

Lehrstuhl B für Mechanik

Reibstöße in Mehrkörpersystemen

Michael Beitelschmidt

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen der
Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. U. Lindemann

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. F. Pfeiffer
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. B.-R. Höhn

Die Dissertation wurde am 16.6.1998 bei der Technischen Universität München
eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 26.10.1998
angenommen.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl B für Mechanik an der Technischen Universität München.

Mein ganz besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. h.c. F. Pfeiffer, der es mir ermöglichte, an seinem Institut diese Arbeit zu verfassen. Seine wohlwollende Förderung, die er mir – schon beginnend während meines Studiums – in Forschung, Lehre und bei der technischen Anwendung zuteil werden ließ, hat erheblich zum Gelingen des Forschungsprojekts beigetragen.

Danken möchte ich auch Herrn Prof. Dr. Höhn, der sich bereit erklärte, das zweite Gutachten für die vorliegende Arbeit zu übernehmen.

Ein wesentlicher Faktor, der zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen hat, sind die Kollegen und Mitarbeiter des Lehrstuhls. Hier ist an erster Stelle Dr.-Ing. Ch. Glocker zu nennen, ohne dessen Pionierarbeit auf dem Gebiet der Stöße mit Reibung diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre. Ihm und meinem Zimmerkollegen Markus Wösle danke ich zudem für zahlreiche fruchtbare Diskussionen über Stöße, Reibung und andere unstetige Phänomene.

Eine Forschungsarbeit mit erheblichem experimentellen Anteil ist ohne die hervorragende Arbeit von elektronischer und mechanischer Werkstatt nicht denkbar. Für den Entwurf der gesamten Prüfstandselektronik nach meinen stetig steigenden Wünschen bin ich Herrn Georg Mayr sehr dankbar. Die Umsetzung der mechanischen und elektronischen Komponenten führten in hervorragender Weise die Herren Juri Kriese, Wolfgang Kruppa, Willy Miller und Walter Wöß durch.

Meinen Kollegen Marc Brandl, Marcus Pausch, Martin Schleich, Andreas Stieglmeyr, Florian Wegmann und Peter Wolfsteiner sowie meiner Mutter danke ich für die kritische Durchsicht meines Manuskripts und viele konstruktive Anmerkungen. Zudem bin ich allen dankbar, die mich bei Fragen und Problemen unterstützt haben, aber auch denen, die mich durch ihre Fragen an mich dazu gebracht haben, mein eigenes Wissen immer wieder neu zu überdenken und dabei zu festigen.

Auch zu danken habe ich den Studenten Hannes Hofmann, der im Rahmen einer Semesterarbeit den ersten Entwurf des Prüfstandes entwickelte, Gernot Steger, der in seiner Diplomarbeit Stoßwellen ausführlich untersuchte und Florian Bernecker, der bei der Softwareentwicklung für den Prüfstand mitwirkte und einen Großteil der Versuche gewissenhaft durchgeführt und ausgewertet hat.

Last but not least danke ich meiner Familie, die mich in allen Phasen meiner Arbeit immer wohlwollend unterstützt und gefördert hat.

München, im Juni 1998

Michael Beitelschmidt

Meiner Frau Denise

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Problemstellung	1
1.2	Literaturüberblick	2
1.3	Ziel und Aufbau der Arbeit	6
2	Modellierung von Stößen	8
2.1	Definition eines Stoßes	8
2.2	Hilfsmittel aus der Theorie der Mehrkörpersysteme	9
2.3	Klassifikation von Stößen	12
2.4	Abschätzen von Stoßzeiten	13
2.5	Impulsmodelle für Starrkörper	15
2.6	Zeitlich und örtlich kontinuierliche Starrkörpermodelle	17
2.7	Sonderfall elastische Körper	22
2.8	Berücksichtigung von Festkörperwellen	24
3	Das Stoßgesetz auf Impulsebene	30
3.1	Modellvorstellung zeitdiskreter Stoßgesetze	30
3.2	Elementare Stoßgesetze	31
3.3	Übergang von der kontinuierlichen Zeitentwicklung zum Stoß	32
3.4	Vorüberlegungen zum Energieumsatz	33
3.5	Kompressionsphase	36
3.6	Expansionsphase mit tangentialer Reversibilität	42
3.7	Expansionsphase des reinen Reibstoßes	49
3.8	Klassifikation von impulsmodellierten Stößen	50
4	Sonderfälle und Beispiele	52
4.1	Der zentrale Einfachstoß	52

4.2	Der exzentrische Einfachstoß	61
4.3	Unterschied zwischen einem tangentialplastischem und reinem Reibstoß	71
4.4	Anmerkung zum Energieerhalt	74
4.5	Der Einfluß großer Kräfte	78
5	Konstruktion der Wurfmaschine	85
5.1	Anforderungsprofil	85
5.2	Realisation	93
5.3	Steuerung und Regelung	100
5.4	Geräte zur Messung der Versuche	107
6	Auswertung der Stoßversuche	110
6.1	Auswertemethodik	110
6.2	Zentrale Stöße	116
6.3	Exzentrische Stöße	127
7	Zusammenfassung	131
A	Bildanhang	134
B	Literatur	143

Übersicht der verwendeten Formelzeichen

Indices

Symbol	Bedeutung
A	Beginn des Stoßes
C	Kompressionsphase oder Ende der Kompressionsphase
E	Kompressionsphase oder Ende der Expansionsphase
N	Normalenrichtung
T	Tangentialrichtung

Stoßgesetz

Symbol	Bedeutung
\dot{g}_{NA}	normale Relativgeschwindigkeit vor dem Stoß
\dot{g}_{NC}	dito am Ende der Kompressionsphase
\dot{g}_{NE}	dito am Ende des Stoßes
\dot{g}_{TA}	tangentiale Relativgeschwindigkeit vor dem Stoß
\dot{g}_{TC}	dito am Ende der Kompressionsphase
\dot{g}_{TE}	dito am Ende des Stoßes
\dot{g}_{TEV}	transformierte tangentielle Relativgeschwindigkeit
\dot{g}_{TE0}	Abhebegeschwindigkeit bei „Haften“
\mathbf{A}_{NC}	Normalimpuls in der Kompressionsphase
\mathbf{A}_{NE}	Normalimpuls in der Expansionsphase
\mathbf{A}_{NP}	transformierter Normalimpuls in der Expansionsphase
\mathbf{A}_{TC}	Tangentialimpuls in der Kompressionsphase
\mathbf{A}_{TE}	Tangentialimpuls in der Expansionsphase
\mathbf{A}_{TEV}	transformierter Tangentialimpuls
\mathbf{A}_{TEL}	linker Impulsast im tangentialen Stoßgesetz
\mathbf{A}_{TER}	rechter Impulsast im tangentialen Stoßgesetz
\mathbf{G}	projizierte Massenwirkungsmatrix
\mathbf{G}_{ij}	Blöcke von \mathbf{G} mit $i, j \in \{N, T\}$
$\mathbf{S}^+, \mathbf{S}^-$	Selektionsmatrizen
$\mu, \boldsymbol{\mu}$	Reibkoeffizient, Diagonalmatrix mit den Reibkoeffizienten
$\varepsilon_N, \boldsymbol{\varepsilon}_N$	normale Stoßzahl, Diagonalmatrix mit Stoßzahlen
$\varepsilon_T, \boldsymbol{\varepsilon}_T$	tangentiale Stoßzahl, Diagonalmatrix mit Stoßzahlen

Mehrkörpersysteme und Kinematik

Symbol	Bedeutung
\mathbf{M}	Massenmatrix
\mathbf{q}	Vektor der generalisierten Koordinaten
$\mathbf{h}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$	Vektor aller Kräfte
$\dot{\mathbf{q}}_A$	generalisierte Geschwindigkeiten zu Stoßbeginn
$\dot{\mathbf{q}}_E$	generalisierte Geschwindigkeiten zu Stoßende
\mathbf{W}_N	Jacobimatrix der Normalbindungen
\mathbf{W}_T	Jacobimatrix der Tangentialbindungen
$\mathbf{w}_N, \mathbf{w}_T$	einzelne Zeilen aus \mathbf{W}_N und \mathbf{W}_T
\mathbf{r}_D	minimaler Abstandsvektor
$g_N, \dot{g}_N, \ddot{g}_N$	normaler Relativabstand, -geschwindigkeit, -beschleunigung
$g_T, \dot{g}_T, \ddot{g}_T$	tangentialer Relativabstand, -geschwindigkeit, -beschleunigung
\tilde{w}_N, \bar{w}_N	nichtlineare und zeitabhängige Terme im Normalabstand
\tilde{w}_T, \bar{w}_T	nichtlineare und zeitabhängige Terme im Tangentialabstand
$\boldsymbol{\lambda}_N$	Vektor aller Kontaktzwangskräfte in Normalenrichtung
$\boldsymbol{\lambda}_T$	Vektor aller Kontaktzwangskräfte in Tangentialrichtung

Dimensionslose Stoßgrößen

Symbol	Bedeutung
γ	Tangentialgeschwindigkeit vor dem Stoß
γ_{NC}, γ_{TC}	Normal- und Tangentialgeschwindigkeit Ende Kompressionsphase
γ_{NE}, γ_{TE}	Normal- und Tangentialgeschwindigkeit Ende Expansionsphase
γ_{TE0}	Dimensionslose Abhebegeschwindigkeit bei Haften
$\Lambda_{NC}^*, \Lambda_{TC}^*$	Dimensionslose Impulse in der Kompressionsphase
$\Lambda_{NE}^*, \Lambda_{TE}^*$	Dimensionslose Impulse in der Expansionsphase
Λ_N^*, Λ_T^*	Dimensionslose Gesamtimpulse
Γ	Verhältnis der Elemente G_{TT}/G_{NN}
Γ_{NT}	Verhältnis der Elemente G_{NT}/G_{NN}

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Problemstellung

Ein Ausgangspunkt für diese Arbeit war die Beschäftigung mit Spielzeug und der Wunsch dessen physikalischen Vorgänge richtig beschreiben und vorhersagen zu können. Sogenannte „Flummies“ oder „Superbälle“ zeigen höchst eigenartige Verhaltensweisen, insbesondere wenn sie Stöße mit einer Relativgeschwindigkeit im Kontaktpunkt ausführen. Scheinbar fast ohne Energieverlust springen sie in *unvorhersehbare* Richtungen davon, wobei die Kontaktreibung eine große Rolle spielt. Das Schlüsselerperiment ist der „Wurf unter den Tisch“, bei dem der Ball nach drei Stößen – zwei am Boden und einer an der Tischunterseite – wieder zum Werfer zurückspringt. Man kann zeigen, daß dieser Bewegungsablauf nur möglich ist, wenn bei den Stößen nicht nur in normaler, sondern auch in tangentialer Stoßrichtung Energie beim Stoß gespeichert wird.

