Implantation gemäß Gleichung 4.51 aus dem Buch als auch nach Bildung der SIMOX-SiO<sub>2</sub>-Schicht ausgehen. Damit liegt  $R_p$  genau in der Mitte der SiO<sub>2</sub>-Schicht:

$$R_p = d_{\text{Si}} + \frac{1}{2}d_{\text{SiO}_2} = 200 \text{ nm} + 400 \text{ nm}/2 = 400 \text{ nm}$$

mit  $d_{\text{Si}}$  und  $d_{\text{SiO}_2}$  als Schichtdicken der Si- und der SiO<sub>2</sub>-Schicht. Dieser Wert entspricht dem interpolierten Wert für die O<sup>+</sup>-Ionenimplantation mit einer Energie von 200 keV aus Tabelle 4.17 aus dem Buch. Aus Gleichung 4.51 folgt außerdem für  $z = R_p$

$$n(R_p) = n_{\text{max}} = \frac{n^*}{\sqrt{2\pi} \Delta R_p} \quad \text{bzw.} \quad \Delta R_p = \frac{n^*}{\sqrt{2\pi} \cdot n_{\text{max}}} \sim \frac{1}{n_{\text{max}}}. \quad (14)$$

Da keine Angaben für  $n_{\text{max}}$  bzw. irgendein  $n(z)$  gemacht sind, lässt sich  $\Delta R_p$  an den gegebenen Werten nicht berechnen. Abhängig von den Implantationsbedingungen kann die Streuung  $\Delta R_p$  unterschiedlich groß sein. Typischerweise hängt  $R_p$  hauptsächlich von der Energie  $E$  und der Masse des implantierten Ions und  $\Delta R_p$  vom Verhältnis der Massen des implantierten Ions zum Gitteratom ab.

Inwieweit unter den gegebenen Bedingungen wirklich stöchiometrisches SiO<sub>2</sub> gebildet wurde, lässt sich einfach abschätzen. Ausgangspunkt ist die Si-Gitterzelle von Bild 3.2c aus dem Buch, zu der 8 Eckatome (die sich die Gitterzelle mit 7 weiteren Gitterzellen teilt), 6 Atome auf den Seitenflächen (die sie sich mit jeweils der angrenzenden Gitterzelle teilt) sowie 4 Atome im Volumen der Grundzelle gehören. Pro Gitterzelle sind das also

$$N_{\text{Si}} = \frac{1}{8} \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 6 + 4 = 8$$

Si-Atome. Pro Si-Atom werden zur vollständigen Oxidation zwei  $O^+$ -Ionen benötigt:

$$N_{O^+} = 2 N_{Si} = 16.$$

Die erforderliche Dichte an  $O^+$ -Ionen beträgt damit

$$n_{O^+} = \frac{N_{O^+}}{a^3} = \frac{16}{(0,543 \text{ nm})^3} = 1,0 \cdot 10^{23} \text{ cm}^{-3},$$

wobei  $a$  die Gitterkonstante von Si ist.

Die Siliziumdicke  $d_{Si, \text{implantiert}}$  aus der sich eine 400 nm dicke  $SiO_2$ -Schicht bildet, ist nach Bild 4.11 aus dem Buch

$$d_{Si, \text{implantiert}} = 0,45 \cdot d_{SiO_2} = 180 \text{ nm} = 1,8 \cdot 10^5 \text{ cm}^{-1}.$$

Die benötigte Implantationsdosis wird damit

$$n^* = n_{O^+} \cdot d_{Si, \text{implantiert}} = 1,8 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-2}.$$

Das steht in guter Übereinstimmung zum Wert in der Aufgabenstellung. Die Abweichung ergibt sich aus dem Umstand, dass die  $SiO_2$ -Schicht im SIMOX-Wafer amorph ist, so dass nicht mehr von einkristallinem Silizium ausgegangen werden kann.

Würde man annehmen, dass bei der  $O^+$ -Implantation im SIMOX-Prozess maximal die oben erwähnte Konzentration  $n_{O^+} = 10^{23} \text{ cm}^{-3}$  auftreten sollte, folgte aus Gleichung (14)

$$\Delta R_p = \frac{n^*}{\sqrt{2\pi} \cdot n_{O^+}} = \frac{10^{18} \text{ cm}^{-2}}{\sqrt{2\pi} \cdot 10^{23} \text{ cm}^{-3}} = 40 \text{ nm}.$$

Dieser Wert ist etwa die Hälfte des entsprechend der Referenz in Tabelle 4.17 aus dem Buch bestimmbaren Wertes von 77 nm.

#### Aufgabe 4.5

Wir betrachten die Anordnung von Bild 4.53 mit den Geometrievariablen von Bild E.2 im Anhang E (alles aus dem Buch). Die Haftung für den Fall ohne Noppen von Bild E.2 im Buch ist durch die Haftfläche  $A_B = (\ell - x) \cdot b$  gegeben. Durch die Noppen im Bild 4.53 aus dem Buch verringert sich die Haftfläche zu

$$A_B = (\ell - x) \cdot b \cdot \lambda_A$$

wobei  $\lambda_A$  als Skalierungsfaktor der Haftfläche zu verstehen ist ( $0 \leq \lambda_A \leq 1$ ). Damit modifiziert sich in Gleichung (E.9) die Oberflächenenergie zu

$$E_0 = C - \gamma_s (\ell - x) b.$$

Die weitere Ableitung analog zu Anlage E führt dann zu einer modifizierten Gleichung (E.12):

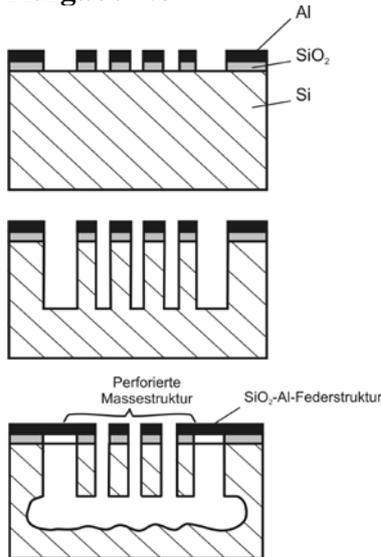
$$\ell_k = \sqrt[4]{\frac{3}{2} \frac{Eh^3 d^2}{\gamma_s \cdot \lambda_A}}$$

Die kritische Länge  $\ell_{km}$  einer freitragenden Biegefeder gemäß Bild 4.53b aus dem Buch vergrößert sich damit gegenüber der von einer unstrukturierten Anordnung gemäß

$$\frac{\ell_{km}}{\ell_{k0}} = \sqrt[4]{\frac{1}{\lambda_m}}$$

Ist beispielsweise  $\lambda_m = 0,01$ , d. h. wird die Haftfläche durch die Noppenstruktur auf ein Hundertstel reduziert, vergrößert sich die kritische Länge um den Faktor 3,2.

### Aufgabe 4.6

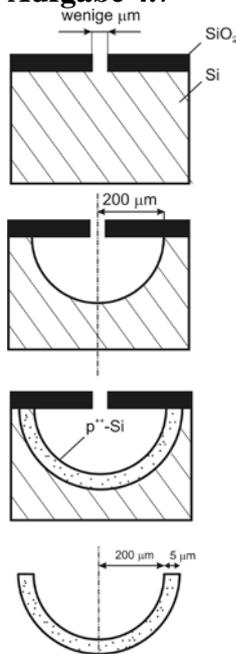


- Thermische Oxidation
- Al-Bedampfung
- Strukturierung der Al- und der SiO<sub>2</sub>- Schicht
- DRIE (mit Passivierung der Seitenwände)
- Isotropes Gasphasenätzen mit passivierten Seitenwänden zum Unterätzen/Freilegen der Massestruktur (am Grubenboden)
- Ätzen der Seitenwandpassivierung

Isotropes Gasphasenätzen der Gesamtstruktur zum Unterätzen der Al/SiO<sub>2</sub>-Federstruktur

Abbildung 5. Herstellung der AIM-Struktur

### Aufgabe 4.7



- Thermische Oxidation
- Strukturierung der SiO<sub>2</sub>- Schicht
- Isotropes Si-Ätzen (nasschemisch oder in der Gasphase)
- Bor-Diffusion in Si (B<sup>+</sup>-Konzentration ca. 10<sup>20</sup> B<sup>+</sup>/cm<sup>3</sup> bis in 5 µm Tiefe)
- SiO<sub>2</sub> entfernen
- Si-Ätzen mit EDP-Ätzlösung (selektiver Ätzstopp an hochdotiertem p<sup>++</sup>-Si)

Abbildung 6. Herstellungsprozess für die Halbkugelstruktur

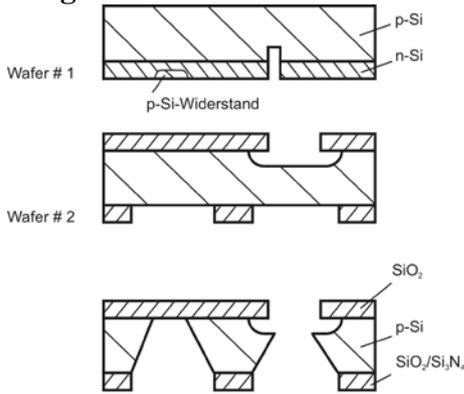
**Aufgabe 4.8**

Bearbeitung	Si-Druckplatte	Poly-Si-Druckplatte	SiO <sub>2</sub> - oder Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub> - Druckplatte
<b>Zweistufenbearbeitung</b>	RS: anisotropisches nass-chemisches Si-Ätzen (siehe Bild 4.2j,k)	VS: Abscheidung und Strukturierung einer SiO <sub>2</sub> -Opferschicht VS: Abscheidung der Poly-Si-Schicht RS: anisotropes nass-chemisches Si-Ätzen bis zur SiO <sub>2</sub> -Opferschicht RS: SiO <sub>2</sub> -Opferschicht-ätzen	RS: anisotropes nass-chemisches Si-Ätzen bis zur SiO <sub>2</sub> /Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub> - (Ätzstopp-) Schicht (analog zu Bild 4.2j,k)
<b>Einseitenbearbeitung (Oberflächen-Mikromechanik)</b>	Siehe z. B. [KNESE07]: - n-Dotierung einer perforierten Gitterstruktur an der Oberfläche eines p-Si-Wafers - Umsetzung des p-Si unterhalb der n-Si-Gitterstruktur durch Anodisierung zu porösem Si - Schaffung einer Kavene unter n-Si-Gitter durch H <sub>2</sub> -Prebake - Si-Epitaxieschicht auf freiliegendem n-Si-Gitter	VS: Oberflächenmikromechanik-Standard-Technologie nach Bild 4.49	VS: SiO <sub>2</sub> -Schichtabscheidung VS: Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub> -Schichtabscheidung und -strukturierung (unbedeckter SiO <sub>2</sub> -Bereich in der Mitte bildet Opferschicht) VS: SiO <sub>2</sub> -Schichtabscheidung und -strukturierung (Ätzkanal zum Opferschichtätzen) VS: Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub> -Deckschicht (Funktionsschicht) VS: SiO <sub>2</sub> -Opferschicht-ätzen via Ätzkanal VS: anisotropes Si-Ätzen (Freiätzen der V-Grube unter dem weggeätzten SiO <sub>2</sub> -Opferschichtbereich, um Platz für hinreichend große Auslenkungen der Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub> -Druckplatte zu schaffen)
<b>Zweiseitenbearbeitung (Bonden und Rückätzen)</b>	Herstellung wie im Bild 4.45		<b>Wafer #1:</b> Anisotropes nass-chemisches Ätzen des Si durch SiO <sub>2</sub> /Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub> -Ätzmaske <b>Wafer #2:</b> SiO <sub>2</sub> - oder Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub> -Abscheidung <b>Wafer #1 und #2:</b> Anodisches Bonden, Rückätzen von Wafer #2 bis zur SiO <sub>2</sub> -/Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub> -Schicht

VS Vorderseite, RS Rückseite

[KNESE07] K. Knese, S. Armbruster, H. Benzel, H. Seidel: Neue oberflächenmikromechanische Technologie zur Herstellung kapazitiver Sensoren auf Basis von porösem Silizium. In: Mikrosystemtechnik Kongress 2007, 15. bis 17. Oktober. Proceedings. Berlin, Offenbach: VDE-Verlag 2007. S. 131 – 134.

### Aufgabe 4.9



- Implantation der p-Si-Piezowiderstände in die n-Si-Epitaxieschicht eines p-Si-Wafers
  - RIE-Ätzen
  - VS: Isotropes nasschemisches Si-Ätzen
  - RS: Anisotropes nasschemisches Si-Ätzen
  - (davor jeweils Abscheidung und Strukturierung entsprechender SiO<sub>2</sub>/Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub>-Ätzmaskenschichten)
- Wafer #1 und #2:
- Siilziumdirektbonds
  - Anodisches Bonden zum vorstrukturierten Glassubstrat
  - Rückätzen des p-Si-Substrats von Wafer #1 bis zur n-Si-Epitaxieschicht

Abbildung 7. Herstellungsprozess für den Beschleunigungssensor

### Aufgabe 4.10

Nach DIN ISO 286 werden die Werte der Grundtoleranzen für die Qualitäten IT 5 ... IT 18 (Grundtoleranzgrade) für Nennmaße bis 500 mm als Funktion des Toleranzfaktors  $i$  ermittelt. Der Toleranzfaktor  $i$  wird aus der Gleichung  $i = 0,45 \sqrt[3]{D} + 0,001D$  berechnet. Dabei ist  $D = \sqrt{D_1 D_2}$  das geometrische Mittel des jeweiligen Nennmaßbereiches und  $D_1, D_2$  sind dessen Bereichsgrenzen. Für die Grundtoleranzgrade IT 5 ... IT 7 gilt

$$T_{IT5} = 7 \cdot i$$

$$T_{IT6} = 10 \cdot i$$

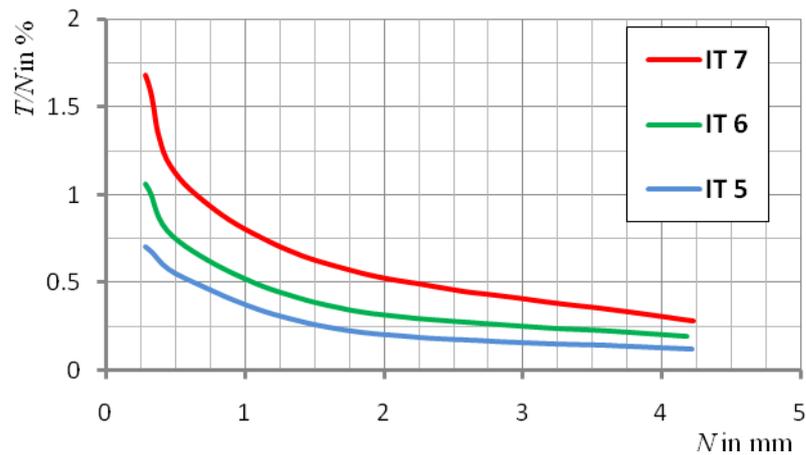
$$T_{IT7} = 16 \cdot i$$

(für jede nachfolgende Qualität ist die Grundtoleranz um etwa den Faktor 1,6 größer, z. B.  $T_{IT12} = 160 \cdot i$ ).

Für die Nennmaße 1 ... 6 mm sind in der nachfolgenden Tabelle Grundtoleranzen für die Grundtoleranzgrade IT 5 ... IT 7 sowie deren prozentualer Anteil am Nennmaß angegeben. Die in Klammern angegebenen Prozentanteile beziehen sich auf das geometrische Mittel  $D$  des jeweiligen Nennmaßbereiches. Es ist zu erkennen, dass der prozentuale Anteil der Toleranz mit kleiner werdendem Nennmaß rasch größer wird. Für Nennmaße unterhalb von 1 mm verstärkt sich diese Tendenz (s. Grafik).

Tabelle 1. Grundtoleranzgrade IT 5 ... IT 7 sowie deren prozentualer Anteil am Nennmaß

$N$ mm	$D$ mm	$i$ $\mu$ m	$T_{IT5}$ $\mu$ m	$T_{IT5}/N$ %	$T_{IT6}$ $\mu$ m	$T_{IT6}/N$ %	$T_{IT7}$ $\mu$ m	$T_{IT7}/N$ %
1 ... 3	1,732	0,542	4	0,13 ... 0,4 (0,23)	6	0,2 ... 0,6 (0,35)	10	0,33 ... 1,0 (0,58)
3 ... 6	4,243	0,734	5	0,08 ... 0,17 (0,12)	8	0,13 ... 0,26 (0,19)	12	0,2 ... 0,4 (0,28)



**Abbildung 8.** Grundtoleranzgrade IT 5 ... IT 7 sowie deren prozentualer Anteil am Nennmaß

Für die Bemaßung und Tolerierung sowie für die Mess- und Prüftechnik von Mikrobauteilen besteht Entwicklungsbedarf: Erarbeiten funktionsorientierter Tolerierungsgrundsätze (besonders für Nennmaße unterhalb von 1 mm), Überprüfung bestehender bzw. Einführung neuer Parameter zum Beschreiben der Eigenschaften von Mikrobauteilen (u. a. Maß, Formabweichung, Welligkeit, Rauheit, dreidimensionale Oberflächenparameter, strukturorientierte Parameter), neue Messstrategien und -techniken (Messen von Funktionsoberflächen mit einer Auflösung im Nanometerbereich, kurze Messzeiten, Anzahl und Verteilung der Messpunkte), Standards für Toleranzen, Mess- und Prüfverfahren.

## Lösungen zu den Aufgaben für Kapitel 5: Aufbau- und Verbindungstechnik

### Aufgabe 5.1

**Drehratensensor** (Bild 1.7 im Buch):

- elektrisch: - Metallisierung (Leitbahnen) der Beschleunigungssensoren
- mechanisch: - Glassubstrat (mechanischer Träger)  
- dicker Rand des Si-Chips (mechanische Verstärkung, Montagebereich zum Glassubstrat)
- sensorisch: - Beschleunigungssensoren  
- schwingende Massen als drehratenempfindliche Schwingerstrukturen
- thermisch: - Si-Chip zur Wärmeableitung
- protektiv: - Glassubstrat  
- Si-Abdeckung mit Glasdichtung (beides zur hermetischen Gehäusung)

### Tintenstrahldruckköpfe:

- elektrisch: - Kontaktierung der Aktorelemente
- mechanisch: - Gehäuse
- sensorisch: -
- thermisch: - Mikroheizer zur Tintenstrahlerzeugung  
- Tintenkammer zur Verlustwärmeabführung
- protektiv: - Gehäuse

**Infrarot-Bolometerarraysensor** (Bilder 10.2 bis 10.4 der englischsprachigen Ausgabe des Buches):

- elektrisch: - Kontaktinseln  
- Kontaktverstärkung  
- Kontaktlöcher
- mechanisch: - Träger(Ausgangs-)Wafer  
- Kontaktsäulen
- sensorisch: - Bolometerpixel
- thermisch: - Si-Wafer als Temperatursenke
- protektiv: - Si-Trägerwafer  
- Gehäuse

### Aufgabe 5.2

Die Fest-(Investitions-)kosten  $FK_m$  für die monolithische Integration betragen 10 Mio. Euro und sind nicht zu beeinflussen. Deshalb ist zu prüfen, inwieweit die Stückkosten  $VK_m$  verringert werden können. Gemäß Gleichung 5.3 aus dem Buch gilt:

$$VK_m \leq VK_h - \frac{FK_m - FK_h}{n},$$

wenn bei einer vorgesehenen Stückzahl  $n$  die monolithische Integration (Index m) gegenüber der Hybridintegration (Index h) wirtschaftlich vorteilhaft sein soll. Mit den gegebenen Werten  $n = 10^6$ ,  $FK_m = 10^7$  €,  $FK_h = 10^6$  €,  $VK_h = 15$  € ergibt sich

$$VK_m \leq 6 \text{ €}.$$

Da Gehäuse und Verkappung pro Sensor 2 Euro kosten, verbleiben für die monolithische Fertigung eines Beschleunigungssensorchips 4 Euro. Um die bisherigen Chipfertigungskosten von 10 Euro auf 4 Euro zu senken, bieten sich zwei Wege an:

- Erhöhung der Ausbeute um den Faktor 2,5 (nur möglich, wenn sie bisher 40 % oder weniger betrug),
- Verringerung der Chipfläche auf 40 % (Fertigungskosten sind näherungsweise proportional zur Chipfläche).

### Aufgabe 5.3

Thermische Anpassung des Drucksensors von Bild 5.2 aus dem Buch durch

- feste Verbindung von Elementen mit angepasstem thermischen Längenausdehnungskoeffizienten: anodische Bondverbindung zwischen Si-Sensorchip 1 und Glasgegenkörper 2,
- mechanische Spannungsentkopplung durch hochelastische Zwischenschicht: Einbettung des Verbunds Si-Sensorchip 1/Gegenkörper 2 über elastische Klebepunkte 3 und weiches Schutzgel 7 im Gehäusekörper 4.

### Aufgabe 5.4

Wärmeleitungswege von den Piezowiderständen

- → Si-Druckplatte 3 → Si-Sensorchip 1 (größter Anteil an der Wärmeableitung),
- → Al-Leitbahnen 5 → Isolationsschicht 4 → Si-Sensorchip 1,
- → Al-Leitbahnen 5 → Drahtbondkontakte 6 → Kontaktstifte 7,
- → umgebende Luft (meistens Wärmeleitung, seltener Konvektion).

### Aufgabe 5.5

Ursachen für Fatigue: zyklische mechanische oder thermische Belastungen

- Einflussfaktoren:
- lokale Spannungskonzentrationen
  - Oberflächenrauheit, -beschaffenheit
  - Werkstoffart
  - Temperatur, insbesondere Temperaturgradienten im Werkstoff
  - Defekte im Werkstoff u. v. a. m.

Ursachen für Delamination: Separation von Kompositschichten durch mangelhafte Haftung

- Einflussfaktoren:
- zyklische mechanische und thermische Belastungen
  - Schlagwirkung u. a.

### Aufgabe 5.6

Inertiale Messgrößen (Beschleunigung, Drehbeschleunigung) wirken auch auf Funktionselemente und Komponenten innerhalb von hermetisch dichten Gehäusen, bei denen durch diese hermetische Abdichtung die Wirkung anderer Störgrößen entkoppelt werden kann. Bei Drucksensoren ist es notwendig, dass ein entsprechendes Druckmedium (z. B. Luft) auf den Sensor direkt einwirken kann, so dass mit diesem Medium auch Störgrößen Einfluss haben können.

## Lösungen zu den Aufgaben für Kapitel 6: Funktions- und Formelemente der Mikrosystemtechnik

### Aufgabe 6.1

Für die Eigenfrequenz gilt mit Gleichung 6.17 aus dem Buch

$$f_e = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{F/y}{F/a_N}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{a_N}{y}}.$$

Daraus ergibt sich für die gegebenen Werte von Nennbeschleunigung und Eigenfrequenz des beweglichen Elements  $y \leq \frac{a_N}{(2\pi f_e)^2} = 0,65 \mu\text{m}$ .

### Aufgabe 6.2

Für den Wärmestrom, der infolge Wärmeleitung von der Spiegelplatte zum Rahmen fließt, gilt mit Gleichung 6.55 aus dem Buch  $\Phi_{\text{thL}} = \frac{\Delta T}{R_{\text{thL}}}$ , wobei der thermische Widerstand bei Wärmelei-

tung  $R_{\text{thL}} = \frac{s}{\lambda A}$  ist.

Die beiden Siliziumfedern mit den thermischen Widerständen  $R_{\text{th1}}$ ,  $R_{\text{th2}}$  wirken als Parallelschaltung. Der thermische Gesamtwiderstand ist damit  $R_{\text{thges}} = \frac{R_{\text{th1}} \cdot R_{\text{th2}}}{R_{\text{th1}} + R_{\text{th2}}}$ . Wegen  $R_{\text{th1}} = R_{\text{th2}} = R_{\text{th}}$  wird

$$R_{\text{thges}} = \frac{R_{\text{th}}}{2} = \frac{1000 \mu\text{m}}{2 \cdot 30 \cdot 60 \mu\text{m}^2 \cdot 156 \text{ W/Km}} = 1780 \text{ K/W}.$$

Damit wird der Wärmestrom  $\Phi_{\text{thL}} = \frac{60 \text{ K}}{1780 \text{ K/W}} = 33,7 \text{ mW}$ .

### Aufgabe 6.3

a) Bulk-Mikromechanik mit Bewegung des Schwingers normal zur Waferoberfläche:

$$f_e = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E \cdot b \cdot h^3}{4l^3 \cdot b_m \cdot l_m \cdot h \cdot \rho}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E \cdot b \cdot h^2}{4l^3 \cdot b_m \cdot l_m \cdot \rho}}.$$

Mit  $\Delta f_e = S_h \cdot \Delta h$  ergibt sich  $\frac{\Delta f_e}{f_e} = \frac{\Delta h}{h}$ , d. h. eine relative Dickenschwankung bewirkt eine gleich

große relative Schwankung der Eigenfrequenz des Schwingers ( $S_h$  ist die absolute Empfindlichkeit der Ausgangsgröße  $f_e$  bezüglich des Parameters  $h$ ).

b) Oberflächen-Mikromechanik mit Bewegung des Schwingers lateral zur Waferoberfläche:

Die Dicke  $h$  hat keinen Einfluss auf die Eigenfrequenz des Schwingers, weil sie in der Gleichung für  $f_e$  nicht enthalten ist:

$$f_e = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E \cdot b^3 \cdot h}{4l^3 \cdot b_m \cdot l_m \cdot h \cdot \rho}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E \cdot b^3}{4l^3 \cdot b_m \cdot l_m \cdot \rho}}.$$

Für die relative Schwankung der Eigenfrequenz des Schwingers gilt dann  $\frac{\Delta f_e}{f_e} = \frac{\Delta b}{b}$ . Das

Maß  $b$  ist über die Maske sehr exakt einstellbar.

### Aufgabe 6.4

Die Dämpfung beweglicher mikromechanischer Elemente kann durch den Gasdruck, die Gasart, die Spaltabstände, die konstruktive Ausführung von schwingenden Platten (Perforation, Nuten) beeinflusst werden. Bei einer Bewegung der Platte parallel zur feststehenden Fläche entsteht keine

Druckänderung im Luftspalt, die Dämpfungswirkung resultiert aus den Schwerkraften im Fluid (Slide-film-Dämpfung).