Bei der Simulation technischer Mehrkörpersysteme ist es zunehmend wichtig, Kontaktprozesse wie Stoßen und Wiederabheben, sowie die zugehörigen Reibübergänge Haften-Gleiten und umgekehrt zu berücksichtigen. Typische Orte, an denen derartige Phänomene auftreten, sind die Berührstellen spielbehalteter Teile. Die Berechnungsmethode, mit der man das Zeitverhalten derartiger Systeme erfassen kann, ist die numerische Simulation. Die entsprechenden Bewegungsgleichungen werden mit den etablierten Methoden der Mehrkörpersystemdynamik gewonnen. Die Kontakt- und Reibungsphänomene werden durch sogenannte „einseitige Bindungen“ in das Modell eingebracht.

Findet während der zeitlichen Berechnung des Systems an einem Punkt ein Bindungsübergang statt, muß man die möglichen Konsequenzen dieses Übergangs auf alle anderen Kontakte untersuchen.

In dieser Arbeit wird ein mathematischer Formalismus auf der Ebene von Impulsen und Geschwindigkeitsänderungen vorgestellt, mit dem man den Übergang von Separation zu Kontakt mit allen Konsequenzen und Phänomenen erfassen kann. Insbesondere soll er auch das im ersten Absatz beschriebene Phänomen der Speicherung von Energie in tangentialer Richtung möglichst gut beschreiben können.

Für Stöße dieses Typs wird der Begriff *tangentialreversibler* Stoß eingeführt. Der Terminus *reversibel* wird dabei in zweifacher Hinsicht gebraucht: Einerseits für die Umkehrung der tangentialen Relativgeschwindigkeit im Kontakt und andererseits im energetischen Sinne. Ist ein Stoß sowohl normal als auch tangential vollständig reversibel, wird keine Energie dissipiert, und auch ein schiefer, rauher Stoß kann vollständig umkehrbar sein.

Theoretische Ergebnisse bedürfen immer einer Verifikation durch Experimente. Deshalb liegt ein Schwerpunkt dieser Arbeit darauf, die dargestellten theoretischen Ansätze durch Versuche zu untermauern. Es wurde daher eine Stoßmaschine konstruiert, die in dieser Arbeit beschrieben wird. Die Darstellung der Ergebnisse der insgesamt 600 durchgeführten Stoßexperimente mit Körpern verschiedener Geometrie und Materialien nimmt breiten Raum in der Arbeit ein.

Reduziert man das Mehrkörpersystem, dessen Stöße mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Stoßgesetz beschrieben werden sollen, auf einen Ball in der Ebene, so ist man wieder beim Spielzeug angelangt. Im Experiment konnte gezeigt werden, daß mit Hilfe der Theorie das im ersten Absatz kursiv gesetzte Wort „*unvorhersehbare*“ durch „*berechenbare*“ ersetzt werden muß.

Diese Behauptung klingt zunächst anmaßend und sehr deterministisch. Wie bei allen derartigen Dingen kommt es auch hier auf die Anfangsbedingungen an, welche insbesondere beim Wurf eines Balles, ausgeführt von einem Menschen, in erheblichem Maße undeterministisch sind. Somit ist der Charakter des Spielzeugs gerettet.

1.2 Literaturüberblick

1.2.1 Mehrkörpersysteme und Kontaktkinematik

Grundlage für die Stoßbeschreibung ist das Modell des Mehrkörpersystems, in dem die Stöße stattfinden. Über die allgemeine Modellierung solcher Systeme gibt es eine Zahl von Standardwerken. Stellvertretend sollen hier die Bücher von SHABANA [73] und BREMER [12] erwähnt werden, in denen das Aufstellen der Bewegungsgleichungen dargestellt ist. WITTENBURG behandelt darüberhinaus auch Stöße auf Impulsebene [88]. Im Buch von PFEIFFER [59] und besonders im Werk von BREMER und PFEIFFER [13] wird die Modellierung von elastischen Mehrkörpersystemen geschildert. Die Anwendung der Mehrkörpertheorie speziell auf Systeme mit einseitigen Bindungen wird von PFEIFFER und GLOCKER in [61] ausführlich mit vielen technischen Anwendungsbeispielen dargestellt.

Ein wichtiger Aspekt bei der Beschreibung von Kontaktvorgängen ist die kinematische Beschreibung der Relativgeschwindigkeiten, -lagen und -beschleunigungen an den Berührungsstellen der Körper. Für den zweidimensionalen Fall ist dies von GLOCKER [22] hervorragend dargestellt worden. Die Erweiterung auf den dreidimensionalen Fall wurde von MEITINGER [45], WOLFSTEINER [62] und WÖSLE [90] durchgeführt.

Das Lineare Komplementaritätsproblem (LCP) wird benötigt, um die Konfiguration der einseitigen Bindungen im System zu ermitteln. Die Lösbarkeit und die numerische Implementierung ist in der Arbeit von COTTLE und DANTZIG [18] und im Buch von MURTY [48] beschrieben.

1.2.2 Stöße

Die Literatur zum Thema Stöße läßt sich, abgesehen von einigen zum Teil schon älteren Standardwerken, in drei Gruppen einteilen, welche in den folgenden Abschnitten erläutert werden. Die ersten wichtigen Arbeiten zur Stoßtheorie, die nach heutigen Maßstäben noch von Interesse sind, präsentierten HUYGENS [27] und NEWTON [49], die eine kinematische Beziehung der Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß angeben. NEWTON führt dabei bereits eine Stoßzahl ein und schuf damit das Gesetz, das noch heute als Newton'sches Stoßgesetz bekannt ist.

Als weitere Forscherpersönlichkeit ist POISSON zu nennen, dessen Name auch mit einem Stoßgesetz verbunden ist. Er beschreibt in [64] die Behandlung von Stößen auf der Ebene von Impulsen und damit den Weg vom rein kinematischen Zusammenhang hin zu einer den Trägheitsgesetzen unterworfenen Darstellung. Dieses Vorgehen wird von ROUTH in [68] mit einem graphischen Verfahren auf schiefe Stöße mit Reibung erweitert. Jüngere Übersichtswerke über Stöße stammen von GOLDSMITH [23] und BROGLIATTO [14].

Stöße auf Impulsebene

Eine große Gruppe von Arbeiten behandelt Stöße auf Impulsebene. Dabei kommen verschiedene Stoßgesetze zum Einsatz. KELLER [34] beschreibt den Einfachstoß mit Reibung. BATTLE und CONDOMINES behandeln in ihren Arbeiten [3], [4] und [5] Einfachstöße und vergleichen speziell in [4] das Newton'sche und das Poisson'sche Gesetz. In [5] wird der Begriff „balanced collision“ eingeführt, der identisch mit dem „verallgemeinerten zentralen Stoß“ aus [22] ist. In [1] stellen ADAMS und TRAN den Einfluß des exzentrischen Stoßes auf den effektiven Stoßkoeffizienten fest. PREREIRA und NIKRAVESH untersuchen in [53] dreidimensionale Reibstöße, verwenden aber das Newton'sche Stoßgesetz, während SMITH in [77] auf eine mögliche Energiezunahme beim Newton'schen Gesetz hinweist und in [78] verschiedene Stoßgesetze mit Hilfe einer FE-Modellierung der Kontaktzone vergleicht.

SHAKIL, LANKARANI und PEREIRA benutzen in [74] die graphische Methode von Routh und klassifizieren den schiefen Einfachstoß ähnlich wie es auch in Abschnitt 3.8 durchgeführt wird. WANG und MASON bearbeiten in [44], [86] und [87] Reibstöße mit dem Poisson'schen Gesetz und zeigen speziell in [86], bei welchen Bedingungen das Newton'sche Gesetz keine gültigen Aussagen mehr liefern kann.

Eine Gruppe von Arbeiten von BRACH [8], [9], [10], [11], STRONGE [81], [82], [83] und IVANOV [29] behandeln Stöße mit einem Energieverlustmodell, das zwangsläufig auf Einfachstöße beschränkt bleibt.

In GLOCKER [22] werden die Effekte einer tangentialen Nachgiebigkeit auf Impulsebene eingeführt. Die Bindungskonfiguration wird dabei mit einem LCP bestimmt. WOLFSTEINER erweitert dieses Modell in [91] auf dreidimensionale Stöße mit einem Nichtlinearen Komplementaritätsproblem (NCP) zur Konfigurationsbestimmung. Mit dem Problem der räumlichen Mehrfachstöße befassen sich ebenfalls MARGHITU und HURMUZLU in [42], wobei sie zur Feststellung der Bindungskonfiguration einen iterativen Algorithmus verwenden.

Eine experimentelle Arbeit, bei der Einfachstöße untersucht werden, wurde von CHATTERJEE [17] durchgeführt.

Mehrere Autoren versuchen das Kontaktproblem mit Stößen durch eine direkte Diskretisierung auf Geschwindigkeitsebene zu lösen. So zum Beispiel MOREAU und JEAN in der Arbeit [32], die jedoch nur plastische Stöße behandelt.

Zeitskalierte und elastomechanische Ansätze

Eine große Zahl von Arbeiten nähert sich dem Phänomen Stoß durch einen zeitlich oder örtlich kontinuierlichen Ansatz. In der Arbeit von OSTERMEYER [50] werden lokale Steifigkeiten eingeführt und der Stoß mit einer gedehnten Zeitskala klassisch integriert. LÜDER führt ein „regularisiertes Stoßmodell“ ein [40], bei dem er die normale und tangentialen Nachgiebigkeit durch Federn annähert. In der Arbeit von FRITZER [20] werden zeitaufgelöste Stöße mit viskoelastischen Kraftelementen untersucht.

Das Hertz'sche Kontaktgesetz (HERTZ [24]) ist Basis vieler aufgelöster Stoßmodelle. VILLAGGIO stellt in [85] den Stoß einer Kugel auf eine unnachgiebige Unterlage vor. MARGHITU und HURMUZLU untersuchen in ihrer theoretischen und experimentellen Arbeit [43] den Stoß eines elastisch modellierten Balkens und verwenden das Hertz'sche Kontaktgesetz für die Beschreibung des Bodenkontakts. Dieses Kontaktgesetz in Verbindung mit einer tangentialen elastischen Nachgiebigkeit wird von STRONGE und LIM in [39] verwendet, um Reversibilität in der Bohrrreibung zu beschreiben. Dazu wurden auch Experimente mit Gummi- und Tennisbällen durchgeführt. JÄGER stellt in seiner Arbeit [31] ein erweitertes Kontaktgesetz mit tangentialen Effekten vor. KLARBRING und BJÖRKMANN lösen das Kontaktproblem zwischen einer Kugel und einem Balken in [35] durch eine FE-Modellierung beider Körper und wenden dabei einen LCP-Formalismus zur Kontaktanalyse an.

PANAGIOTOPOULOS gibt eine umfassende Beschreibung der mechanischen und mathematischen Grundlagen von Kontakterscheinungen im Bereich der Elastostatik. Hierzu entwickelt der Autor auf der Basis der konvexen Analysis eine Formulierung der Kontaktgesetze als variationelle Ungleichungen. Das Buch [52] und die dort angegebenen Literaturstellen bieten einen guten Einblick in seine Arbeiten.