Bei einer Bewegung der Platte senkrecht zur feststehenden Fläche wird dagegen ein Druck auf das Gas ausgeübt. Das Gas entweicht teilweise aus dem Spalt zwischen bewegter und fester Platte und erzeugt Reibungsverluste (Squeeze-film-Dämpfung). Besonders bei engen Spalten und hoher Frequenz der Platte kann ein Teil des Gases den Spalt nicht verlassen und wird komprimiert. Diese beiden physikalischen Erscheinungen bewirken eine Kraft auf die Platte, die man sich als komplexe Größe vorstellen kann. Der Realteil wirkt als Dämpfung  $k_S$ , der Imaginärteil als zusätzliche Feder  $c_S$ , die die Steifigkeit des Systems verändert. Beide Effekte sind druck- und frequenzabhängig. Die Frequenz der schwingenden Masse, bei der Real- und Imaginärteil der Reaktionskraft gleich groß sind, wird als cut-off-Frequenz bezeichnet. Bei Frequenzen unterhalb der cut-off-Frequenz überwiegt der Dämpfungsanteil ( $k_{\text{eff}} = k + k_S(\omega)$ ), bei Arbeitsfrequenzen oberhalb der cut-off-Frequenz überwiegt der Steifigkeitsanteil ( $c_{\text{eff}} = c + c_S(\omega)$ ). Für typische Plattenabmessungen im Millimeter-Bereich und typische Spaltabstände von 1 ... 6  $\mu\text{m}$  erhält man cut-off-Frequenzen unterhalb von 1 kHz.

Die Wirkung des Gases in engen Spalten bei senkrechter Plattenbewegung wird als molekulare oder viskose Strömung beschrieben, wobei es einen Übergangsbereich gibt. Zur Charakterisierung der drei Bereiche wird die Knudsen-Zahl verwendet, das Verhältnis der Spaltgröße zur mittleren freien Weglänge der Teilchen (s. a. unter 6.2 Fluidische Elemente).

### Aufgabe 6.5

- a) Aus der Federgleichung ergibt sich für die an der Tastkugel wirksame Federsteifigkeit

$$c_{T,x,y} = \frac{F_{T\max}}{s_{x,y\max}}$$

Für die Federn liegt eine Reihenschaltung vor: die Belastung beider Federn erfolgt durch dieselbe Kraft, die Federwege addieren sich.

$$\text{Damit wird } c_{T,x,y} = \frac{F_{T\max}}{s_{x,y\max}} = \frac{F_{T\max}}{s_F + s_S}$$

Mit  $s_F = \frac{F_{T\max}}{c_F}$  für die Glasfaser und  $s_S = \frac{F_{T\max} l_F^2}{c_{S\text{rot},y}}$  für die Siliziumfeder (aus

$$c_{S\text{rot},y} = \frac{M}{\varphi} = \frac{F_{T\max} \cdot l_F}{\varphi} \text{ und } \varphi = \frac{s_S}{l_F}) \text{ ergibt sich schließlich}$$

$$c_{T,x,y} = \frac{F_{T\max}}{\frac{F_{T\max}}{c_F} + \frac{F_{T\max} \cdot l_F^2}{c_{S\text{rot},y}}} = \frac{1}{\frac{1}{c_F} + \frac{l_F^2}{c_{S\text{rot},y}}} = \frac{c_F \cdot c_{S\text{rot},y}}{c_{S\text{rot},y} + c_F \cdot l_F^2}$$

- b) In der nachfolgenden Tabelle sind die Werte zusammengestellt, die sich für die Federsteifigkeiten  $c_F$  der Glasfaser und für die wirksamen Federsteifigkeiten  $c_{T,x,y}$  an der Tastkugel für die in der Aufgabe genannten Faserlängen und -durchmesser ergeben.

Die Federsteifigkeit der Glasfaser ist  $c_F = \frac{3\pi E d^4}{64 l_F^3}$ . Die an der Tastkugel wirksame Feder-

$$\text{steifigkeit wird damit } c_{T,x,y} = \frac{3\pi E \cdot c_{\text{rot}} \cdot d^4}{64 c_{\text{rot}} \cdot l_F^3 + 3\pi E \cdot d^4 \cdot l_F^2}$$

Mit  $E = 75 \cdot 10^9 \text{ Pa}$  ergeben sich für  $c_F$  folgende Werte:

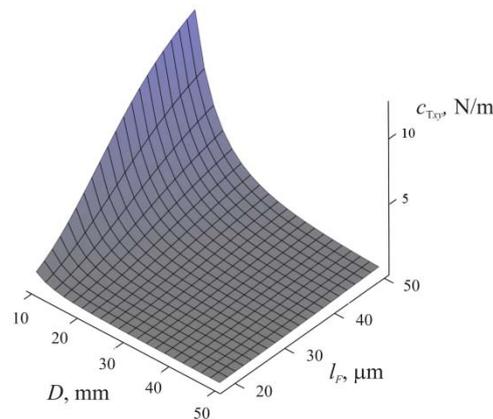
**Tabelle 2.** Federsteifigkeiten  $c_F$  der Glasfaser

$c_F$ in N/m			
$l_F$	$d_F = 18 \mu\text{m}$	$d_F = 40 \mu\text{m}$	$d_F = 50 \mu\text{m}$
1 mm	1,16	28,26	69,03
2 mm	0,145	3,53	8,63
3 mm	0,043	1,05	2,55

Für  $c_{T,x,y}$  ergeben sich bei  $c_{rot} = 15,3 \cdot 10^{-6} \text{ Nm}$  folgende Werte:

**Tabelle 3.** Federsteifigkeit  $c_{T,x,y}$  an der Tastkugel

$c_{T,x,y}$ in N/m			
$l_F$	$d_F = 18 \mu\text{m}$	$d_F = 40 \mu\text{m}$	$d_F = 50 \mu\text{m}$
1 mm	1,08	9,93	12,43
2 mm	0,14	1,84	2,65
3 mm	0,04	0,68	1,02



**Abbildung 9.** Wirksame Federsteifigkeit  $c_{T,x,y}$  an der Tastkugel

- c) Wenn die Antastkraft bei  $s_{max}$  im Bereich  $F_{Tmax} = 30 \dots 250 \mu\text{N}$  liegen soll, muss die an der Tastkugel wirksame Federsteifigkeit gemäß  $c_{T,x,y} = \frac{F_{Tmax}}{s_{max}}$  im Bereich  $c_{T,x,y} = 1,5 \dots 12,5 \text{ N/m}$  liegen. Für eine engere Auswahl kommen deshalb die Faserlängen und -durchmesser in den schattierten Feldern in Betracht.
- d) Die statische Durchsenkung des Sensorelementes auf Grund des Eigengewichtes der Siliziumplatte ist  $z_{stat} = \frac{G}{c_{Sz}} = 1,32 \mu\text{m}$ . Das Eigengewicht der Glasfaser kann in dieser Rechnung vernachlässigt werden, es macht weniger als 2 % aus.
- e) Die Eigenfrequenz des Sensorelementes in  $z$ -Richtung ist  $f_{ez} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c_{Sz}}{m_p}} = 434 \text{ Hz}$ .

**Aufgabe 6.6**

Die Dichte des Wassers wird mit  $1000 \text{ kg/m}^3$  angenommen. Der hydraulische Durchmesser entspricht dem Durchmesser einer zylindrischen Kapillare. Die Weber-Zahl in diesem Fall ist

$$We = \frac{\rho \cdot u^2 \cdot D_H}{\sigma} = \frac{1000 \cdot (100 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 100 \cdot 10^{-6}}{72} = 1,39 \cdot 10^{-11}.$$

Die kleine Weber-Zahl zeigt, dass auf der Mikroskala die Oberflächenspannung dominant ist und als aktorisches Prinzip genutzt werden kann.

**Aufgabe 6.7**

Die charakteristische Geometrie hier ist der Durchmesser. Daher ist die Knudsen-Zahl

$$Kn = \frac{\lambda}{D_H} = \frac{6,11 \cdot 10^{-8}}{10 \cdot 10^{-6}} = 1,39 \cdot 10^{-11} = 0,00611$$

Die Knudsen Zahl liegt zwischen 0,1 und 0,001. Deshalb soll das Kontinuitätsmodell mit Navier-Stokes-Gleichung und Gleitbedingung an der Wand benutzt werden.

**Aufgabe 6.8**

Im Betriebsfall des Sensors verringert sich wegen der erzwungenen Konvektion der thermische Widerstand, deshalb verringert sich auch die thermische Zeitkonstante  $\tau_{th} = C_{th} \cdot R_{th}$ .

**Aufgabe 6.9**

Die Temperatur an der Unterseite des Siliziumsubstrates im Bereich der Heizerstruktur kann in der thermischen Ersatzschaltung für den stationären Fall im Bild 6.17 b) an der Ausgangsseite des thermischen Widerstandes  $R_{1Si}$  abgelesen werden (im Bild der Punkt  $\vartheta_{\text{Unterseite}}$ ). Es gelten die im Beispiel 6.6 für den stationären Fall genannten Vereinfachungen.

Der wirksame thermische Gesamtwiderstand ist dann die Reihenschaltung von  $R_{1Ox}$ ,  $R_{1Si}$ , d. h.  $R_{thL} = (0,56 + 1,07) \text{ KW}^{-1} = 1,63 \text{ KW}^{-1}$ .

Bei einer zugeführten Heizleistung von  $P_{\text{Heiz}} = \Phi = 1,6 \text{ W}$  ergibt sich eine Temperaturdifferenz gegenüber der Heizertemperatur von  $\Delta T = P_{\text{Heiz}} \cdot R_{thL} = 2,5 \text{ K}$ .

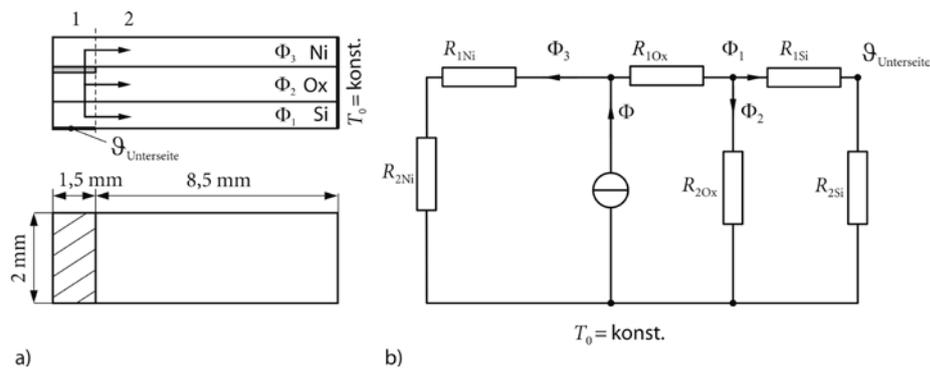


Abbildung 10 Thermische Ersatzschaltung

## Lösungen zu den Aufgaben für Kapitel 7: Sensoren und Aktoren

### Aufgabe 7.1

Aus der Schaltung von Bild 7.3a ergibt sich für die elektrische Seite

$$\underline{U} = \underline{U}_c + \underline{U}_w = \frac{1}{j\omega C_K} \underline{I} - \frac{A_0}{j\omega} \underline{v}$$

bzw. umgestellt

$$\underline{I} = A_0 C_K \underline{v} + j\omega C_K \underline{U} = \frac{1}{Y} \underline{v} + j\omega C_K \underline{U} \quad (15)$$

mit

$$Y = \frac{1}{A_0 C_K}. \quad (16)$$

Für die rechte, mechanische Seite von Bild 7.3a im Buch gilt

$$\underline{F} = \underline{F}_n + \underline{F}_w = \frac{1}{j\omega n_\ell} \underline{v} + \frac{A_0}{j\omega} \underline{I}$$

und mit Gleichung (15) eingesetzt

$$\underline{F} = \left( \frac{1}{j\omega n_\ell} + \frac{A_0^2 C_K}{j\omega} \right) \underline{v} + A_0 C_K \underline{U}. \quad (17)$$

Der Klammerausdruck lässt sich schreiben als

$$\frac{1}{j\omega} \left( \frac{1}{n_\ell} + A_0^2 C_K \right) = \frac{1}{j\omega} \left( \frac{1}{n_\ell} + \frac{1}{n_c} \right) = \frac{1}{j\omega n_K} \quad (18)$$

mit

$$n_c = \frac{1}{A_0^2 C_K}$$

und

$$\frac{1}{n_K} = \frac{1}{n_\ell} + \frac{1}{n_c}$$

bzw.

$$n_K = \frac{n_\ell \cdot n_c}{n_\ell + n_c}$$

Aus der Gleichung (17) und (18) folgt mit Gleichung (16)

$$\underline{F} = \frac{1}{j\omega n_K} \underline{v} + \frac{1}{Y} \underline{U}.$$

Die Gleichungen (15) und (16) entsprechen dem Schaltbild von Bild 7.3b im Buch bzw. dem Gleichungssystem 7.11.