Einige Arbeiten befassen sich mit dem Stoßkontakt von Körpern mit Ölschicht und berücksichtigen die zusätzlichen Effekte der Hydrodynamik, so CHANG in [16] und LARSSON und HÖGLUND in [38]. Standardwerk zur Beschreibung kontaktmechanischer Phänomene ist das Werk von JOHNSON [33].

Elastische Körper und Wellenvorgänge

Bei bestimmten Stoßphänomenen kann es erforderlich sein, die elastischen Eigenschaften der stoßenden Körper zu berücksichtigen oder die Ausbreitung von Festkörperwellen in ihrem Inneren zu betrachten. Die auftretenden Biegeschwingungen in schief stoßenden Balken werden von MARGHITU und HURMUZLU in [43] mit den Balkeneigenformen als Ansatzfunktionen untersucht. Ähnliche Vorgänge untersuchen PALAS, HSU und SHABANA in [51] mit einem impulsbasierten Stoßmodell. Ähnliche Untersuchungen wurden von BARHORST und EVERETT in [2] durchgeführt, wo sie den Stoß eines elastischen Balkens auf den Boden untersuchen. STOJANOVICI und HURMUZLU untersuchen in [80] experimentell die Grenze des Starrkörpermodells und beschreiben auch das Phänomen des wiederholten Abhebens und Wiederaufsetzens bei Stößen von elastischen Körpern.

Die Wellenvorgänge in Körpern bei Stößen werden im „Klassiker“ von DE SAINT-VENANT [69] am Beispiel von Zug-Druck-Stäben ausgiebig behandelt. Die Grenzen und Übergänge zwischen Starrkörper und elastischem Kontinuum werden von SCHMIDT in [70] angerissen und von STEGER in [79] ausführlich untersucht.

ZUKAS beschreibt in seinen Büchern [92] und [93] die Phänomene, die auftreten, wenn Stöße so heftig erfolgen, daß die Körper plastisch ineinander eindringen und dabei sogar zerstört werden können. Derartige Vorgänge liegen in einem Bereich der Mechanik, die mit keinem in dieser Arbeit erwähnten Modell mehr beschrieben werden können.

1.2.3 Dynamik von Stoßsystemen

Viele Arbeiten befassen sich nicht mit der Modellierung des Stoßes an sich sondern untersuchen seine Konsequenzen auf das Verhalten von mechanischen Systemen. Dabei kann man die Gruppe der Arbeiten unterscheiden, denen es darum geht, die komplette nichtlineare Dynamik von eher einfachen Systemen ausführlich zu analysieren, und der Arbeiten, die komplexere Stoßsysteme unter technischen Aspekten auswerten.

Nichtlineare Dynamik

Bei Arbeiten, bei denen der Schwerpunkt auf der Untersuchung der nichtlinearen Dynamik liegt, wird in der Regel das Newton'sche Stoßgesetz verwendet, da es einfach ist und die mathematische Analyse eines dynamischen Systems Vorrang vor der praktischen Relevanz hat. Einige der untersuchten Systeme sind auch so einfach strukturiert, daß bei ihnen die verschiedenen Stoßgesetze nach Newton oder Poisson die gleichen Ergebnisse erbringen würden.

Den eindimensionalen Stoßschwinger untersucht PETERKA in mehreren Arbeiten (u.a. [54]) ausführlich. Auch IVANOV [28], BUDD und DUX [15], KOZOL [36] und

WHISTON [89] untersuchen Stoßschwinger und die Bifurkationen zwischen verschiedenen Bewegungsformen einschließlich des chaotischen Verhaltens. BAPAT bearbeitet in [6] ein gekoppeltes Reib-Stoß-Problem, IVANOV in [30] den Stoß einer Scheibe.

Ein weiteres Stoßproblem, welches von mehreren Autoren untersucht wurde, ist der hin- und herkippende Klotz auf einer bewegten Ebene. Einerseits ist dies ein Modellierungsproblem und andererseits ist es auch aus der Sicht der nichtlinearen Dynamik interessant. Die Autoren DEL PIERO, SINOPOLI und HOGAN befassen sich in [63], [26], [75] und [76] mit diesem System. Die Arbeit von KUNERT [37] enthält eine stochastische Beschreibung von allgemeinen Stoßsystemen und schlägt mit der Anwendung auf Rasselprobleme die Brücke zu Arbeiten im folgenden Abschnitt.

Anwendungsorientierte Arbeiten

Ein praxisrelevantes Stoßproblem stellt das Rasseln dar, das an den Zahnflanken lastfrei laufender Räder in PKW-Schaltgetrieben auftritt. Die Autoren PFEIFFER und KÜCÜKAY bearbeiten in ihren Arbeiten [58], [56] und [57] dieses Problem ausgiebig. Systeme, in denen die Stöße sogar zur Funktion erforderlich sind, sind Schlagbohrmaschinen, die von GLOCKER und PFEIFFER in [21] und [60] untersucht wurden, sowie pneumatische Hämmer, die von SEYFFERTH in [71] untersucht werden.

Ein einfaches Beispiel für Reibstöße ist der „Spielzeugspecht“, für den PFEIFFER in [55] erstmals einen kompletten Grenzyklus angibt und der von GLOCKER in [22] noch einmal verfeinert wird. Die bisher in diesem Abschnitt genannten Beispiele sind im Buch [61] von PFEIFFER und GLOCKER zusammengefaßt.

Komplexere Mehrkörpersysteme, in denen Stoßeffekte auch eine Rolle spielen, sind Montageroboter, wie sie von SEYFFERTH in [72] untersucht wurden, und Kettentriebe (FRITZ, [19]). Das Getriebehämmern bei dem die Kontaktkräfte das entscheidende Erkenntnisziel sind, wurde von PRESTL [66] untersucht.

1.3 Ziel und Aufbau der Arbeit

In dieser Arbeit sollen die Vorgänge bei Stoßprozessen von Körpern betrachtet werden. Schwerpunkt sind dabei die Effekte, die durch die Reibung im Stoßkontakt verursacht werden. Besonderes Augenmerk kommt den tangentialreversiblen Stößen zu, bei denen die Reibung zusammen mit tangentialer Nachgiebigkeit der Körper zur Umkehrung der Relativgeschwindigkeit führt.

In Kapitel 2 wird die Modellbildung für Stöße dargestellt. Eingebettet in den Formalismus zur Beschreibung von Mehrkörpersystemen werden die verschiedenen Hierarchieebenen für die Modellierung von Stößen vorgestellt. Das reicht von den Impulsstoßmodellen, die es ermöglichen einen Stoß auf einen Zeitpunkt zu konzentrieren, über zeitskalierte Modelle, die den Stoß entweder in seiner tatsächlichen oder einer neuen Zeit auflösen. Am Ende dieser Hierarchie stehen elastische Körper, bei denen auch die Ausbreitung von Festkörperwellen eine Rolle spielen kann. Für alle

Arten der Stoßmodellierung werden die Grenzen ihrer Zulässigkeit beziehungsweise die dazu nötigen Entscheidungskriterien angegeben.

Das Kapitel 3 ist das zentrale theoretische Kapitel dieser Arbeit. Dort wird ein verbessertes Impulsstoßmodell präsentiert. Zunächst werden die existierenden Elementargesetze für den Einfachstoß miteinander verglichen. Auf Basis und Poisson'schen Gesetzes wird ein Formalismus für Mehrfachstöße starrer Körper unter voller Berücksichtigung tangentialreversibler Effekte entwickelt.

In Kapitel 4 werden die zuvor dargestellten Stoßgesetze auf Spezialfälle angewandt. Der zentrale und der exzentrische Einfachstoß werden im weiteren für die Vergleiche mit den Stoßversuchen benötigt. Die anderen Fälle erläutern spezielle Stärken und Schwächen der vorgestellten Gesetze an anschaulichen Beispielen. Ein Fall enthält die Darstellung der Stoßmodellierung mit einem zeitskalierten Modell.

Einen wesentlichen Teil dieser Arbeit stellen die Stoßversuche dar, welche zur Verifikation des Impulsmodells in Kapitel 3 durchgeführt wurden. Dazu wurde eine Versuchsmaschine entworfen und gebaut. Diese Maschine ist in Kapitel 5 beschrieben. Es wird das Maschinenkonzept, die technische Ausführung sowie das Steuerungskonzept mit elektronischer Hard- und Software vorgestellt. Die Erläuterung der Auswertetechnik schließt dieses Kapitel ab.

Die Ergebnisse der Stoßversuche sind in Kapitel 6 zusammengestellt. Gegliedert nach zentralen und exzentrischen Stößen werden die Versuche mit verschiedenen Stoßpartnern erläutert. Hier findet auch der Vergleich zwischen Versuchsergebnissen und den theoretischen Vorhersagen statt.

Eine Zusammenfassung in Kapitel 7 schließt diese Arbeit ab. Um die fortlaufende Lesbarkeit des Textes in Kapitel 6 zu gewährleisten, sind einige der Bilder mit Versuchsergebnissen im Anhang A zusammengestellt.

Kapitel 2

Modellierung von Stößen

In diesem Kapitel werden die Grundlagen vorgestellt, die man zur Modellierung von Stößen in Mehrkörpersystemen benötigt. Zunächst wird die Definition dafür gegeben, welche mechanischen Vorgänge als Stoß bezeichnet werden. Für die mathematische Behandlung derartiger Phänomene muß in Abhängigkeit von verschiedenen Rahmenbedingungen ein jeweils angepaßtes Stoßmodell verwendet werden. Im folgenden werden verschiedene Modellierungsvarianten vorgestellt, sowie Kriterien angegeben, mit denen man eine Entscheidung zwischen den verschiedenen Methoden bezogen auf ein konkretes Problem treffen kann.

2.1 Definition eines Stoßes

Ein Stoß liegt vor, wenn sich in einem mechanischen System Geschwindigkeiten unstetig ändern. In der Natur gibt es keine Stöße. Sie sind immer Folge einer Abbildung der Natur in ein Modell, das den kontinuierlichen Charakter jedes Körpers zugunsten diskreter oder modaler Massen aufgibt. Ursache unstetiger Geschwindigkeitsänderungen massebehafteter Punkte können nur unendliche Kräfte sein, die in der physikalischen Realität nicht auftreten. In tatsächlich kontinuierlich modellierten Systemen ohne Massendiskretisierung können theoretisch Stoßfronten auftreten, die zu einer unstetigen Geschwindigkeitsänderung von infinitesimalen Massenelementen führen können, ohne auf unendlich große Kräfte angewiesen zu sein. Voraussetzung dafür ist jedoch eine sprunghafte Krafteinleitung, die in der Natur so nicht stattfinden kann, da jede stetige Annäherung zu einem stetigen Kraftzuwachs führt.