### Aufgabe 7.2

Für den Fall einer Kondensatoranordnung, bei der eine Elektrode fest und eine zweite Elektrode nur in Richtung hin zur anderen Elektrode verschoben werden kann (effektive Plattenfläche ist konstant  $a \cdot b$ , Plattenabstand  $d$  veränderlich), ergibt sich analog zu Gleichung 7.14

$$F_{el} = \frac{\partial W_{el}}{\partial b} = \frac{\partial \left( \frac{U^2 C}{2} \right)}{\partial d} = \frac{U^2}{2} \frac{\partial C}{\partial d}$$

mit

$$C = \varepsilon \frac{ab}{d}.$$

Damit wird

$$F_{\text{el}} = -\frac{U^2}{2} \varepsilon \frac{ab}{d^2}$$

Für  $s = 0$  (Bewegung in  $d$ -Richtung) und  $U = U_0 + \Delta U$  wird analog zu Gleichung 7.18

$$\left. \frac{\partial F_{\text{el}}}{\partial U} \right|_{s=0, U=U_0} = -U_0 \cdot \varepsilon \frac{ab}{d^2} = \left. \frac{\partial Q}{\partial s} \right|_{U=U_0}$$

Damit ergibt sich

$$\Delta Q = C \cdot \Delta U - \varepsilon_0 \frac{ab}{d^2} U_0 s; \quad \Delta F = -\varepsilon_0 \frac{ab}{d^2} U_0 \Delta U + \frac{1}{n} s$$

bzw. nach Übergang zu sinusförmigen Größen ( $\underline{I} = j\omega \underline{Q}$ ,  $\underline{v} = j\omega \underline{s}$ ):

$$I = j\omega C U - \varepsilon \frac{ab}{d^2} U_0 v; \quad E = -\varepsilon_0 \frac{ab}{d^2} U_0 U + \frac{1}{j\omega n} v$$

### Aufgabe 7.3

a), b)

Liegt am HALL-Element mit der Dicke  $d$  eine Speisespannung  $U_x$  an und fließt ein Speisestrom  $I_x$ , wird bei wirkendem Magnetfeld  $B_z$  infolge des HALL-Effektes eine HALL-Spannung

$$U_y = \frac{B_z R_H}{d} \cdot I_x \quad (19)$$

induziert.  $R_H$  kennzeichnet die HALL-Konstante

$$R_H = \begin{cases} e \cdot p & \text{für p-Si} \\ -e \cdot n & \text{für n-Si} \end{cases}, \quad (20)$$

wobei  $e$  die Elementarladung und  $p$  und  $n$  die Ladungsträgerdichte von Elektronen bzw. Löchern im HALL-Element sind. Außerdem besteht in  $x$ -Richtung OHMSche Leitfähigkeit

$$U_x = R_x I_x$$

Da beide Effekte gleichzeitig auftreten, wenn ein Strom  $I_x$  fließt, ergibt sich aus den Gleichungen (19) und (20)

$$I_x = \frac{1}{R_x} U_x + \frac{d}{B_z \cdot R_H} U_y. \quad (21)$$

Aus Symmetriegründen muss in  $y$ -Richtung gleichermaßen gelten:

$$I_y = \frac{d}{B_z \cdot R_H} U_y + \frac{1}{R_y} U_x. \quad (22)$$

c) Die Gleichungen (21) und (22) kennzeichnen zwei verschiedene Wandlertypen.

- Der Zusammenhang  $(U_x, I_x) \leftrightarrow (U_y, I_y)$  stellt einen umkehrbaren stationären Wandler dar. Die Verkopplung tritt nur auf, wenn die Magnetfeldkomponente  $B_z \neq 0$  ist.
- Der HALL-Sensor zur Magnetfeldmessung nutzt den Zusammenhang  $U_y = f(B_z)$ . Dies stellt einen parametrischen Wandler dar. Für die stromlose Messung der Spannung  $U_y$  ( $I_y = 0$ ) folgt aus Gleichung (18) der Zusammenhang zwischen den Spannungen  $U_x$  und  $U_y$

$$U_x = -\frac{d R_y}{B_z R_H} U_y$$

und mit Gleichung (17)

$$U_y = \frac{B_z R_H}{d} \frac{1}{1 - \frac{R_y}{R_x}} I_x \quad (23)$$

Gleichung (23) berücksichtigt im Unterschied zu Gleichung (19), dass  $U_x$  nicht null ist.

#### Aufgabe 7.4

Das Wirkprinzip des piezoresistiven Kraftsensors von Bild 7.25 entspricht im Prinzip dem des piezoresistiven Drucksensors von Bild 7.21, nur dass statt des Drucks  $p$  hier eine Kraft  $F$  auf einen einseitig eingespannten, geführten Biegestab wirkt:

Kraft  $F \rightarrow$  mechanische Dehnungen  $\varepsilon_{L,Q}$  bzw. Spannungen  $\sigma_{L,Q} \rightarrow$  Widerstandsänderungen  $r_L$  ( $x = 0$ ) bzw.  $r_L$  ( $x = \ell$ )  $\rightarrow$  Brückenausgangsspannungsänderung  $U_a/U_0$ .

Gemäß [LENK01] gilt für den einseitig eingespannten, geführten Biegebalken für die Auslenkung

$$\frac{s(x)}{s_0} = \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \left(3 - 2 \frac{x}{\ell}\right)$$

mit

$$s_0 = s(x = \ell) = \frac{\ell^3}{Ebh^3} F.$$

Die Dehnung an der Oberfläche des Biegebalkens beträgt

$$\frac{\varepsilon_L(x)}{\varepsilon_0} = 1 - 2 \frac{x}{\ell} \quad (24)$$

mit

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_L(x = 0) = 3 \frac{h}{\ell^2} s_0 = 3 \cdot \frac{\ell}{Ebh^2} \cdot F. \quad (25)$$

Aus Symmetriegründen gilt gemäß Gleichung (7.4.3)

$$\varepsilon_L(x = 0) = -\varepsilon_L(x = \ell) = \varepsilon_0$$

Die Dehnungs-Spannungsbeziehungen lauten nach Gleichung (3.8) mit  $\sigma_z = 0$  für eine breiten Biegebalken ( $\varepsilon_Q = 0$ )

$$\varepsilon_L = \frac{1}{E} \sigma_L - \frac{\nu}{E} \sigma_Q \quad (26)$$

$$\varepsilon_Q = -\frac{\nu}{E} \sigma_L - \frac{1}{E} \sigma_Q = 0. \quad (27)$$

Aus Gleichung (27) folgt sofort

$$\sigma_Q = \nu \sigma_L \quad (28)$$

und damit aus Gleichung (26)

$$\varepsilon_L = \frac{1 - \nu}{E} \sigma_L$$

bzw.

$$\sigma_L = \frac{E}{1 - \nu^2} \varepsilon_L. \quad (29)$$

Mit den Gleichungen (7.4.10), (7.4.3) und (7.4.4) folgt daraus

$$\sigma_L(x = 0) = \frac{E}{1 - \nu^2} \varepsilon_L(x = 0) = \frac{E}{1 - \nu^2} \varepsilon_0 = 3 \frac{\ell}{(1 - \nu^2) bh^2} \cdot F = -\sigma_L(x = \ell) \quad (30)$$

Die weitere Ableitung folgt dem Vorgehen im Beispiel 7.8.

Die Ausgangsspannung der piezoresistiven Vollbrückenstruktur ergibt sich analog zu Gleichung (7.122) als de, Buch zu

$$\frac{U_a}{U_0} \approx \frac{1}{2} (r_{L1} - r_{L2}) \quad (31)$$

mit  $r_{L1}$  und  $r_{L2}$  als den relativen Widerstandsänderungen der Widerstände bei  $x = 0$

bzw. bei  $x = \ell$ .

Für die Längswiderstände gilt:

$$r_{L1} = \pi_L \cdot \sigma_L(x=0) + \pi_Q \cdot \sigma_Q(x=0)$$

$$r_{L2} = \pi_L \cdot \sigma_L(x=\ell) + \pi_Q \cdot \sigma_Q(x=\ell)$$

und mit den Gleichungen (7.4.8) und (7.4.11)

$$r_{L1} = -r_{L2} = (\pi_L + \nu\pi_Q)\sigma_L(x=0),$$

so dass Gleichung (7.4.12) ergibt

$$\frac{U_a}{U_0} = r_{L1} = (\pi_L + \nu\pi_Q) \cdot 3 \cdot \frac{\ell}{(1-\nu^2)bh^2} \cdot F$$

Mit  $\pi_L = -\pi_Q = 5 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$ ,  $\nu = 0,063$  und den gegebenen geometrischen Größen folgt daraus für den konkreten Aufbau

$$U_a = 10 \text{ V} \cdot 4,685 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N} \cdot 3 \cdot \frac{0,5 \text{ mm}}{0,996 \cdot 1 \text{ mm} \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 10^{-3} \text{ N}} = 0,07 \mu\text{V}$$

Diese Spannung ist viel zu klein, um technisch sinnvoll genutzt zu werden. Dazu sind zumeist Ausgangsspannungen im mV-Bereich gefordert. Dazu ist eine um etwa vier Größenordnungen höhere Sensitivität erforderlich. Dies wäre beispielsweise erreichbar, wenn die (quadratisch in die Ausgangsspannung eingehende) Biegedicke auf  $1 \mu\text{m}$  und die Biegebreite auf  $1/100$  reduziert würde.

### Aufgabe 7.5

Auch im Fall sehr schmaler Biegebalken gilt Gleichung (7.126). Bei sehr schmalen Biegebalken tritt jedoch keine seitliche Zwängung auf, wie sie im Fall sehr breiter Biegebalken der Fall ist. Als Randbedingung ergibt sich hier also neben der Bedingung  $\sigma_3 = 0$  für dünne Biegebalken auch  $\sigma_Q = 0$  statt  $\varepsilon_Q = 0$ .

Aus Gleichung (7.126) folgt dann

$$\begin{aligned} \pi_L \sigma_L &= K_L \cdot \varepsilon_L + K_Q \varepsilon_Q \\ \pi_Q \sigma_L &= K_Q \cdot \varepsilon_L + K_L \varepsilon_Q. \end{aligned} \quad (32)$$

Gleichung (3.8) führt zu

$$\varepsilon_L = \frac{1}{E} \sigma_L; \quad \varepsilon_Q = -\frac{\nu}{E} \sigma_L.$$

Eingesetzt in Gleichung (7.5.1) ergibt sich

$$\pi_L = \frac{1}{E} (K_L - \nu K_Q); \quad \pi_Q = \frac{1}{E} (K_Q - \nu K_L).$$

Auflösung nach  $K_L$  und  $K_Q$  ergibt analog zu Beispiel 7.9

$$K_L = \frac{E}{1-\nu^2} (\pi_L + \pi_Q \cdot \nu); \quad K_Q = \frac{E}{1-\nu^2} (\pi_Q + \pi_L \cdot \nu)$$

Im Unterschied zu Gleichung 7.131 aus dem Buch steht hier in den Gleichungen statt  $E/(1-\nu)$  der Term  $E/(1-\nu^2)$ . Die  $K$ -Faktoren für schmale Biegebalken sind deshalb um den Faktor

$$(1-\nu) / (1-\nu^2) = 1/(1+\nu) = 1/1,063 = 0,941$$

kleiner als für breite Biegebalken. Für andere Kristallrichtungen im Silizium, wo die Querkontraktionszahl  $\nu$  größere Werte aufweist (siehe Tabelle 3.7 im Buch) ist der Empfindlichkeitsverlust deutlich größer.

**Aufgabe 7.6**

In der Oberflächen- und oberflächennahen Mikromechanik werden häufig kapazitive Kammsysteme angewendet. Ein Kammsystem (interdigitale Fingerstruktur, interdigitaler Kondensator, comb drive) besteht aus benachbarten festen und beweglichen Stegen, die als Wiederholstruktur ausgeführt sind (s. Abbildung 11). Der zyklisch wiederkehrende Abschnitt ist die Elementarzelle.

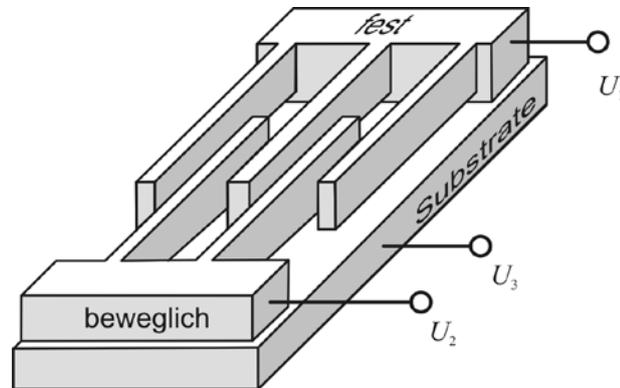


Abbildung 11. Kammzelle

Kammzellen können vorteilhaft als sensorische und aktorische Funktionsstrukturen (Krafterzeugung) genutzt werden. Die kapazitiven Empfindlichkeiten bzw. Kraftwirkungen sind dabei stets in allen drei Raumrichtungen vorhanden. Eine Elementarzelle kann bis zu drei getrennt elektrisch steuerbare Elektrodenflächen enthalten.

Die Arbeitsrichtung wird durch die im Entwurf definierte Art der Federaufhängung bestimmt: Die Arbeitsrichtung ist die, in der die Federaufhängung die größte Nachgiebigkeit besitzt. In den anderen Raumrichtungen soll die Aufhängung möglichst steif sein, um Querempfindlichkeiten zu verringern. Die Arbeitsrichtungen können horizontal längs der Stegrichtung, horizontal quer zur Stegrichtung oder vertikal sein. Während längsbewegte Kammzellen nach Tabelle 7.3b im überlappenden Bewegungsbereich eine sehr gute Linearität besitzen, sind querbewegte Kammzellen nach Tabelle 7.3a stets nichtlinear.

Bei den längsbewegten Kammzellen nach Tabelle 7.3b, c aus dem Buch (Flächenvariation) werden die Elektrodenflächen jeweils elektrisch so verbunden, dass letztlich nur zwei Elektroden mit einer aktiven Kapazität verbleiben, d. h. es entsteht eine Parallelschaltung aus vielen kleinen Plattenkondensatoren. Damit können bei geringer Baugröße relativ große Kapazitätsänderungen  $dC(x)/dx$  und deshalb für aktorische Anwendungen relativ große Kräfte

$$F_{\text{el}} = \frac{dW_{\text{el}}}{dx} = \frac{U^2}{2} \cdot \frac{dC(x)}{dx}$$

bzw. für sensorische Anwendungen entsprechende Umladeströme

$$I(t) = U_{\text{pol}} \frac{dC(x)}{dt} = U_{\text{pol}} \frac{dC(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

erzeugt werden. Die Kapazitätsänderung hängt nur von der Fläche, nicht vom Elektrodenabstand

ab. Die Kraftwirkung ist  $F_{\text{el}} = \frac{U^2}{2} \cdot \frac{2n \cdot \epsilon \cdot a}{d}$ , d. h. die von Kammantrieben erreichbare elektro-

statische Antriebskraft wird wesentlich von der Anzahl  $n$  der Kammarms und den unter Berücksichtigung technologisch realisierbarer Toleranzen erreichbaren Werten für Kammtiefe  $a$  und Kondensatorspalt  $d$  bestimmt. Mit Kammzellen können relativ große Bewegungen in der Waferebene erzeugt werden, wobei im Gegensatz zu Plattenkondensatoren mit Abstandsvariation eine lineare elektromechanische Übertragungsfunktion erreicht werden kann.

Querbewegte Kammzellen nach Tabelle 7.3a aus dem Buch (Abstandsvariation) stellen Differenzialkondensatoren dar. Eine Bewegung des Kamms in der angegebenen Richtung bewirkt für jeden Kammarms und seine festen Gegenelektroden verschiedene, nichtlineare Kapazitäts-

funktionen. Die Messgröße  $x$  bewirkt eine gegenseitige Änderung der beiden Kapazitäten, während andere Einflussgrößen (z. B. Feuchte  $h$ , Temperatur  $\vartheta$ ) gleichsinnig auf beide Kapazitäten einwirken. Für die zwei Kapazitäten einer Elementarzelle gilt

$$C_1(x) = \frac{\varepsilon ab}{d-x} = C_1 + \Delta C_1; \quad C_2(x) = \frac{\varepsilon ab}{d+x} = C_2 - \Delta C_2.$$

Das Differenzsignal  $\Delta C(x) = \Delta C_1 - (-\Delta C_2)$  wird gemessen:

$$\Delta C(x) = \frac{\varepsilon ab}{d-x} - \frac{\varepsilon ab}{d+x} = C_0 \cdot \left( \frac{1}{1-\frac{x}{d}} - \frac{1}{1+\frac{x}{d}} \right),$$

wobei  $C_0 = \frac{\varepsilon ab}{d}$ .

Eine Reihenentwicklung liefert

$$\Delta C(x) = C_0 \left( 1 + \frac{x}{d} + \left(\frac{x}{d}\right)^2 - \dots - \left( 1 - \frac{x}{d} + \left(\frac{x}{d}\right)^2 - \dots \right) \right).$$

Für kleine  $x$  kann die Reihe nach dem linearen Glied abgebrochen werden:

$$\Delta C(x) \cong C_0 \left( 1 + \frac{x}{d} - \left( 1 - \frac{x}{d} \right) \right) = C_0 \left( \frac{2x}{d} \right).$$

Das Differenzprinzip bewirkt also, dass die Empfindlichkeit gegenüber der Messgröße  $x$  verdoppelt wird. Es bewirkt außerdem eine Linearisierung des Ausgangssignals sowie eine Unterdrückung anderer Einflussgrößen. Der Effekt wird deutlich, wenn die Ausgangssignale beider Kapazitäten in eine Taylorsche Reihe als Funktion der beiden Veränderlichen ( $x$ ,  $h$ ) entwickelt werden:

$$C(x_0 \pm x, h_0 \pm h) = C(x_0, h_0) + \left( \pm \frac{\delta C(x_0, h_0)}{\delta x} \cdot x + \frac{\delta C(x_0, h_0)}{\delta h} \cdot h \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\delta^2 C(x_0, h_0)}{\delta x^2} \cdot x^2 \pm 2 \frac{\delta^2 C(x_0, h_0)}{\delta x \cdot \delta h} \cdot x \cdot h + \frac{\delta^2 C(x_0, h_0)}{\delta h^2} \cdot h^2 \right).$$

Für das Differenzsignal  $\Delta C$  ergibt sich

$$\Delta C = C(+x, h) - C(-x, h) = 2 \left( \frac{\delta C(x_0, h_0)}{\delta x} \cdot x + \frac{\delta^2 C(x_0, h_0)}{\delta x \cdot \delta h} \cdot x \cdot h \right).$$

Das lineare Glied der Einflussgröße  $h$  und die beiden rein quadratischen Glieder haben keine Auswirkung auf das Differenzsignal  $\Delta C$ , es verbleibt nur die Auswirkung des gemischt quadratischen Gliedes.

In Bild 8.8 aus dem Buch wird gezeigt, dass die Ausgangskennlinie eines mikromechanischen Aktors im Differenzialkondensatorbetrieb durch die Polarisationsspannung linearisiert wird. Im Bild 8.9 vom Buch ist für einen mikromechanischen Sensor im Differenzialkondensatorbetrieb die Verdopplung der Empfindlichkeit dargestellt. Das Ausgangssignal des Sensors wird durch Differenzbildung der kapazitiven Umladeströme aus den Messkapazitäten  $C_1$ ,  $C_2$  und nachfolgende Strom-Spannungswandlung erhalten.

Differenzialkondensatoren werden auch für Sensoren im closed-loop-Betrieb angewendet, um die Kapazität zu messen und gleichzeitig elektrisch Kompensationskräfte zu erzeugen.

### Aufgabe 7.7

- a) Die Grenzbeschleunigung  $a_G$  muss eine Auslenkung der Masse von  $1 \mu\text{m}$  erzeugen, d. h. die Beschleunigungskraft  $F_a$  muss die Rückstellkraft der Federn bei einer Auslenkung von  $1 \mu\text{m}$  kompensieren:

$$F_a = F_F \quad \text{mit} \quad F_a = m \cdot a \quad \text{und} \quad F_F = c_{\text{ges}} \cdot x. \quad \text{Daraus folgt}$$

$$a_G = \frac{c_{\text{ges}} \cdot x}{m} = \frac{2c_S \cdot x}{\rho h d^2} = \frac{2Ehb^3}{l^3 \rho h d^2} = \frac{2Eb^3}{l^3 \rho d^2}. \text{ Die Federsteifigkeit } c_{\text{ges}} \text{ ergibt sich dabei aus der}$$

Parallelschaltung zweier S-Federn, deren Federsteifigkeit  $c_S$  gemäß Gleichung 6.29 aus dem Buch berechnet wird.

Mit den angegebenen Zahlenwerten ergibt sich: Masse  $m = 92 \cdot 10^{-11}$  kg, Federsteifigkeit  $c_{\text{ges}} = 50 \cdot 10^{-3}$  N/m,  $a_G \geq 54,4$  m/s<sup>2</sup> ( $\cong 5,54 \cdot g$ ).

- b) Bei  $a_G = 54,4$  m/s<sup>2</sup> ist die Kontaktkraft  $F_K = 0$ .
- c) Die Einbaulage entscheidet darüber, ob und wie das Eigengewicht der Masse ( $G = mg = 9 \cdot 10^{-9}$  N) in der Berechnung von  $a_G$  berücksichtigt werden muss:  $a_{G\text{max}} = 64$  m/s<sup>2</sup>,  $a_{G\text{min}} = 44$  m/s<sup>2</sup>.
- d) Um eine Kontaktkraft  $F_K \geq 1$  μN zu erzeugen, ist eine Beschleunigung von  $a = \frac{F_{\text{Schließ}} + F_K}{m}$  nötig, wobei  $F_{\text{Schließ}} = c_{\text{ges}} \cdot x = 50 \cdot 10^{-9}$  N ist.

Mit den angegebenen Zahlenwerten wird  $a = 1141$  m/s<sup>2</sup>  $\cong 116$  g.

- e) Gemäß Gleichung 7.57 aus dem Buch ist  $F_{\text{el}} = \frac{U^2}{2} \frac{dC(x)}{dx} = \frac{U^2}{2} \frac{2n\epsilon t}{d}$ .

Die Spannung muss so groß sein, dass eine Auslenkung von  $x = 1$  μm erzeugt wird. Dafür ist eine Kraft von  $F_{\text{el}} = F_{\text{Schließ}} = c_{\text{ges}} \cdot x = 50 \cdot 10^{-9}$  N nötig. Mit Anzahl der Kammarme  $n = 8$ ,

Elektrodenabstand  $d = 1$  μm, Strukturtiefe  $t = 10$  μm wird  $U = \sqrt{\frac{c_{\text{ges}} x d}{n \epsilon t}} = 8,4$  V.

- f) Soll beim Selbsttest eine Kontaktkraft von  $F_K \geq 1$  μN erzeugt werden, erhöht sich die dafür nötige Spannung auf  $U_{\text{Selbsttest}} = 38,5$  V.

### Aufgabe 7.8

Der gesuchte Zusammenhang zwischen dem Auslenkwinkel  $\varphi$  eines 1D-Schwenkspiegels und der elektrischen Spannung  $U$  an den Elektrodenflächen kann aus dem Momentengleichgewicht

$$M_{\text{mech}} = c_\varphi \cdot \varphi = M_{\text{el}} \text{ ermittelt werden: } \varphi = \frac{M_{\text{el}}}{c_\varphi}.$$

Die Federsteifigkeit der Torsionsfeder ist  $c_\varphi = \frac{2 \cdot I_t \cdot G}{L}$ , wobei  $I_t$  das Torsions-Flächenträgheits-

moment und  $G$  der Schubmodul sind. Für einen rechteckförmigen Querschnitt  $w \times h$  der Torsionsfeder ist  $I_t = w \cdot h^3 \cdot k_1$ . Der Faktor  $k_1$  kann in Abhängigkeit vom  $w/h$ -Verhältnis Werte von  $k_1 = 0,140 \dots 0,333$  annehmen.

Für trapezförmige Federquerschnitte (nasschemisches Ätzen) würde sich ein komplizierterer Ausdruck für das Torsions-Flächenträgheitsmoment ergeben. Der Unterschied in  $I_t$  ist, variiert man z. B. bei fester Dicke  $h$  die Breite  $w$ , relativ gering, so dass es i. allg. genügt, den Rechteckquerschnitt zu betrachten.

Das elektrische Moment wird nachfolgend für den im Bild dargestellten Fall berechnet, dass nur die Elektrode unter der rechten Seite der Spiegelpatte mit einer Spannung  $U$  angesteuert wird.

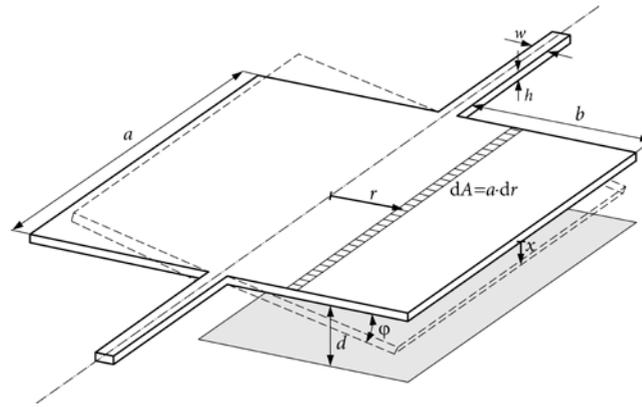


Abbildung 12. 1D torsional mirror

Für die elektrostatische Kraftwirkung auf die bewegliche Spiegelplatte gilt

$$F_{\text{el}} = \frac{dW_{\text{el}}}{dx} = \frac{U^2}{2} \cdot \frac{dC}{dx}.$$

Die Kapazitätsfunktion  $C(x)$  für die rechte Seite des Plattenkondensators ist  $C(x) = \varepsilon \frac{a \cdot b}{d - x}$ , d. h.

$$\frac{dC}{dx} = \varepsilon \frac{a \cdot b}{(d - x)^2}.$$

**Anmerkung:** Die Kraft  $F_{\text{el}}$  ist bestrebt, die Kapazität zu vergrößern, d. h. den Plattenabstand  $d$  zu verringern. Weil die Richtung der auf die Elektroden ausgeübten elektrostatischen Kraft in Richtung der Abstandsverringerng weist, ist  $-dd = dx$  und  $dC/dx = -dC/dd$ .

Wenn die Spiegelplatte infolge der Krafteinwirkung ausgelenkt wird ( $\varphi > 0$ ), verringert sich der aktuelle Abstand zwischen beweglicher Spiegelplatte und Grundelektrode in Abhängigkeit vom Abstand  $r$  zur Drehachse um  $x = r \cdot \tan\varphi$  (Je nachdem, ob als Bezugsbasis die feste Grundelektrode oder die bewegliche Spiegelelektrode betrachtet wird, kann statt  $x = r \cdot \tan\varphi$  auch  $x = r \cdot \sin\varphi$  geschrieben werden. Weil für die hier betrachteten Winkel  $\varphi \leq 10^\circ$  mit genügender Genauigkeit  $\sin\varphi \cong \tan\varphi$  gilt, ist dieser Unterschied unkritisch).

Das auf die rechte Seite der Spiegelplatte ausgeübte elektrische Moment  $M_{\text{el}}$  ergibt sich aus der Summierung aller Teilmomente  $dM_{\text{el}}$ , die auf schmale Streifen mit der Fläche  $dA = a \cdot dr$  ausgeübt werden und deren Abstand zur Grundelektrode jeweils  $d - x = d - r \cdot \tan\varphi$  ist.

Für jedes Teilmoment gilt  $dM_{\text{el}} = dF_{\text{el}} \cdot r$ .