Ungeachtet der Tatsache, daß es in der Natur keine Stöße gibt, sind sie dennoch ein geeignetes Hilfsmittel, um gewisse Vorgänge, die mit „schnellen“ Geschwindigkeitsänderungen verbunden sind, in einer einfachen Weise zu behandeln. Hat man bei einer Modellierung von Körpern die Massen diskretisiert, kommt man nicht ohne Grenzübergänge zu unstetigen Geschwindigkeitsänderungen aus.

Es gibt zwei Ursachen für Stoßereignisse in mechanischen Systemen:

- Zwei Punkte auf einem oder mehreren Körpern kommen in Kontakt und sie

haben dabei eine nicht verschwindende normale Relativgeschwindigkeit.

- Durch Klemm- oder Selbsthemmungsprozesse entsteht in einem Kontakt eine im Grenzfall unendliche Kontaktkraft, die zum unstetigen Abheben der Kontaktpartner führt.

In Folge dieser Stöße können an anderen Stellen des Systems ebenfalls Stoßereignisse eintreten. Ein derartiges Ereignis bezeichnet man als Mehrfachstoß. Diese können im Grenzfall auch ohne Geschwindigkeitsänderung einhergehen, es werden aber trotzdem impulsartige Kräfte benötigt werden, um Kontaktbedingungen nicht zu verletzen. Diese Sonderform bezeichnet man als *Kontaktkompatibilitätsstoß*.

2.2 Hilfsmittel aus der Theorie der Mehrkörpersysteme

Zur Beschreibung von Stößen benötigt man unabhängig von ihrer Modellierungsart immer zwei Gleichungssätze, die sich aus der Modellierung des Systems ergeben, in dem die Stöße auftreten: Das ist einerseits die Bewegungsgleichung, die den Zusammenhang zwischen Bewegung und den verursachenden Kräften darstellt und andererseits die Kontaktkinematik, die die Relativbewegungen der Körper an ihren Kontaktpunkten beschreibt.

2.2.1 Bewegungsgleichungen ungebundener Mehrkörpersysteme

Die Formulierung der Bewegungsgleichungen für ungebundene oder zweiseitig gebundene Mehrkörpersysteme ist in einer großen Zahl von Standardwerken beschrieben. Erwähnt seien die Werke [61], [12], [88] und [73]. Aus diesem Grund sollen hier nur die wesentlichen Begriffe, die im weiteren zur Beschreibung von Stößen benötigt werden, erwähnt werden.

Ein technisch modelliertes Mehrkörpersystem besteht aus n Körpern, die durch die Bewegungsgleichungen der 6 Starrkörperfriheitsgrade und die der jeweils $n_{el,i}$ elastischen Ansatzfunktionen pro elastischem Körper beschrieben werden. In Systemen, die in technischen Anwendungen üblich sind, sind die Beweglichkeiten der Körper durch zweiseitige, das heißt immer geschlossene Bindungen eingeschränkt. Die Bewegungen in diesem Raum lassen sich durch einen Satz von generalisierten Koordinaten beschreiben ¹.

¹Bei Systemen mit geschlossenen kinematischen Schleifen kann es zweckmäßig sein, mehr Koordinaten als die minimal erforderlichen zu verwenden und ständig aktive Zwangsbindungen im System zu belassen.

Die generalisierten Koordinaten werden üblicherweise im Vektor $\mathbf{q}(t)$ zusammengefaßt. Die Bewegungsgleichung für ein starr-elastisches MKS läßt sich immer in der Form

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{h}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = 0 \quad (2.1)$$

schreiben, wobei \mathbf{M} die symmetrische und positiv definite Massenmatrix darstellt und im Vektor \mathbf{h} alle aktiven und gyroskopischen Kräfte und Momente enthalten sind. Im Fall eines Systems ohne aufgeschnittene kinematische Schleifen und einseitige Bindungen ist die Dimension von \mathbf{q} gleich der Zahl der Freiheitsgrade f des Systems und man bezeichnet \mathbf{q} als Minimalkoordinaten.

2.2.2 Bindungen und Kontaktkinematik

Wenn man die Bewegungsgleichung eines MKS in generalisierten Koordinaten formuliert hat, können noch zusätzliche Bindungen im System vorhanden sein, die die Zahl der Freiheitsgrade verringern. Zweiseitige Bindungen sind permanent vorhanden und können durch Nebenbedingungen in den Satz der beschreibenden Gleichungen eingeführt werden. Von besonderem Interesse, speziell bei Systemen mit Stößen, sind die einseitigen Bindungen, die während der zeitlichen Evolution aktiv oder passiv werden können. Typische Bindungen dieser Art sind das Aufsetzen und Wiederabheben von Körpern aufeinander und der Übergang von Haften zu Gleiten und umgekehrt bei untereinander im Kontakt befindlichen Körpern. Diesen einseitigen Bindungen ist die Eigenschaft gemeinsam, daß ihr Aktivwerden durch einen kinematischen Indikator (verschwindender Abstand oder Relativgeschwindigkeit der Körper) und das Passivwerden durch einen dynamischen Indikator (Kontaktkraft verschwindet, Reibkraftreserve aufgebraucht) angezeigt wird.

Derartige Systeme mit zeitvarianter Topologie ändern die Zahl ihrer Freiheitsgrade in Abhängigkeit von ihrem Zustand. Durch Einführung eines Bindungsformalismus auf der Basis von Nebenbedingungen und Lagrange-Multiplikatoren ist es möglich, alle möglichen Bindungskonfigurationen auf der Basis des gleichen Satzes von generalisierten Koordinaten darzustellen.

Voraussetzung ist die geometrische Beschreibung aller möglichen Kontaktpunkte im System. Das Vorgehen ist in [22] ausführlich erläutert, hier soll nur ein kurzer Abriß gegeben werden. In Bild 2.1 sind zwei Körper dargestellt, die in Kontakt treten können. Auf beiden Körpern sind an den Punkten, die durch den minimalen Abstand gekennzeichnet sind, konturbegleitende Koordinatensysteme angebracht. Die Lage und Orientierung der Körper zueinander ist von den generalisierten Koordinaten \mathbf{q} und der Zeit t abhängig. Die Lage der normalen und tangentialen Einheitsvektoren $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{t}_1$ und \mathbf{t}_2 , sowie die Orte auf den Konturen s_1 und s_2 und somit auch der Abstand r_D lassen sich damit als Funktionen der Koordinaten \mathbf{q} und der Zeit t angeben.

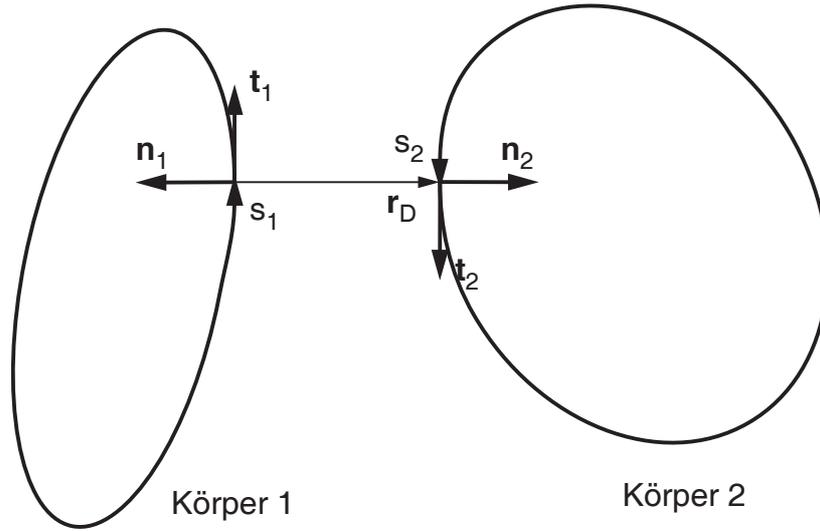


Bild 2.1: Kontaktkinematik zweier Körper

Für die Beschreibung des Kontaktzustandes werden ein normaler und ein tangentialer Lageindikator g_N und g_T benötigt

$$g_N(\mathbf{q}, t) = \mathbf{r}_D^T(\mathbf{q}, t) \mathbf{n}_2(\mathbf{q}, t) \quad (2.2)$$

$$g_T(\mathbf{q}, t) = -(s_1(\mathbf{q}, t) + s_2(\mathbf{q}, t)), \quad (2.3)$$

die sich mit den Geometriegrößen darstellen lassen. g_N ist der skalare Abstand, der beim Eindringen der Körper ineinander negativ wird und sich somit als Bindungsindikator gut eignet. Der tangentiale Abstand g_T hat keine anschauliche Bedeutung.

Wichtig für die Beschreibung der Kontaktkinematik sind die Relativgeschwindigkeiten und -beschleunigungen, die sich für jede Bindung durch ein- beziehungsweise zweimalige Differentiation aus (2.2) und (2.3) gewinnen lassen:

$$\dot{g}_N = \mathbf{w}_N^T \dot{\mathbf{q}} + \tilde{w}_N \quad (2.4)$$

$$\dot{g}_T = \mathbf{w}_T^T \dot{\mathbf{q}} + \tilde{w}_T \quad (2.5)$$

$$\ddot{g}_N = \mathbf{w}_N^T \ddot{\mathbf{q}} + \bar{w}_N \quad (2.6)$$

$$\ddot{g}_T = \mathbf{w}_T^T \ddot{\mathbf{q}} + \bar{w}_T \quad (2.7)$$

Die Vektoren \mathbf{w}_N und \mathbf{w}_T dienen dazu, die Bewegungen der Körper in die Kontakttrichtungen zu projizieren. Die \tilde{w} - und \bar{w} -Terme enthalten nichtlineare Anteile und explizite Zeitabhängigkeiten der Bindungen, die zum Beispiel dann entstehen, wenn einer der Körper Kontakt zur zeitvariabel bewegten Umgebung bekommt.

Ist ein ganzer Satz von Bindungen zu betrachten, faßt man diese Gleichungen zu Vektoren und Matrizen zusammen und erhält zum Beispiel für eine Menge geschlossener Normalbindungen die Gleichung

$$\dot{\mathbf{g}}_N = \mathbf{W}_N^T \dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{w}}_N, \quad (2.8)$$

wobei die Vektoren \mathbf{w}_N zur Matrix \mathbf{W}_N zusammengefaßt werden.