Die Summierung erfolgt in den Grenzen  $r = 0 \dots b$ .

$$\text{Mit } dF_{\text{el}} = \frac{U^2}{2} \cdot \varepsilon \frac{a \cdot dr}{(d - x)^2} = \frac{U^2}{2} \cdot \varepsilon \frac{a \cdot dr}{(d - r \cdot \tan\varphi)^2}$$

$$\text{wird } M_{\text{el}} = \int_{r=0}^{r=b} dM_{\text{el}} = \frac{U^2 \cdot \varepsilon \cdot a}{2} \int_{r=0}^{r=b} \frac{r \cdot dr}{(d - r \cdot \tan\varphi)^2}.$$

Mit der Substitution  $z = d - r \cdot \tan\varphi$  wird  $dr = -dz/\tan\varphi$  und damit weiter

$$M_{\text{el}} = \frac{U^2 \cdot \varepsilon \cdot a}{2} \int \frac{d - z}{(-z^2 \cdot \tan^2\varphi)} dz = \frac{U^2 \cdot \varepsilon \cdot a}{2 \cdot \tan^2\varphi} \int \left( \frac{1}{z} - \frac{d}{z^2} \right) dz.$$

$$M_{\text{el}} = \frac{U^2 \cdot \varepsilon \cdot a}{2 \cdot \tan^2\varphi} \cdot \left( \ln z + \frac{d}{z} \right) = \frac{U^2 \cdot \varepsilon \cdot a}{2 \cdot \tan^2\varphi} \cdot \left[ \ln(d - r \cdot \tan\varphi) + \frac{d}{d - r \cdot \tan\varphi} \right]_0^b$$

$$M_{\text{el}} = \frac{U^2 \cdot \varepsilon \cdot a}{2 \cdot \tan^2\varphi} \cdot \left[ \ln\left(1 - \frac{b}{d} \cdot \tan\varphi\right) + \frac{b \cdot \tan\varphi}{d - b \cdot \tan\varphi} \right].$$

Mit  $A = \frac{b \cdot \tan\varphi}{d}$  wird

$$M_{el} = \frac{U^2 \cdot \varepsilon \cdot a}{2 \cdot \tan^2\varphi} \cdot \left[ \ln(1-A) + \frac{A}{1-A} \right].$$

**Anmerkung:** Bei statischer Auslenkung muss wegen des Pull-in-Effektes  $b \cdot \tan\varphi < d/3$  bleiben, deshalb liegt  $A$  im Bereich  $A = 0 \dots 0,333$ . Bei resonantem Betrieb spielt der Pull-in-Effekt dagegen keine Rolle. Hier ist allerdings die Beziehung  $\varphi_{res} \cong Q \cdot \varphi_{stat}$  zu beachten.

Es ergibt sich schließlich

$$\varphi = \frac{M_{el}}{c_\varphi} = \frac{U^2 \cdot \varepsilon \cdot a}{c_\varphi \cdot 2 \cdot \tan^2\varphi} \cdot \left[ \ln(1-A) + \frac{A}{1-A} \right] = \frac{U^2 \cdot \varepsilon \cdot a \cdot L}{4 \cdot w \cdot h^3 k_1 \cdot G \cdot \tan^2\varphi} \cdot \left[ \ln(1-A) + \frac{A}{1-A} \right].$$

Die Angabe einer Winkel-Spannungs-Beziehung  $\varphi = f(U)$  ist nicht trivial, weil für eine gegebene Spannung  $U$  mehrere Gleichgewichtszustände existieren. Umgekehrt ist es aber eindeutig möglich, für einen gegebenen Auslenkwinkel  $\varphi$  die erforderliche Spannung  $U$  zu ermitteln:

Die Spannungs-Winkel-Beziehung  $U(\varphi)$  lautet

$$U(\varphi) = \sqrt{\frac{4 \cdot w \cdot h^3 k_1 \cdot G \cdot \varphi \cdot \tan^2\varphi}{\varepsilon \cdot a \cdot L \cdot \left[ \ln(1-A) + \frac{A}{1-A} \right]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot I_t \cdot G \cdot \varphi \cdot \tan^2\varphi}{\varepsilon \cdot a \cdot L \cdot \left[ \ln(1-A) + \frac{A}{1-A} \right]}} = \sqrt{\frac{2 \cdot c_\varphi \cdot \varphi \cdot \tan^2\varphi}{\varepsilon \cdot a \cdot \left[ \ln(1-A) + \frac{A}{1-A} \right]}}.$$

Für eine quadratische Spiegelplatte (Spiegellänge  $a = 2 \cdot b$ ) wird

$$U(\varphi) = \sqrt{\frac{2 \cdot w \cdot h^3 k_1 \cdot G \cdot \varphi \cdot \tan^2\varphi}{\varepsilon \cdot b \cdot L \cdot \left[ \ln(1-A) + \frac{A}{1-A} \right]}} = \sqrt{\frac{2 \cdot I_t \cdot G \cdot \varphi \cdot \tan^2\varphi}{\varepsilon \cdot b \cdot L \cdot \left[ \ln(1-A) + \frac{A}{1-A} \right]}} = \sqrt{\frac{c_\varphi \cdot \varphi \cdot \tan^2\varphi}{\varepsilon \cdot b \cdot \left[ \ln(1-A) + \frac{A}{1-A} \right]}}.$$

### Beispiel: $\varphi(U)$ -Kennlinie analytisch berechnet mit MathCad

$a = 4$  mm,  $b = 2$  mm, Federlänge  $L = 1,9$  mm, Federdicke  $h = 20$   $\mu$ m, Federbreite  $w = 40$   $\mu$ m, Elektrodengrundabstand  $d = 280$   $\mu$ m, Ansteuerspannung  $U = 0 \dots 550$  V.

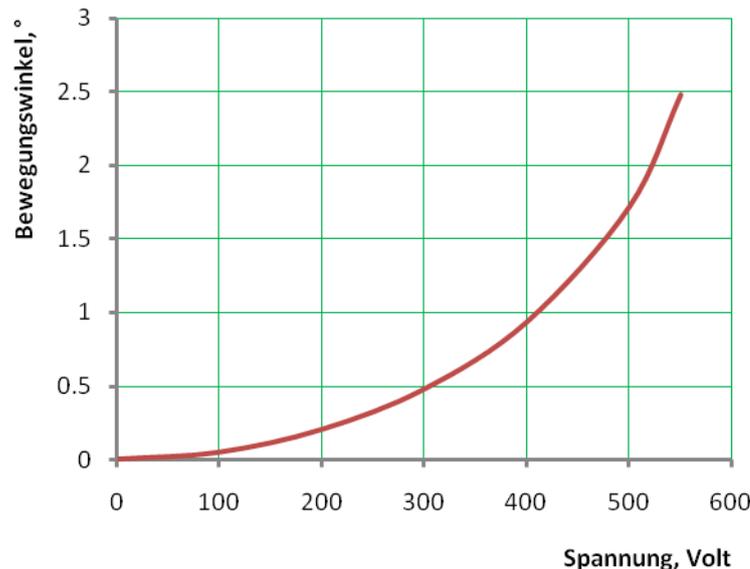


Abbildung 13.  $\varphi(V)$ -Kennlinie

Die Funktion  $M_{el} = f(\varphi)$  ist für  $\varphi = 0$  nicht definiert. Das bei  $\varphi = 0$  wirksame Moment kann aus der Kraftwirkung auf die nicht ausgelenkte Spiegelplatte ( $\varphi = 0$ ,  $x = 0$ ) ermittelt werden, für

die  $F_{\text{el}} = \frac{dW_{\text{el}}}{dx} = \frac{U^2}{2} \cdot \frac{dC}{dx} = \frac{U^2}{2} \cdot \varepsilon \frac{a \cdot b}{d^2}$  gilt. Diese Kraft greift im Schwerpunkt der rechten Spiegelplatte, d. h. im Abstand  $b/2$  zur Drehachse an:

$$M_{\text{el}} = F_{\text{el}} \cdot \frac{b}{2} = \frac{U^2}{2} \cdot \varepsilon \frac{a \cdot b}{d^2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{U^2 \cdot \varepsilon \cdot a \cdot b^2}{4 \cdot d^2}.$$

Für eine quadratische Spiegelplatte  $a = 2 \cdot b$  wird  $M_{\text{el}} = \frac{U^2 \cdot \varepsilon \cdot b^3}{2 \cdot d^2}$ .

### Aufgabe 7.9

- a) Der dargestellte Rahmen der Einflugöffnung wird mit einem u-förmigen, zum Rahmen deckungsgleichen „Lichtleiter“ aus PMMA so ergänzt, dass seine Öffnung zum Schwenkspiegel zeigt. Der Laserstrahl wird in den u-förmigen, lichtleitenden PMMA-Rahmen eingekoppelt und zu einem Fotoempfänger geführt, der an der Stirnseite des PMMA-Rahmens angeordnet ist. Eine Unterbrechung des vom Laserstrahl erzeugten Lichtvorhanges durch das Flugobjekt an beliebiger Stelle führt zu einer Unterbrechung des Lichtsignals am Fotoempfänger.

Damit der Laserstrahl das Flugobjekt wenigstens einmal trifft, muss die Abtastfrequenz

$$\text{mindestens } f_{\text{Abtast}} \geq \frac{1}{2\Delta t} \quad \text{mit } \Delta t = \frac{l}{v} = \frac{5 \text{ cm}}{50 \text{ km/h}} = 3,6 \text{ ms sein.}$$

Es ergibt sich  $f_{\text{Abtast}} \geq 140 \text{ Hz}$ .

Zur Erhöhung der Abtastsicherheit wird als Eigenfrequenz des resonant betriebenen mikro-mechanischen Schwenkspiegels  $f_e \cong 300 \text{ Hz}$  gewählt.

- b) Der Abstand zwischen Spiegel und Einflugöffnung muss

$$L = \frac{25 \text{ cm}}{\tan \alpha_{\text{opt}}} = \frac{25 \text{ cm}}{\tan(2 \alpha_{\text{mech}})} = \frac{25 \text{ cm}}{\tan 25^\circ} = 53,6 \text{ cm sein.}$$

- c) Die Kantenlänge  $2 \cdot b$  des quadratischen Spiegels muss größer sein als der Durchmesser des Laserstrahles, z. B.  $A_{\text{Spiegel}} = 4 \times 4 \text{ mm}^2$  (gewählt).  
 d) Die Mindestdicke  $D$  des Spiegelwafers ergibt sich aus der Summe von Elektrodenrundabstand und Spiegeldicke:  $D = d + h$ .

Der Elektrodenrundabstand  $d$  muss wenigstens so groß sein, dass die voll ausgelenkte Spiegelplatte nicht an der Gegenelektrode anschlägt:  $d > b \cdot \tan \alpha_{\text{mech}}$ . Mit  $b = 2 \text{ mm}$  und  $\alpha_{\text{mech}} = 12,5^\circ$  wird  $d > 443 \mu\text{m}$ . Gewählt:  $d = 450 \mu\text{m}$ . Die Spiegeldicke  $h$  ergibt sich aus der Lösung e).

- e) Aus der Gleichung für die Eigenfrequenz des Schwenkspiegels

$$f_e = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c_\varphi}{J}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot I_t}{l \cdot J}}$$

ergibt sich für die Länge  $l$  einer Torsionsfeder

$$l = \frac{2 \cdot G \cdot I_t}{4 \cdot \pi^2 \cdot J \cdot f_e^2}.$$

Setzt man in diese Gleichung die jeweiligen Beziehungen für  $I_t$  und  $J$  ein, ergibt sich mit

$$I_t = w \cdot h^3 \cdot k_1, \quad J = \frac{m}{12} (h^2 + 4 \cdot b^2) = \rho \cdot 4 \cdot b^2 \cdot h (h^2 + 4 \cdot b^2), \quad w/h = 2, \quad k_1(w/h = 2) = 0,229$$

sowie mit  $4 \cdot b^2 \gg h^2$  der Ausdruck

$$l = 2,177 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{G}{\rho} \cdot \frac{w^3}{f_e^2 \cdot b^4}.$$

Dabei sind  $c_\varphi$  die Federsteifigkeit für Torsion,  $J$  das Massenträgheitsmoment,  $2 \cdot b$  die Kantenlänge des Spiegels,  $h$  die Dicke von Spiegel und Torsionsfeder,  $w = 2 \cdot h$  die Breite der

Torsionsfeder,  $G$  der Schubmodul,  $m$  die Spiegelmasse,  $\rho$  die Dichte und  $I_t$  das Torsions-Flächenträgheitsmoment.

Mit den Werten  $G(w/h = 2) = 55 \text{ GPa}$ ,  $b = 2 \text{ mm}$ ,  $\rho = 2330 \text{ kg/m}^3$  und  $f_e = 300 \text{ Hz}$  ergibt sich für die freien Designparameter Federlänge  $l$  und Federbreite  $w$  die Beziehung

$$l/\text{mm} = 35,7 \cdot 10^{-6} \cdot (w/\mu\text{m})^3, \text{ d. h. } l \sim w^3.$$

**Tabelle 4.** Mikrospiegel Design Parameter

$w/\mu\text{m}$	$l/\text{mm}$
20	0,285
30	0,964
34	1,40
36	1,67
38	1,96
40	2,28
60	7,71

Die aus technologischen Gründen favorisierten Werte sind grau markiert. Gewählt wird  $w = 40 \mu\text{m}$ . Damit wird  $h = 20 \mu\text{m}$  und für die Dicke  $D$  des Spiegelwafers (s. Aufgabe d) ergibt sich  $D \geq 470 \mu\text{m}$ .

Aus dem Momentengleichgewicht  $M_{\text{mech}} = M_{\text{el}}$  ergibt sich die Spannung  $U$ , die für eine statische Auslenkung der quadratischen Spiegelplatte um  $\alpha_{\text{stat}} = \alpha_{\text{mech}}$  erforderlich ist, zu

$$U(\alpha) = \frac{2 \cdot w \cdot h^3 k_1 \cdot G \cdot \alpha \cdot \tan^2 \alpha}{\sqrt{\varepsilon \cdot b \cdot l \cdot \left[ \ln(1-A) + \frac{A}{1-A} \right]}} \quad \text{mit } A = \frac{b \cdot \tan \alpha}{d}$$

**Anmerkung:** s. a. Lösung 7.8. Die Bezeichnungen für Auslenkwinkel und Federlänge sind in der Aufgabe 7.9 anders gewählt: Auslenkwinkel  $\alpha$  statt  $\varphi$ , Federlänge  $l$  statt  $L$ .