Sind Bindungen im System aktiv, müssen die Einschränkungen in der Beweglichkeit mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren in die Bewegungsgleichung des ungebundenen Systems eingefügt werden. Unter der Annahme, daß alle Bindungen momentan haften, das heißt, daß die Bindungen in normaler und tangentialer Richtung aktiv sind, lautet die Bewegungsgleichung mit den zugehörigen Bindungsgleichungen für ein derartiges System:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{h} + \mathbf{W}_N \boldsymbol{\lambda}_N + \mathbf{W}_T \boldsymbol{\lambda}_T \quad (2.9)$$

$$\ddot{\mathbf{g}}_N = \mathbf{W}_N^T \ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{w}}_N = 0 \quad (2.10)$$

$$\ddot{\mathbf{g}}_T = \mathbf{W}_T^T \ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{w}}_T = 0 \quad (2.11)$$

Die Vektoren $\boldsymbol{\lambda}_N$ und $\boldsymbol{\lambda}_T$ sind die Lagrange-Multiplikatoren, mit denen die Einhaltung der Zwangsbedingungen erreicht werden kann. Verwendet man zur Formulierung der \mathbf{W} -Matrizen, wie in Abschnitt 2.2.2 erläutert, Einheitsvektoren, sind die Werte der λ die tatsächlich im System wirkenden Zwangskräfte in den Bindungen.

Die Bewegungsgleichung (2.9) und die Nebenbedingungen (2.10) und (2.11) sind in dieser Konfiguration nur gültig, solange keine Bindungsübergänge auftreten, die durch das Überschreiten kinematischer oder dynamischer Indikatoren angezeigt werden. Danach muß das Gleichungssystem mit dem veränderten Bindungszustand angepassten \mathbf{W} und $\bar{\mathbf{w}}$ neu aufgebaut werden.

Ein wichtiger Zustandsübergang, der während der zeitlichen Systementwicklung auftreten kann, ist der Stoß. Er tritt dann auf, wenn – gemäß der Definition in 2.1 – für den Abstandsindikator der Bindung i $g_{N,i} = 0$ eintritt und gleichzeitig $\dot{g}_{N,i} < 0$ gilt. Das bedeutet, daß zwei Körper an der Bindung i ineinander eindringen „wollen“, was durch das Ereignis eines Stoßes verhindert wird. Zur Berechnung des Stoßes sind alle zu diesem Zeitpunkt geschlossenen Kontakte sowie der neu hinzugekommene in der Berechnung des Stoßprozesses zu berücksichtigen. Die mathematische Behandlung dieses Ereignisses kann auf verschiedene Arten erfolgen, von denen einige in den folgenden Abschnitten vorgestellt werden.

2.3 Klassifikation von Stößen

In Lehrbüchern werden Stöße in verschiedene Klassen eingeteilt. Die üblichen Kriterien sind durch die Kombination der Stoßpartner sowie deren Oberflächenbeschaffenheit gegeben und lauten rauh–glatt, schief–gerade, zentrisch–exzentrisch sowie die Reihe plastisch–teilelastisch–elastisch.

Das erste Kriterium macht eine Aussage über die Reibverhältnisse im Stoßkontakt und ist von der Art der Modellierung völlig unabhängig.

Ein Stoß ist gerade, wenn zu Beginn des Stoßes zwischen den Körpern keine tangentiale Relativgeschwindigkeit vorhanden ist, ansonsten ist er schief. Dieses Kriterium setzt jedoch bereits ein Starrkörpermodell mit Reduktion der Kontaktzone auf einen

Punkt voraus. Ein elastischer Körper kann durchaus verschiedene Geschwindigkeiten an unterschiedlichen Stellen der Kontaktzone haben.

Die verbleibenden Kriterien lassen sich nur sinnvoll bei Stößen angeben, die mit einem Starrkörper-Impulsmodell beschrieben werden. Bewegen sich die Körper während des Stoßes weiter, ist die kinematische Beschreibung zentrisch–exzentrisch zu meist nur zu einem Zeitpunkt während des Kontaktverlaufes erfüllt. Ob ein Stoß plastisch oder elastisch ist, kann bei elastischen Körpern von vielen Parametern, die nicht nur an der Stoßkontaktstelle begründet sind, abhängen.

Daraus folgt, daß eine richtige Stoßklassifikation nur bei impulsmodellierten Stößen möglich ist. Dabei sind über die bisher genannten Unterscheidungen hinaus noch weitere Unterteilungen der Stoßklassen möglich. Aus diesem Grund wird im Abschnitt 3.8 eine ausführliche Klassifizierung von Stößen vorgestellt.

2.4 Abschätzen von Stoßzeiten

Für die Entscheidung, welches Stoßmodell für ein spezielles Stoßproblem geeignet ist, spielen die Stoßzeit und die maximal auftretende Kraftspitze eine wesentliche Rolle. Diese lassen sich bei komplexen Stoßkonfigurationen exakt nur aus einer Zeitsimulation mit stetiger Kontaktmodellierung ermitteln; für die Stoßgesetzenscheidung reicht jedoch eine grobe Einordnung aus. Die Effekte von Kopplungen der Stöße sowie die Reibung und Dämpfung werden dabei vernachlässigt.

Voraussetzung für diese Berechnung ist ein Gesetz, das die Kontaktkraft F in Abhängigkeit vom Eindringen g_N der Körper an der Kontaktstelle angibt. Hier ist entweder ein lineares Gesetz, die Kontaktgesetze nach Hertz oder eine aufwendigere Kontaktmodellierung denkbar. Stellt man die Eindringgeschwindigkeit mit

$$\dot{g}_N = \mathbf{w}^T \mathbf{q} + \tilde{w} \quad (2.12)$$

dar, läßt sich die wirkende Masse in Stoßnormalenrichtung mit $m^* = (\mathbf{w}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{w})^{-1}$ berechnen. Ausführliche Erläuterungen zu dieser Annahme finden sich in Abschnitt 3.5.1. Im folgenden werden jeweils die allgemeinen Formeln und die Spezialisierung auf das Hertz'sche Gesetz

$$F = C \cdot (-g_N)^{3/2} \quad (2.13)$$

angegeben. Die Konstante C ergibt sich aus der tatsächlichen Kontaktgeometrie und den Elastizitätseigenschaften der beteiligten Körper. Die Stoßdauer ist von der Auftreffgeschwindigkeit \dot{g}_{NA} abhängig. Bei einer Abschätzung muß eine mittlere typische Geschwindigkeit gewählt werden.

Der Verlauf der Eindringgeschwindigkeit bis zum Stillstand läßt allgemein mit

$$\dot{g}_N(g_N) = \sqrt{\dot{g}_{NA}^2 - \frac{2}{m^*} \int_0^{g_N} F(g_N) dg_N} \quad (2.14)$$

darstellen und lautet im Fall der Hertz'schen Pressung

$$\dot{g}_N(g_N) = \sqrt{\dot{g}_{NA}^2 - \frac{4C}{5m^*}(-g_N)^{\frac{5}{2}}}. \quad (2.15)$$

Das maximale Eindringen wird bei $\dot{g}_N(g_{N,max}) = 0$ erreicht, was sich im Fall des Hertz'schen Kontaktgesetzes analytisch zu

$$g_{N,max} = - \left(\frac{5m^*}{4C} \dot{g}_{NA}^2 \right)^{\frac{2}{5}} \quad (2.16)$$

auffösen läßt. Die maximale Kontaktkraft kann mit anderen Kräften im System verglichen werden und bei der Entscheidung wichtig sein, ob im Kontaktpunkt plastische Verformungen oder Schädigungen auftreten. Man kann sie mit

$$F_{max} = F(g_{N,max}), \quad F_{max} = C \left(\frac{5m^*}{4C} \dot{g}_{NA}^2 \right)^{\frac{3}{5}} \quad (2.17)$$

abschätzen. Die Kontaktzeit kann man als die doppelte Eindringzeit mit dem Integral

$$T = 2 \int_0^{g_{N,max}} \frac{dg_N}{\dot{g}_N(g_N)} \quad (2.18)$$

näherungsweise berechnen, welches jedoch beim Einsetzen des Hertz'schen Geschwindigkeitsgesetzes (2.15) nicht analytisch lösbar ist. Eine Approximation für dieses Integral, bei der mit einem linearen Federgesetz gerechnet wird, das die gleiche Eindringtiefe wie die Hertz'sche Formel bei gleichen Stoßbedingungen liefert, lautet:

$$T = \pi \frac{g_{N,max}}{\dot{g}_{NA}} \quad (2.19)$$

Man kann nun die auftretenden Kontaktkräfte mit den sonst im System wirkenden Kräften vergleichen und ebenso berechnen, ob sich in dem Intervall der Stoßzeit Verschiebungen ergeben, die eine Annahme konstanter Lagen während des Stoßes stützen oder zu Fall bringen. Ebenso kann die Kontaktzeit mit Wellenlaufzeiten verglichen werden. Diese Vergleiche bilden die wesentlichen Anhaltspunkte für die Auswahl des für eine Modellierungsaufgabe angemessenen Stoßgesetzes.

Ein weiteres Ergebnis der Hertz'schen Formeln sind die Größe der Abplattungsellipse sowie festigkeitsrelevante Spannungen.

In der Tabelle 2.1 sind die Berechnungen der elementaren Stoßgrößen für zwei Wurfkörper, welche bei Wurfversuchen verwendet wurden, aufgelistet. Die normale und die tangentielle Relativgeschwindigkeit vor dem Stoß wurde – in Anlehnung an die bei den Versuchen verwendeten Geschwindigkeiten – mit 4 m/s gewählt.

Tabelle 2.1: Vergleich der Kontaktparameter gemäß der Hertz'schen Kontaktgesetze für einen Gummi- und einen Stahlwurfkörper

Parameter	Einheit	Stahl-Wurfk.	Gummi-Wurfk.
Masse	g	142	60
Ersatzdurchmesser D_I, D_{II}	mm	60	60
E-Modul	N/mm ²	$2.1 \cdot 10^5$ ^a	$2.8 \cdot 10^2$ ^b
C , gemäß (2.13)	Nm ^{$\frac{2}{3}$}	$2.66 \cdot 10^{10}$	$3.33 \cdot 10^7$
Kontaktabplattung	mm	0.10	1.05
Maximale Kontaktkraft	N	28000	1140
Maximale Beschleunigung	m/s ²	195000	19000
Kontaktzeit	ms	0.15	1.5
Kontaktflächendurchmesser	mm	3.4	10.9
Schwerpunktbewegung	mm	0.6	6

^a Kontakt Stahl-Stahl

^b E-Modul des Kontaktpartners ist vernachlässigbar. $E_{eff} = 2E_{Gummi}$

Besonderes Augenmerk im Hinblick auf die Auswahl des geeigneten Stoßgesetzes muß auf die Kontaktkräfte und die Kontaktzeit gerichtet werden. Die Kontaktkräfte sind sehr groß im Vergleich zu den sonst im System auftretenden Kräften. Besonders deutlich wird dieser Unterschied bei einem frei fliegenden Körper, wenn man die Kontaktkraft in eine Beschleunigung umrechnet und diese mit der Erdbeschleunigung als einzige äußere Wirkung vergleicht.

Die Kontaktzeit ist für sich genommen eine aussagelose Größe. Eine verwertbare Bedeutung gewinnt sie dadurch, daß man sie mit einer typischen Geschwindigkeit in Beziehung setzt, um die Verschiebung des Körpers während des Kontaktes zu ermitteln. Der Stahl-Wurfkörper bewegt sich bei einer Tangentialgeschwindigkeit von 4 m/s während der Kontaktzeit um 0.6 mm weiter, der Gummikörper um 6 mm. In wieweit hier eine Modellierung auf Impulsebene noch zulässig ist, soll im Abschnitt 6.2 geklärt werden.

Die Größe des abgeplatteten Bereichs ist von Interesse, wenn man dreidimensionale Stöße betrachtet und die Größe der übertragbaren Momente, die aus Bohrreibung resultieren, abschätzen möchte (siehe dazu [39]).

2.5 Impulsmodelle für Starrkörper

Tritt während der Bewegung eines Mehrkörpersystems ein Stoß auf, können sich die Geschwindigkeiten der betroffenen Körper „sprunghaft“ ändern. Dieser Begriff ist nicht exakt und deshalb interpretationsbedürftig. Selbstverständlich geschehen alle Bewegungsvorgänge in einer für technische Mehrkörpersysteme üblichen Größenordnung stetig. Stoßartige Bewegungsvorgänge stellen dabei keine prinzipielle

Ausnahme dar.

Bei vielen technisch relevanten Systemen treten jedoch häufig große Unterschiede in den Zeit- und Kraftskalen auf: die während eines Stoßes in den kollidierenden Körpern auftretenden Kräfte und Beschleunigungen sind um mehrere Größenordnungen größer als die, die sonst im System auftreten. Die Stoßdauer ist so kurz, daß die „regulären“ Bewegungen der Körper während der Dauer des Stoßes vernachlässigbar klein sein können. Eine Methode zur Abschätzung dieser Größen wird in Abschnitt 2.4 dargestellt.

Ist der Größenordnungsunterschied „groß genug“, was eine Ermessensentscheidung für den Modellierer ist, kann man in einem Grenzübergang die Stoßdauer verschwinden und die Stoßkontaktkräfte gegen unendlich gehen lassen. Die Integrale der Stoßkräfte über die Stoßzeit werden Stoßimpulse genannt und bleiben endlich. Die aus den unendlichen Stoßkräften resultierenden Beschleunigungen führen zu einer endlichen aber unstetigen Änderung der Geschwindigkeiten. Die Lagen der Körper bleiben während des Stoßes konstant. Die Bewegungsgleichung für das stoßende System lautet

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{h} - \mathbf{W}_N\boldsymbol{\lambda}_N - \mathbf{W}_T\boldsymbol{\lambda}_T = 0, \quad (2.20)$$

wobei in \mathbf{W}_N und \mathbf{W}_T alle zum Stoßzeitpunkt geschlossenen Bindungen – haftend oder gleitend – enthalten sind. Man integriert diese Gleichung über ein oder mehrere Zeitintervalle während des Stoßes und läßt den Abstand dieser Zeitpunkte in einem Grenzprozeß verschwinden. Die Bewegungsgleichung wird dadurch zu einer diskreten Impuls- und Drallbilanz:

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_2} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{h} - \mathbf{W}_N\boldsymbol{\lambda}_N - \mathbf{W}_T\boldsymbol{\lambda}_T dt = \mathbf{M}(\dot{\mathbf{q}}_2 - \dot{\mathbf{q}}_1) - \mathbf{W}_N\mathbf{A}_{N,12} - \mathbf{W}_T\mathbf{A}_{T,12} = 0 \quad (2.21)$$

Der Vektor \mathbf{h} verschwindet bei diesem Grenzübergang, da er keine Elemente enthält, die unendlich groß werden können. $\dot{\mathbf{q}}_1$ und $\dot{\mathbf{q}}_2$ sind die generalisierten Geschwindigkeiten zu Beginn und am Ende des Intervalls und \mathbf{A}_{12} die Stoßimpulse, die in den Bindungen während des Intervalls wirken. Da die Lagen unverändert bleiben, sind auch die Matrizen \mathbf{M} und \mathbf{W} konstant.

Die Zeitpunkte t_1 und t_2 in der Gleichung (2.21) sind beliebig. Bei der Verwendung des Newton-Stoßgesetzes führt man die Integration über den gesamten Stoß aus. Das Poisson-Gesetz teilt den Stoß in eine Kompressionsphase und eine Expansionsphase auf. Aus diesem Grund ist es erforderlich, die Integration zweimal auszuführen: Vom Beginn des Stoßes $t_1 = t_A$ bis zum Ende der Kompressionsphase $t_2 = t_C$ und vom Ende der Kompressionsphase $t_1 = t_C$ zum Ende des Stoßes $t_2 = t_E$.

Die Kinematikgleichungen (2.4) und (2.5) können zu jedem dieser Zeitpunkte auf Geschwindigkeitsebene ausgewertet werden und ergeben die Relativgeschwindigkeiten in den Kontakten während den jeweiligen Phasen. Die Wahl der Werte für \mathbf{A} ergibt sich aus der Anwendung eines speziellen Stoßgesetzes.

Im folgenden wird noch einmal zusammengestellt, welche Voraussetzungen erfüllt sein müssen, damit die Formulierung der Stoßgleichungen auf Impulsebene zulässig ist:

- Die Stoßdauer ist so kurz, daß die sonstigen Bewegungen im System in dieser Zeit so klein sind, daß sie vernachlässigt werden können. Daraus folgt:
 - Die Körper sind entweder starr oder so steif, daß ihre Verformungen vernachlässigt werden können.
 - Alle Lagen bleiben konstant.
 - Die Normal- und Tangentialrichtungen bleiben in jedem Stoßkontakt konstant.
- Alle anderen Kräfte im System sind so klein, daß sie gegenüber den Stoßkräften vernachlässigt werden können. Treten Kräfte der Größenordnung der Kraftspitzen in den Kontakten auch an vom Stoß unabhängigen Stellen auf, kann diese Annahme zu Fehlern führen. (Beispiel dazu siehe in Abschnitt 4.5)
- Sind bei einem Stoßereignis mehrere einseitige Kontakte betroffen, müssen die Stoßphasen in allen Kontakten gleichzeitig beginnen und enden.
- Der Stoß muß so lange dauern, daß die Schockwelle, die in jedem physikalischen Körper bei einem Stoß entsteht, Zeit hat, sich in den gesamten Körper auszubreiten und so zu dispergieren, daß wieder eine Starrkörperbewegung entsteht (siehe Abschnitt 2.8).

Ist die Bedingung der Kürze des Stoßes oder der Gleichzeitigkeit der Phasen nicht erfüllt, kann eine Stoßmodellierung mit Zeitskalierung weiterhelfen. Spielen Welleneffekte eine Rolle, muß eine Modellierung gewählt werden, bei der in einzelnen Körpern auch die Wellenausbreitung berücksichtigt wird.

Wesentlicher Gegenstand dieser Arbeit ist die Ausformulierung eines detaillierten Stoßgesetzes auf Impulsebene, welches in Kapitel 3 dargestellt wird.

2.6 Zeitlich und örtlich kontinuierliche Starrkörpermodelle

Zeitskalierte Modelle können immer zur Modellierung von Stößen eingesetzt werden, haben aber eine Reihe von Nachteilen: Die entstehenden Gleichungen müssen, bis auf triviale Ausnahmen, immer numerisch gelöst, das heißt numerisch integriert werden. Dies führt zu erheblich höheren Rechenzeiten als bei einem direkten Übergang vom Anfangs- zum Endzustand mit wenigen Gleichungen. Es gibt aber Stoßkonfigurationen, bei denen eine Lösung auf Impulsbilanzebene zu Fehlern führt, so daß eine zeitskalierte Berechnung erforderlich ist:

1. Die Stoßdauer ist zwar so kurz, daß die Annahme der konstanten Lagen noch zulässig ist, die Gleichzeitigkeit der Phasen ist aber durch komplizierte Haft-Gleitübergänge oder stark unterschiedliche Steifigkeiten in den Kontakten nicht mehr gewährleistet.
2. Der Stoß dauert so lange, daß die Verschiebungen der Körper während des Stoßes nicht mehr vernachlässigt werden können.

Werden nicht nur die Bewegungsänderungen der beteiligten Körper durch den Stoß, sondern – zum Beispiel für eine Festigkeitsaussage – auch die Werte der auftretenden Kraftspitzen benötigt, ist immer eine zeitskalierte Simulation mit korrekten Kontaktpunktsteifigkeiten erforderlich.

Liegt eine Situation nach 2. vor, ist kein besonderer Formalismus zur Bindungserkennung und Umschaltung erforderlich: Man läßt die Körper ineinander eindringen und berechnet die Kontaktkraft mittels eines Kraftgesetzes. Ein so modelliertes System verliert durch Normalkontakte keine Freiheitsgrade mehr, die Kontaktgesetze werden als geknickte Kraftkennlinien formuliert. Derartige Formalismen sind zum Beispiel beim Hämmern in Zahnradgetrieben zum Einsatz gekommen [66]. Ein Problem bei diesen Kontaktgesetzen besteht darin, die Dämpfung ohne kinematische Unverträglichkeiten einzubauen. In [20] sind die auftretenden Effekte verschiedener Dämpfungsmodelle erläutert.

Ist in einem stoßenden System davon auszugehen, daß die Lagen der Körper während des Stoßes unverändert bleiben, sollen aber andererseits die Zustandsübergänge in den Kontakten genauer untersucht werden, kann man eine hybride Stoßformulierung verwenden, welche die Vorteile konstanter Systemlagen mit einer feinen zeitlichen Auflösung verknüpft. Dazu wird ein Mehrkörpersystem betrachtet, bei dem n Bindungen an einem stoßenden Kontakt ereignis teilnehmen. Die Relativverschiebungen, -geschwindigkeiten und -beschleunigungen lassen sich mit den Beziehungen (2.2) bis (2.7) berechnen. Auf Bild 2.2 ist ein Beispielsystem mit zwei aktiven Kontakten dargestellt.

Die Kontakte sollen durch diskrete Kraftelemente modelliert werden. Abweichend zu vielen vorgestellten Beispielen solcher Modelle (z.B. [40]) soll hier nicht nur ein rein viskoelastisches Kraftelement verwendet, sondern auch eine kleine Zusatzmasse eingeführt werden. Bei der Modellierung eines kontinuierlichen elastischen Körpers durch diskrete Massen und Federn ist es eine willkürliche Maßnahme, ob man diese Diskretisierung beim äußersten Element mit einer Feder oder einer Masse beginnt. Diese Zusatzmasse berührt beim Kontakt den zweiten Körper und führt dort einen plastischen Stoß aus.