Wegen  $\alpha_{\text{res}} = Q \cdot \alpha_{\text{stat}}$  und  $Q = 100$  muss die obige Gleichung für einen Winkel von  $\alpha_{\text{stat}} = \alpha_{\text{mech}} = 0,125^\circ$  gelöst werden.

Mit den Werten  $\alpha = 0,125^\circ$ ,  $w = 40 \mu\text{m}$ ,  $h = 20 \mu\text{m}$ ,  $k_1 = 0,229$ ,  $G = 55 \text{ GPa}$ ,  $b = 2 \text{ mm}$ ,  $d = 450 \mu\text{m}$ ,  $L = 2,28 \text{ mm}$ ,  $\varepsilon = 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$  wird

$$U(\varphi_{\text{stat}} = 0,125^\circ) \cong 208 \text{ V}.$$

Bezüglich des Elektrodengrundabstandes sind die Unterschiede zwischen statischem und dynamischem Betrieb des mikromechanischen Schwenkspiegels zu beachten (s. a. Aufgabe 7.8): Bei statischer Auslenkung muss wegen des Pull-in-Effektes  $b \cdot \tan \alpha < d/3$  bleiben, deshalb gilt  $A \leq 0,333$ .

Bei resonantem Betrieb des Spiegels spielt der Pull-in-Effekt dagegen keine Rolle. Hier nimmt  $A$  typischerweise sehr kleine Werte an, allerdings ist für den Elektrodengrundabstand  $d$  die Beziehung  $\varphi_{\text{res}} \cong Q \cdot \varphi_{\text{stat}}$  zu beachten.

Mit den berechneten bzw. gewählten Werten für  $b$ ,  $l$ ,  $h$ ,  $w$ ,  $U$  werden die Forderungen bezüglich Eigenfrequenz und Auslenkwinkel eingehalten.

- f) Die Geschwindigkeit des Flugobjektes bestimmt entsprechend Lösung a) die benötigte Mindest-Abtastfrequenz und damit auch die nötige Eigenfrequenz des Spiegels.
- g) Wenn außer dem Durchflug auch die Flugrichtung detektiert werden soll, könnten zwei der im Bild 7.27 dargestellten Einflugöffnungen hintereinander angeordnet werden.

**Aufgabe 7.10**

Die Haltekraft  $F$  ergibt sich aus der vom Antrieb erzeugten elektrostatischen Kraft  $F_{\text{el}}$ , vermindert um die rücktreibende Kraft  $F_{\text{F}}$  der Federn:

$$F = F_{\text{el}} - F_{\text{F}}.$$

Mit den gegebenen Werten für die Anzahl der Kammarne  $n = 40$ , wirksame Länge der Kondensatorplatten  $L = 200 \mu\text{m}$ , Dicke des Wafers sowie Breite der Platten  $h = 50 \mu\text{m}$ , Plattenabstand in Ruhelage  $d_0 = 9 \mu\text{m}$ , Verfahrweg bis zum Anschlag  $u = 7 \mu\text{m}$ , Betriebsspannung  $U_{\text{B}} = 50 \text{V}$ , Federsteifigkeit einer Feder  $c = 18 \text{N/m}$  sowie  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{As/Vm}$  erhält man folgende Gleichungen und Zahlenwerte:

$$\text{Elektrostatische Kraft (Plattenkondensator)} \quad F_{\text{el}} = \frac{\epsilon_0 A}{2d^2} \cdot U_{\text{B}}^2.$$

Dabei ist die wirksame Kondensatorfläche  $A = n \cdot L \cdot h = 4 \cdot 10^{-7} \text{m}^2$  und der Plattenabstand in der Endlage  $d = d_0 - u = 2 \cdot 10^{-6} \text{m}$ .

Damit wird  $F_{\text{el}} = 1,48 \text{mN}$ . Die rücktreibende Kraft beider Federn ist  $F_{\text{F}} = 2 \cdot c \cdot u = 0,25 \text{mN}$ .

Die Haltekraft beträgt also  $F = 1,23 \text{mN}$ .

**Aufgabe 7.11**

- a) Die Masse ist über Balkenfedern aufgehängt, wobei jeweils 3 Balken mit der Steifigkeit  $c$  parallel und in dieser Anordnung viermal paarweise in Reihe angeordnet sind. Die Gesamtsteifigkeit ergibt sich deshalb wie folgt:

$$\frac{1}{c_{1/4}} = \frac{1}{3c} + \frac{1}{3c}; \quad c_{1/4} = \frac{3}{2}c$$

$$c_{\text{ges}} = 4 \frac{3}{2}c = 6c$$

Jeweils eine Balkenfeder wird s-förmig gebogen. Aus der Biegelinie kann für die Steifigkeit eines Balkenelementes folgende Gleichung abgeleitet werden:

$$c = \frac{12 E_x I_{yy}}{l^3} = E_x h \left( \frac{b}{l} \right)^3$$

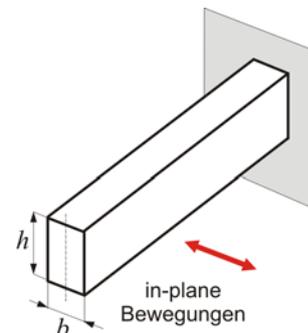


Abbildung 14. In-plane Bewegung des Cantilever

Aus der Gleichung für die Eigenfrequenz der Struktur

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c_{\text{ges}}}{m_1 + m_2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{6 E_x h b^3}{l^3 (m_1 + m_2)}}$$

ergibt sich nach Umstellen die erforderliche Balkenlänge zu

$$l = \sqrt[3]{\frac{3 E_x h b^3}{2 \pi^2 f_0^2 (m_1 + m_2)}}. \quad \text{Zahlenwert: } l = 259,4 \mu\text{m}.$$

- b) Aus  $W_{\text{el}} = \frac{1}{2} C U^2$  und  $C = \epsilon_0 \frac{(b + q_x) h}{d}$  folgt für die elektrostatische Kraft

$$F_{\text{el}} = \frac{dW_{\text{el}}}{dq_x} = \frac{d}{dq_x} \left( \frac{\varepsilon_0 U^2 h (b + q_x)}{2d} \right) = \frac{\varepsilon_0 U^2 h}{2d}.$$

Jeder Arm (Zinken) des Antriebskamms an der seismischen Masse hat 2 Elektrodenspalte. Die Gesamtkraft ergibt sich daher durch Multiplikation mit  $2n$ . In eine Richtung wirken 2 Antriebskämme mit jeweils 30 Zinken.

Die mechanische Federkraft beträgt  $F_{\text{Feder}} = 6c q_x$ . Aus dem Kräftegleichgewicht kann die statische Auslenkung abgeleitet werden:

$$F_{\text{Feder}} = 2 \cdot 2n F_{\text{el}}; \quad 6c q_x = 4n \frac{\varepsilon_0 U^2 h}{2d}; \quad q_x = n \frac{\varepsilon_0 U^2 h}{3dc}.$$

Die statische Auslenkung bei 5 Volt beträgt 0,73 nm.

- c) Bei schwacher Dämpfung vergrößert sich die Amplitude der Schwingung in Resonanzfall um den Faktor der Resonanzüberhöhung (Güte). Mikromechanische Strukturen werden vorwiegend durch das umgebende Gas gedämpft. Über die druckabhängige dynamische Viskosität kann die Dämpfung der Struktur beeinflusst werden. Wird im Sensorgehäuse der Druck verringert, kann damit die mechanische Güte erhöht werden.
- d)  $F_C = 2m_2 \Omega v$ , wobei  $v = \dot{q}_x = \hat{q}_x \omega_{01} \cos(\omega_{01} t)$

$$c_2 = \omega_{02}^2 m_2$$

$$q_y = \frac{F_C}{c_2} = \frac{m_2 \Omega \hat{q}_x \omega_{01} \cos(\omega_{01} t)}{\omega_{02}^2 m_2}$$

mit  $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$  wird  $q_y = \frac{\Omega \hat{q}_x \cos(\omega_0 t)}{\omega_0}$

$$q_y(nT) = \frac{\Omega \hat{q}_x}{\omega_0}.$$

Unter Berücksichtigung der Resonanzüberhöhung von 1000 beträgt die Amplitude der Detektionsbewegung im eingeschwungenen Zustand bei 200 °/s ca. 1,11 µm.

- e) Die beiden Kapazitäten werden differenziell gemessen (s. a. Lösung 7.6). Die Kapazität berechnet sich aus

$$C = \frac{\varepsilon_0 b_{\text{ü}} h}{d - q_y} - \frac{\varepsilon_0 b_{\text{ü}} h}{d + q_y} = C_0 \left( \frac{1}{1 - \frac{q_y}{d}} - \frac{1}{1 + \frac{q_y}{d}} \right), \quad \text{wobei } C_0 = \frac{\varepsilon_0 b_{\text{ü}} h}{d}$$

$$= C_0 \left( 1 + \frac{q_y}{d} + \left( \frac{q_y}{d} \right)^2 - \dots - \left( 1 - \frac{q_y}{d} + \left( \frac{q_y}{d} \right)^2 - \dots \right) \right) \quad \text{ist.}$$

Für kleine  $q_y$  ist

$$C = C_0 \left( 2 \frac{q_y}{d} \right); \quad S = \frac{dC}{dq_y} = 2 \frac{C_0}{d}.$$

Für  $n = 20$  Zinken ergibt sich eine Kapazitätsänderung von 0,57 pF/µm. Unter Berücksichtigung des Ergebnisses aus Aufgabe d) ergeben sich daraus 3,16 fF/°/s.

- f) Mit einer Gleichspannung (Polarisationsspannung  $U_{\text{pol}}$ ) über den Detektionselektroden kann die Steifigkeit des Sekundär-Schwingers beeinflusst werden. Für kleine Auslenkungen ergibt sich die elektrostatische Kraft

$$F_{\text{el}} = \frac{U_{\text{pol}}^2}{2} \varepsilon \cdot A \cdot \left( \frac{1}{(d - q_y)^2} - \frac{1}{(d + q_y)^2} \right).$$

Daraus ergibt sich die Federsteifigkeit zu

$$c_{\text{diff}} = \frac{dF_{\text{res}}}{dq_y} = c_{\text{mech}} - \frac{U_{\text{pol}}^2}{2} \varepsilon \cdot A \left( \frac{2}{(d - q_y)^3} + \frac{2}{(d + q_y)^3} \right) \approx c_{\text{mech}} \frac{2U_{\text{pol}}^2}{d^3} \varepsilon \cdot A$$

Die Gleichung zeigt, dass die resultierende Steifigkeit mittels einer Polarisationsspannung verringert werden kann. Die Eigenfrequenz der Sekundärschwingung muss also etwas höher ausgelegt sein als die der Primärschwingung. Mit Hilfe einer Polarisationsspannung kann diese Frequenz anschließend angepasst werden.

### Aufgabe 7.12

- a) Das Drehmoment ergibt sich durch Summation aller Teilmomente  $M_k$ , die durch elektrodynamische Kraftwirkung auf die einzelnen Leiter  $k$  ( $k = 1 \dots n$ ) erzeugt werden. Für die Teilmomente gilt

$$M_k = F_k \cdot r_k = I \cdot B_k \cdot l_k \cdot r_k.$$

Dabei geben die  $r_k$  den Abstand eines Leiters von der Drehachse des beweglichen Elementes an.  $B_k$  ist der Wert der Flussdichte und  $l_k$  die Leiterlänge, jeweils bezogen auf die  $x$ -Koordinate von  $k$  (s. Bild). Längs eines Leiters und über die Leiterbreite wird die Flussdichte als konstant angenommen. Bei symmetrischer Flussdichteverteilung und symmetrischer Ausrichtung des beweglichen Elementes im Luftspalt ist das Gesamtmoment

$$M_{\text{ges}} = 2 \cdot \sum_{k=1}^n M_k,$$

wobei  $n$  die Anzahl der Leiterschleifen der Planarspule ist.

Aus der Draufsicht (s. Bild) auf die Spiegelplatte und die Planarspule können folgende Werte abgeleitet werden:

- Leiterbreite  $b \leq 50 \mu\text{m}$ , weil: Breite der Torsionsbänder =  $50 \mu\text{m}$ .
- Anzahl der Leiterschleifen:  $n = 2 \text{ mm}/b$
- Leiterhöhe  $h = 2 \mu\text{m}$
- Ohmscher Widerstand der Planarspule  $R = \rho \cdot \frac{l_{\text{ges}}}{A} = \frac{\rho \cdot n \cdot 2 \cdot (D_m + L_m)}{b \cdot h}$ .

Die Anwendung der Gleichungen für das elektrodynamisch erzeugte Moment auf die vorliegende Situation liefert  $M_{\text{ges}} = 2 \cdot n \cdot I \cdot B \cdot L_m \cdot \frac{D_m}{2} = n \cdot I \cdot B \cdot L_m \cdot D_m$ .

Mit den gegebenen Werten  $L_m = 14 \text{ mm}$ ,  $D_m = 4 \text{ mm}$  folgt, dass für ein gefordertes Moment  $M_{\text{ges}} = 5,6 \cdot 10^{-6} \text{ Nm}$  das Produkt  $n \cdot I = 0,4 \text{ A}$  sein muss.

Bei  $b_{\text{max}} = 50 \mu\text{m}$  (Breite Torsionsband) und  $n \cdot b = 2 \text{ mm}$  ergibt sich die Anzahl der Leiterschleifen zu  $n = 40$ , damit  $I = 10 \text{ mA}$  (Stromdichte  $100 \text{ A/mm}^2$ ).