Die Zusatzmasse soll klein gewählt werden, die untere Schranke für die Wahl stellt die numerische Behandelbarkeit des Problems dar. Zu große Massen können Effekte in das System einbringen, die nicht korrekt sind. In jedem Fall ist es sinnvoll, die Größen der Zusatzmassen in einem geeigneten Verhältnis zu den in den Kontaktrichtungen wirkenden Massen zu wählen. Die normale und tangential Zusatzmasse für den Kontakt i kann durchaus unterschiedlich sein. Eine Faustformel zur Berechnung der

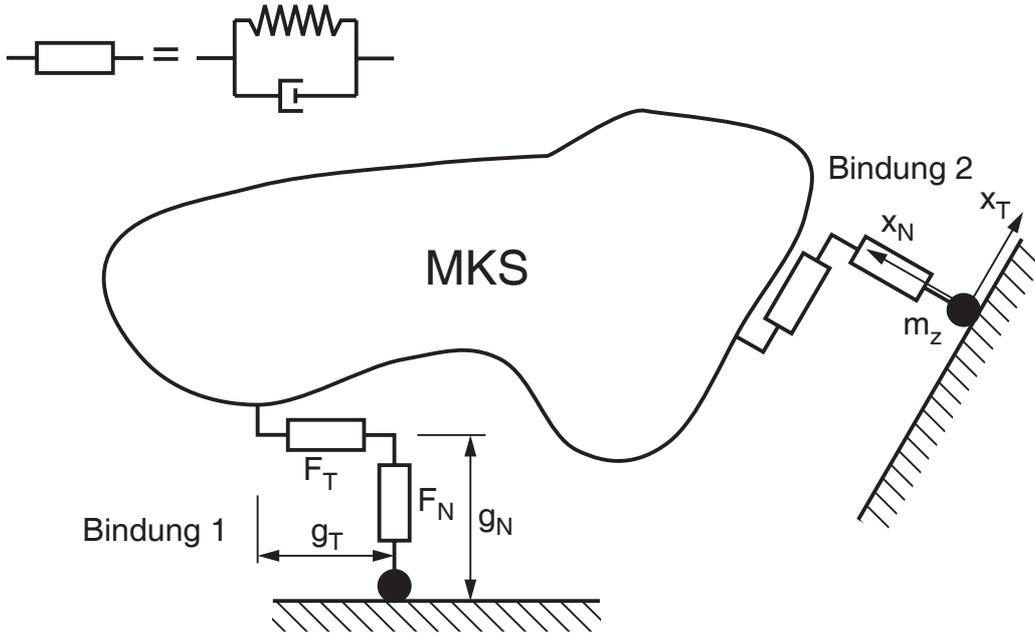


Bild 2.2: Hybrid modellierter Stoß eines MKS

Zusatzmassen lautet

$$m_{zN,i} = f \cdot (\mathbf{W}_N^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{W}_N)^{-1} \quad (2.22)$$

$$m_{zT,i} = f \cdot (\mathbf{W}_T^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{W}_T)^{-1}, \quad (2.23)$$

wobei sich der Faktor $f \approx 1/100$ als günstig erwiesen hat. Die Verschiebungen der Zusatzmassen werden durch die zwei Koordinaten $x_{N,i}$ und $x_{T,i}$ in Normal- und Tangentialrichtung beschrieben.

Zwischen der Zusatzmasse und der Ankoppelungsstelle an das MKS wirkt ein Kraftelement, das eine Normalkomponente $F_{N,i}$ und eine Tangentialkomponente $F_{T,i}$ besitzt, die sich als Funktionen der Differenzen von $g_{N,i} - x_{N,i}$, $g_{T,i} - x_{T,i}$, $\dot{g}_{N,i} - \dot{x}_{N,i}$ und $\dot{g}_{T,i} - \dot{x}_{T,i}$ ausdrücken lassen. Zur Normalkomponente kann noch eine konstante Vorspannung $F_{N0,i}$ addiert werden. In der Regel wird man bei der Wahl der Kraftgesetze die Normal- und Tangentialeffekte entkoppeln. Es können hier lineare Feder-Dämpferpaare, Hertz'sche Kontaktgesetze oder andere geeignete Kraftgesetze gewählt werden.

Die Bewegungsgleichungen für die neuen Freiheitsgrade der Zusatzmassen lauten

$$m_{zN,i} \cdot \ddot{x}_{N,i} = -F_{N,i} + \lambda_{N,i} \quad (2.24)$$

$$m_{zT,i} \cdot \ddot{x}_{T,i} = -F_{T,i} + \lambda_{T,i}, \quad (2.25)$$

wobei in den Kräften $\lambda_{N,i}$ und $\lambda_{T,i}$ die normalen und tangentialen Zwangskräfte an den Kontakten der Zusatzmassen berücksichtigt sind. Zur Berechnung dieser Größen müssen die Kontaktgesetze klassischer Reibbindungen verwendet werden.

Tabelle 2.2: Wahl der Anfangsbedingungen für die hybride Stoßsimulation

Typ Zustand	neue Bindung	alte Bindung	
	undefiniert	haftet	gleitet
bekannte Größen	$g_{NA} = 0$	$g_{NA} = 0$	$g_{NA} = 0$
	$\dot{g}_{NA} < 0$	$\dot{g}_{NA} = 0$	$\dot{g}_{NA} = 0$
	$\dot{g}_{TA} = v_{rel}$	$\dot{g}_{TA} = 0$	$\dot{g}_{TA} = v_{rel}$
	$\lambda_N = 0$	$\lambda_N > 0$	$\lambda_N > 0$
	$\lambda_T = 0$	$\lambda_T \neq 0$	$\lambda_T \neq 0$
Anfangs- bedingungen	$x_{N0} = 0$	$x_{N0} = 0$	$x_{N0} = 0$
	$\dot{x}_{N0} = \dot{g}_{NA}$	$\dot{x}_{N0} = 0$	$\dot{x}_{N0} = 0$
	$x_{T0} = 0$	$F_T(x_{T0}, \dots) = \lambda_T$	$F_T(x_{T0}, \dots) = \lambda_T$
	$\dot{x}_{T0} = v_{rel}$	$\dot{x}_{T0} = 0$	$\dot{x}_{T0} = v_{rel}$
	$F_{N0} = 0$	$F_{N0} = \lambda_N$	$F_{N0} = \lambda_N$

Jede Zusatzmasse kann sich in den Zuständen Haften und Gleiten befinden oder aber auch abheben.

Die Bewegungsgleichung des MKS unter der Annahme konstanter Lagen lautet

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{W}_N \mathbf{F}_N + \mathbf{W}_T \mathbf{F}_T + \mathbf{h}_0, \quad (2.26)$$

wobei \mathbf{h}_0 der Vektor aller Kräfte zum Zeitpunkt des Ereigniseintritts ist, der im Lauf der hybriden Stoßbehandlung als konstant angenommen werden soll. Diese Gleichung wird in den Raum der Bindungsrichtungen projiziert und lautet dann:

$$\ddot{\mathbf{g}} = \mathbf{W}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{W} \begin{pmatrix} \mathbf{F}_N \\ \mathbf{F}_T \end{pmatrix} + \mathbf{W}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{h}_0 \quad (2.27)$$

Bei den betrachteten Bindungen muß zwischen zwei Gruppen unterschieden werden:

1. die Bindungen, die bereits zu Stoßbeginn geschlossen waren
2. die Bindungen, die durch den Stoß geschlossen wurden

Ziel der hybriden Stoßsimulation ist es, auch die Effekte zu berücksichtigen, die in den Bindungen unabhängig vom Stoß auftreten, den Ablauf des Stoßes aber beeinflussen können. Dementsprechend müssen die Anfangsbedingungen der x -Koordinaten so gesetzt werden, daß der vor dem Stoß herrschende Bindungszustand richtig erfaßt wird. In Tabelle 2.2 ist dabei die Wahl der Anfangsbedingungen für die einzelnen Stoßkontakte aufgelistet.

Man faßt nun den Vektor $\ddot{\mathbf{g}}$ und die Freiheitsgrade der Zusatzmassen zum Vektor $\ddot{\mathbf{y}}$ zusammen und erhält damit

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & \text{diag}(m_{z,i}) \end{pmatrix} \ddot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{W} \\ -\mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}_N \\ \mathbf{F}_T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{W}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{h}_0 \\ \lambda_N \\ \lambda_T \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

als Bewegungsgleichung für die hybride Stoßberechnung. Als Nebenbedingungen zur Auswertung der λ stehen die Kontaktbedingungen der Zusatzmassen zur Verfügung. Das Gleichungssystem kann mit einem Standardintegrationsverfahren für Systeme mit einseitigen Reibbindungen behandelt werden, wie es zum Beispiel in [90] beschrieben ist. Zusätzlich müssen die Kräfte $F_{N,i}$ und $F_{T,i}$ und \mathbf{h}_0 über den Verlauf integriert werden.

Gilt für eine Bindung während der Simulation $F_{N,i} < 0$, das heißt die Zusatzmasse der Bindung i hebt ab, scheidet sie aus der Simulation aus. Die hybride Stoßberechnung endet dann, wenn sich alle neu hinzugekommenen Bindungen wieder geöffnet sind. Tritt dieser Fall nicht ein, ist eine hybride Modellierung in der vorgestellten Form nicht möglich.

Will man keine tangentialreversiblen Effekte berücksichtigen und reine Reibstöße berechnen, kann man auf die tangentialen Massen verzichten. Man streicht in Gleichung (2.28) die unteren Zeilen und ersetzt den Vektor \mathbf{F}_T durch den Vektor λ_T . Das ist auch für einzelne Bindungen möglich.

Kommt die Simulation zu einem erfolgreichen Abschluß, stehen die generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}_E$ noch nicht zur Verfügung. Ziel der hybriden Stoßberechnung war nur, die Kraftverläufe in allen Bindungen zeitskaliert abzubilden. Dies ist im Rahmen der Simulation geschehen und die Wirkungen dieser Kräfte stehen durch ihre simultan gebildeten Integrale zur Verfügung. Damit kann dann mit einem Impulsstoß der Zustand nach dem Stoß berechnet werden:

$$\dot{\mathbf{q}}_E = \mathbf{M}^{-1} \left(\mathbf{W} \begin{pmatrix} \int \mathbf{F}_N dt \\ \int \mathbf{F}_T dt \end{pmatrix} + \int \mathbf{h}_0 dt \right) + \dot{\mathbf{q}}_A \quad (2.29)$$

Danach kann mit der normalen Zeitsimulation des Systems fortgefahren werden. Hier seien noch einmal die Eigenschaften des hybriden Stoßmodells zusammengefaßt:

- Der Stoß wird zeitlich aufgelöst.
- Es wird ein System integriert, das die Dimension 4·Anzahl der Stoßkontakte besitzt.
- Komplexe Zustandsübergänge können abgebildet werden.
- Die gleiche Zeitdauer der Stoßphasen in allen Kontakten ist keine Voraussetzung für diese Modellierungsform.
- Unterschiedliche Kontaktsteifigkeiten können problemlos modelliert werden.
- Die Stoßsimulation kann mit dem gleichen MKS-Algorithmus wie das gesamte einseitig gebundene System berechnet werden, wobei lediglich die Massenmatrix und die Bindungsmatrizen andere Gestalt haben. Es treten keine inneren Variablen auf.
- Der Stoßübergang im gesamten MKS findet nur in einer Impulsgleichung statt.