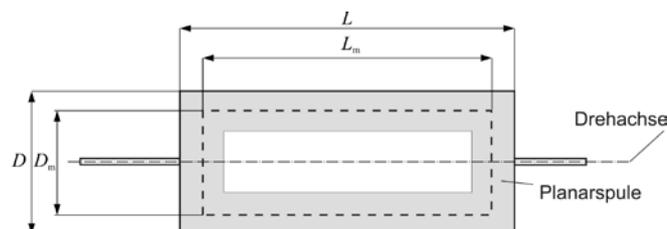


Abbildung 15. Planarspule

- b) Aus  $R = \rho \cdot \frac{l_{\text{ges}}}{A} = \frac{\rho \cdot n \cdot 2 \cdot (D_m + L_m)}{b \cdot h}$  ergibt sich der Ohmsche Widerstand der Planarspule bei  $\rho_{\text{Al}} = 0,028 \text{ } \Omega\text{mm}^2/\text{m}$  zu  $R = 403,2 \text{ } \Omega$ .

Die Ohmsche Verlustleistung ist dann  $P = I^2 \cdot R = 40,32 \text{ mW}$ . Die zu erwartende Temperaturerhöhung ergibt sich aus

$$\Delta T = P \cdot R_{\text{th}} = \frac{I^2 \cdot R}{\alpha_K \cdot A} \text{ mit } A = 2 \cdot D \cdot L = 192 \text{ mm}^2 \text{ und } \alpha_K = 10 \text{ W/m}^2\text{K zu } \Delta T = 21 \text{ K.}$$

- c) Nein. Aus  $\Delta T = P \cdot R_{\text{th}} = \frac{I^2 \cdot R}{\alpha_K \cdot A} = \frac{I^2 \cdot \rho \cdot 2 \cdot n \cdot (D_m + L_m)}{\alpha_K \cdot A \cdot b \cdot h}$  folgt wegen  $b = \frac{2 \text{ mm}}{n}$

$$\Delta T = \frac{I^2 \cdot \rho \cdot 2 \cdot n^2 \cdot (D_m + L_m)}{\alpha_K \cdot A \cdot 2 \text{ mm} \cdot h}.$$

Mit den bekannten Zahlenwerten wird  $\Delta T / \text{K} = 131,25 \cdot (I / \text{A})^2 \cdot n^2$  und wegen  $n \cdot I = 0,4 \text{ A}$  folgt  $\Delta T / \text{K} = 131,25 \cdot 0,16 = 21 \text{ K}$  (s. o.), und zwar unabhängig von der Wahl der Parameter  $I, n$ .

- c) Wenn zwischen den Leiterschleifen der Planarspule jeweils ein Abstand von  $5 \text{ } \mu\text{m}$  nötig ist, werden bei gleicher Anzahl der Leiterschleifen  $n = 40$  die Leiterzüge schmäler als  $b = 50 \text{ } \mu\text{m}$ . Dann steigen  $R$  und damit  $P$  sowie  $\Delta T$  an. Alternativ könnte die Breite  $b = 50 \text{ } \mu\text{m}$  beibehalten und die Anzahl der Leiterschleifen auf ca.  $n = 36$  verringert werden. Dann müsste zur Erzeugung des gleichen Momentes die Stromstärke auf  $I = 11,11 \text{ mA}$  erhöht werden. Der Ohmsche Widerstand würde sich auf  $363 \text{ } \Omega$  verringern. Die Ohmsche Verlustleistung wäre  $P = I^2 \cdot R = 44,8 \text{ mW}$ , d. h.  $\Delta T$  würde ebenfalls ansteigen.

### Aufgabe 7.13

Als exemplarisches Beispiel für beide Akteurprinzipien kann ein Mikrospiegel mit Abstandsvariation betrachtet werden. Nachfolgend sind Vorteile und Nachteile gegenübergestellt:

Tabelle 5.

Mikrospiegel, elektrostatischer Antrieb (s. Tabelle 7.2, Bild 6.18 aus dem Buch)	Mikrospiegel, elektrodynamischer Antrieb (s. Bilder 7.10, 7.11 aus dem Buch)
<p><b>Vorteile:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Kleine Abmessungen, dadurch hohe Eigenfrequenz</li> <li>- Kapazitive Positionserkennung möglich</li> <li>- Spannungsgesteuert</li> </ul> <p><b>Nachteile:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- nur anziehende Kräfte möglich</li> <li>- Dämpfung im Luftspalt stark nichtlinear</li> <li>- Elektrisches Antriebsmoment vom Quadrat der Spannung abhängig. Dessen Funktion sowie deren Inverse sind nicht stetig differenzierbar und haben Unstetigkeitsstellen</li> <li>- Steuerbarkeit abhängig von Spiegelposition</li> <li>- Steuerbarkeit geht im Bereich maximaler Auslenkung verloren</li> </ul>	<p><b>Vorteile:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Dämpfung kann als konstant angenommen werden (kein Spalt)</li> <li>- Kraft im homogenen Magnetfeld proportional zum Strom. Es können anziehende und abstoßende Kräfte erzeugt werden</li> <li>- Das erzeugte Moment hängt nur vom Winkel ab, kann für kleine Auslenkungen als konstant angesehen werden</li> <li>- Magnetisches Antriebsmoment kann durch Änderung der magnetischen Flussdichte von außen beeinflusst werden</li> </ul> <p><b>Nachteile:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Große Abmessungen bedingt durch Planarspule auf bewegter Fläche</li> <li>- Wärmeabfuhr von Planarspule</li> </ul>

Aus regelungstechnischer Sicht überwiegen die Vorteile des elektrodynamischen Antriebsprinzips. Eine nichtlineare Regelung des elektrostatischen Aktors ist möglich, wenn alle die nichtlinearen Zusammenhänge genau bekannt sind (Dämpfung, Torsionsfeder, Spannungs-Winkel-Kennlinie).

## Lösungen zu den Aufgaben für Kapitel 9: Einfluss technologischer Prozesse auf Mikrosystemeigenschaften

Achtung: Eine gegenüber dem Buch korrigierte Fassung von Kapitel 9  
 finden Sie unter folgendem Link:

[http://www.tu-chemnitz.de/etit/microsys/pub\\_buecher.php](http://www.tu-chemnitz.de/etit/microsys/pub_buecher.php)

### Aufgabe 9.1

Materialparameter: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Elastizitätsmodul</li> <li>• Querkontraktionszahl</li> <li>• Leitfähigkeit des Bulk-Si</li> <li>• Leitfähigkeit des Poly-Si</li> <li>• thermischer Längenausdehnungskoeffizient des Si-Chips</li> <li>• thermischer Längenausdehnungskoeffizient des Glassubstrats</li> </ul>	Prozessparameter: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Orientierung der Ätzmaskenkanten</li> <li>• Waferorientierung</li> <li>• Dotierung des Si-Chips</li> <li>• Poly-Si-Abscheidung</li> <li>• anodisches Bonden Si-Chip/Glassubstrat</li> </ul>
Geometrieparameter: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Dicke der schwingenden Masse</li> <li>• Breite der schwingenden Masse</li> <li>• Länge der schwingenden Masse</li> <li>• Federbreite der schwingenden Masse</li> <li>• Federlänge der schwingenden Masse</li> <li>• Federdicke der schwingenden Masse</li> <li>• Breite, Dicke, Länge der Poly-Si-Beschleunigungssensorstruktur</li> <li>• Chipabmessung</li> </ul>	Prozessparameter: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Ätzzeit</li> <li>• Ätztemperatur</li> <li>• Temperatur beim anodischen Bonden</li> <li>• Temperatur und Dauer der Poly-Si-Abscheidung</li> <li>• Temperatur, Druck und Dauer der Metallisierungsbedampfung</li> </ul>

### Aufgabe 9.2

Die Plattendicke wird gerade dann unkritisch, wenn gemäß Tabelle 9.3 bzw. Gleichung 9.26 aus dem Buch gilt

$$u_{\text{rel}}(FP_{ij}) = u_{\text{rel}}(S_h) = \frac{u(S_h)}{u_{\text{zul}}(S)} = \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,45. \quad (33)$$

Gemäß Tabelle 9.4 bzw. Gl. (9.25) vom Buch ist

$$u(S_h) = -2S \frac{u(h)}{h} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ V / Pa} . \quad (34)$$

Aus den Gln. (33) und (34) ergibt sich

$$u(h) = \frac{u(S_h) \cdot h}{-2S} = \frac{u_{\text{zul}}(S) \cdot h}{-2 \cdot S \cdot \sqrt{n}} = \frac{5,77 \cdot 10^{-8} \cdot 10 \mu\text{m}}{2 \cdot 1,73 \cdot 10^{-6} \cdot 2,236} = 0,075 \mu\text{m}.$$

Wegen  $\pm \Delta h = \pm u(h) \cdot \sqrt{3}$  (Tabelle 9.4 bzw. Gl. (9.13) im Buch) wird  $\Delta h = 0,13 \mu\text{m}$ .

### Aufgabe 9.3

Wenn die relative Sensitivitätsabweichung  $\Delta S_{zul}/S$  mit  $\pm 5\%$  nur noch  $1/2$  der bisher im Beispiel 9.3 zulässigen Abweichung sein darf, verringert sich  $u_{zul}(S)$  gemäß Gl. (9.21) ebenfalls auf  $1/2$ :

$u_{zul}(S) = \frac{\Delta S_{zul}}{3} = \frac{1}{2} \cdot 5,77 \cdot 10^{-8} \text{ V/Pa} = 2,88 \cdot 10^{-8} \text{ V/Pa}$ . Im Unsicherheitsbudget für den Funktionsparameter Sensitivität piezoresistiver Drucksensoren (Tabelle 9.4) ergeben sich dann folgende Änderungen:

Modellparameter $MP_j$	Parameterunsicherheit $u(MP_j)$	Unsicherheitsbeitrag des Parameters $MP_j$ $\frac{\partial FP_i}{\partial MP_j} \cdot u(MP_j) = u(FP_{ij})$	Relative Parameterunsicherheit $ u_{rel}(FP_{ij})  = \frac{ u(FP_{ij}) }{ u_{zul}(FP_i) }$	Klassifizierung nach Tab. 9.3 mit $1/\sqrt{5} = 0,45$
$\pi_{44}$	$\frac{\Delta \pi_{44}}{\sqrt{3}} = \frac{0,05 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 \text{ N}^{-1}}{\sqrt{3}}$ (gleichverteilt, Gl. (9.13))	$S \cdot \frac{u(\pi_{44})}{\pi_{44}} = -9,97 \cdot 10^{-9} \text{ V/Pa}$	0,35	unkritisch
$\nu$	$\frac{\Delta \nu}{\sqrt{3}} = \frac{0,001}{\sqrt{3}}$ (gleichverteilt, Gl. (9.13))	$-S \cdot \frac{u(\nu)}{1-\nu} = 1,07 \cdot 10^{-9} \text{ V/Pa}$	0,037	unkritisch
$b$	$\frac{\Delta b}{\sqrt{3}} = \frac{12 \mu\text{m}}{\sqrt{3}}$ (gleichverteilt, Gl. (9.13))	$S \cdot \frac{2b \cdot u(b)}{b^2 - 3b_w^2} = 3,24 \cdot 10^{-8} \text{ V/Pa}$	1,13	hyperkritisch
$b_w$	$\frac{\Delta b_w}{3} = \frac{1 \mu\text{m}}{3}$ (normalverteilt, $k=3$ )	$-S \cdot \frac{6b_w \cdot u(b_w)}{b^2 - 3b_w^2} = -4,55 \cdot 10^{-9} \text{ V/Pa}$	0,16	unkritisch
$h$	$\frac{\Delta h}{\sqrt{3}} = \frac{0,1 \mu\text{m}}{\sqrt{3}}$ (gleichverteilt, Gl. (9.13))	$-S \cdot \frac{2u(h)}{h} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ V/Pa}$	0,69	kritisch
<b>Relative Gesamtunsicherheit <math>u(S_{rel})</math> (nach Gl. (9.16))</b>			<b>1,38</b>	Entwurf unsicher

Hyperkritisch bzw. kritisch sind die Abweichungen der Plattenbreite  $b$  und der Plattendicke  $h$ . Diese Situation kann durch folgende technologische Maßnahmen verbessert werden:

- Plattenbreite  $b$ : Verwendung von Silizium-Wafern mit geringerer Dickenschwankung (gefordert:  $\Delta b \leq 12 \mu\text{m} \cdot \frac{0,45}{1,13} \leq \pm 4,78 \mu\text{m}$ )
- Plattendicke  $h$ : Verbesserung des Ätzstopfverfahrens (gefordert:  $\Delta h \leq 0,065 \mu\text{m}$ ).

Die Forderung für  $\Delta b$  ist technologisch einfacher zu erfüllen als die Forderung für  $\Delta h$ . Eine Verringerung der Abweichung der Plattenbreite von  $\Delta b = \pm 12 \mu\text{m}$  auf  $\Delta b = \pm 5 \mu\text{m}$  bewirkt eine Verringerung der relativen Parameterunsicherheit  $u_{rel}(S_b)$  von 1,13 auf 0,47. Damit wird die Plattenbreite  $b$  von einem hyperkritischen zu einem kritischen Parameter. Die relative Gesamtunsicherheit  $u_{rel}(S)$  wird bei  $\Delta b = \pm 5 \mu\text{m}$  von  $u_{rel}(S) = 1,38$  auf  $u_{rel}(S) = 0,92$  verringert, d. h. der Entwurf ist sicher.