- Die Wirkung großer Normalkräfte, die nicht aus Stoßkräften resultieren, bleibt während des Stoßes erhalten.

In Abschnitt 4.5 wird ein ausführliches Beispiel zu einer Stoßmodellierung mit dieser Methode gezeigt.

2.7 Sonderfall elastische Körper

Kollidieren zwei Körper, von denen mindestens einer elastisch modelliert ist, ist das in der Natur ein sowohl örtlich wie zeitlich stetiger Vorgang ohne das Auftreten von impulsartigen Kräften und damit eigentlich kein Stoß. Es ist lediglich eine endliche Kontaktkraft oder flächenhaft verteilte Pressung erforderlich, um die Materiepunkte der Körper am gegenseitigen Eindringen zu hindern.

Bei einer Modellierung von elastischen Körpern mit einer endlichen Zahl von lokalen oder globalen Ansatzfunktionen entstehen immer endliche lokale oder modale Massen. Deshalb wird ein Stoßimpuls benötigt, um eine Abbremsung eines Kontaktpunktes auf die Geschwindigkeit des Kontaktpartners vorzunehmen. Dieser Impuls wird mit einer steigenden Zahl von Ansatzfunktionen immer geringer, bis er im Grenzfall ganz verschwindet.

Nach Aufbringen dieses Impulses bleibt der Kontakt an einer Stelle der Kontaktzone geschlossen. Die weitere Kontaktentwicklung kann nun im Rahmen der normalen Zeitsimulation des Verhaltens des elastischen Körpers erfolgen. Da der Stoßimpuls nicht ausreicht, um den gesamten Körper abzubremesen, wird er sich in der Summe aller seiner Elemente zunächst weiter in Kontakttrichtung bewegen und durch die Kontaktzwangsbedingung komprimiert. Dabei kommen gegebenenfalls weitere Punkte in Kontakt oder die Kontaktzone vergrößert sich stetig. Reichen die inneren elastischen Kräfte aus, um die Bewegungsumkehrung einzuleiten, werden sich die Massenelemente zunehmend vom Kontaktpunkt wegbewegen, bis auch die Kontaktpunkte impulsfrei in Separation übergehen. Damit ist der „Stoß“ beendet.

Dies sei an einem Beispiel erläutert. Ein elastischer Körper K , wie in Bild 2.3 dargestellt, wird mit Hilfe eines Zeit-Ort-Separationsansatzes behandelt. Die Auslenkung

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{w}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{q}(t) \quad (2.30)$$

an jedem Ort \mathbf{x} zur Zeit t wird durch die Ortsansatzfunktionen (Verschiebungsfelder) $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ und durch die Zeitverläufe $\mathbf{q}(t)$ dieser Auslenkungen beschrieben. Die Massenmatrix des elastischen Körpers ist \mathbf{M} und die Bewegungsgleichung lautet: $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{h}$.

Zum Zeitpunkt t_A berührt der Punkt P die inertielle Umgebung mit der nicht verschwindenden Relativgeschwindigkeit

$$\dot{q}_{NA} = \mathbf{w}_N^T(P) \cdot \dot{\mathbf{q}}_A, \quad (2.31)$$

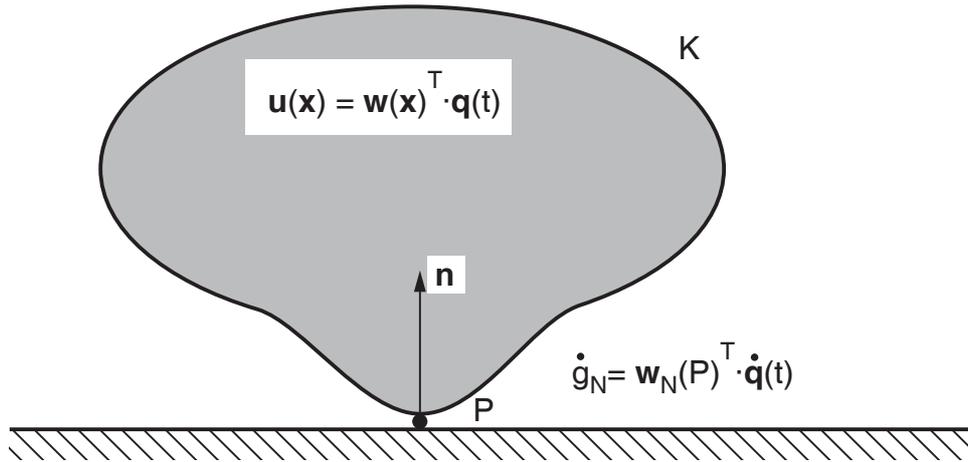


Bild 2.3: Stoß eines elastischen Körpers

wobei $\mathbf{w}_N(P)$ die in Stoßnormalenrichtung projizierten Ansatzfunktionen im Punkt P enthält. Im Kontakt gilt

$$g_{NA} = \mathbf{w}_N^T(P) \cdot \mathbf{q}_A = 0. \quad (2.32)$$

Der skalare Impuls Λ , der benötigt wird, um an der Kontaktstelle die Bindungserfordernisse zu erfüllen, läßt sich mit der Gleichung

$$\Lambda = -\frac{\dot{g}_{NA}}{\mathbf{w}_N^T(P) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{w}_N(P)} \quad (2.33)$$

berechnen. Der Nenner dieser Gleichung wird für eine steigende Anzahl von Ansatzfunktionen immer größer und Λ damit immer kleiner.

Der „Kontaktcompatibilitätsstoß“

$$\dot{\mathbf{q}}_C = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{w}_N(P) \Lambda + \dot{\mathbf{q}}_A \quad (2.34)$$

führt die generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}_C$ auf eine Kombination, die mit dem neuen Bindungszustand kompatibel ist. Strenggenommen findet hier ein plastischer Stoß statt, der mit Energiedissipation verbunden ist, die jedoch umso geringer ausfällt, je mehr Ansatzfunktionen verwendet werden. Das Verwenden eines elastischen Stoßes an dieser Stelle ist sehr unzuweckmäßig: Zwar bleibt die Energie des Gesamtkörpers erhalten, andererseits findet am Stoßkontakt ein sofortiges Wiederabheben statt: Da der übertragene Impuls nicht ausreicht, um die Bewegung des Körpers umzukehren, wird der Körper kurze Zeit später wieder zu einem neuen Stoß in Kontakt kommen und erneut abheben. Der gesamte Kontakt besteht aus einer Folge von immer schneller abfolgenden Stößen, was einerseits physikalisch keinen Sinn ergibt und andererseits jeglichen Versuch einer numerischen Integration scheitern läßt. Dieser „bouncing ball“-Effekt ist in [20] ausführlich beschrieben und wird dort dadurch unterbunden, daß ab der Unterschreitung einer minimalen Stoßkontaktgeschwindigkeit ein plastischer Stoß postuliert wird.

Für die weitere Systemsimulation muß nun der geschlossene Kontakt als Bindung im System berücksichtigt werden. Die Bewegungsgleichung wird mit einer Zwangskraft (Kontaktkraft) λ erweitert und die Nebenbedingung muß, aus Gründen der einfacheren numerischen Integrierbarkeit, auf Beschleunigungsebene hinzugenommen werden:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{h} + \mathbf{w}_N(P)\lambda \quad (2.35)$$

$$\ddot{g}_N = \mathbf{w}_N^T(P)\ddot{\mathbf{q}} \quad (2.36)$$

Sobald die Kontaktkraft λ kleiner als null wird, findet am Kontaktpunkt Abheben statt, und die Bindung wird aufgelöst.

Erfolgt die Modellierung des elastischen Körpers mit Hilfe lokaler Ansatzfunktionen (FEM), kann es sein, daß während eines Kontaktvorganges in der Abbremsphase des Körpers ständig neue Knoten des FE-Gitters mit dem Stoßpartner in Kontakt kommen. Dann muß der Kontaktstoßformalismus bei jedem Knotenkontakt wiederholt werden und danach in die Liste der Nebenbedingungen aufgenommen werden. Statt P liegt nun eine Liste von P_i vor und λ ist durch einen Vektor der Kontaktkräfte an allen Kontaktknoten zu ersetzen (siehe [35]).

Auf der Basis dieses Normalkontaktmodells läßt sich auch die Reibung als Summe von Einzelreibkräften an den Kontaktpunkten formulieren. Selbstverständlich muß man dann für jeden neu hinzukommenden Kontakt einen „Kontaktkompatibilitätsreibstoß“ ausführen und während der weiteren Zeitintegration die Haft-Gleit-Übergänge an allen Kontakten berücksichtigen.

Eine Methode, den „Kontaktkompatibilitätsstoß“ ganz zu vermeiden, ist, zusätzlich zu der dem elastischen Körper innewohnenden Elastizität, an den Kontaktpunkten lokale Nachgiebigkeiten einzuführen. Die Größe dieser Kontaktfedersteifigkeiten kann das Stoßverhalten grundsätzlich beeinflussen, wie im folgenden Abschnitt (2.8) gezeigt wird.

2.8 Berücksichtigung von Festkörperwellen

Stoßen Körper mit hoher Kontaktsteifigkeit zusammen, kann es erforderlich sein, die Wellenausbreitung in den stoßenden Körpern zu berücksichtigen. Jeder Kontakt von Festkörpern läßt sich mit letzter Konsequenz physikalisch nur mit Hilfe von Festkörperwellen erklären. Die Information, daß sich ein wie auch immer geartetes „Kraftereignis“ an einer Stelle des Körpers stattgefunden hat, kann sich maximal mit der Körperschallgeschwindigkeit zu anderen Stellen des Körpers hin fortpflanzen. Das physikalische Modell „Starrkörper“ geht von Informationsgleichzeitigkeit aus und ist demnach nicht in der Lage irgendwelche Phänomene, die sich in der Zeit eines Wellendurchlaufes durch den Körper abspielen, zu beschreiben.

Der Übergang zu den technisch üblichen Starrkörpern gelingt dadurch, daß die Wellenlaufzeiten in Körpern sehr gering sind, und die Wellen im Medium so gestreut

und dispergiert werden, daß letztendlich jedes Körperelement einen Teil des übertragenen Impulses erhält und sich der Körper nach einer gewissen Zeit wieder wie ein Starrkörper bewegt.

Beispiel dafür ist eine Glocke, die im schwebefreien Raum durch einen infinitesimal kurzen Impuls angeschlagen wird. Der Anschlag erfolge so, daß der wirkende Impuls keinen Drall bezüglich des Glockenschwerpunktes erzeugt. Die Glocke wird einerseits zu schwingen beginnen, andererseits muß die mittlere Bewegung aller Massenelemente dem Impulssatz gehorchen. Sind die Schwingungen der Glocke abgeklungen, das heißt es finden keine Relativbewegungen innerhalb der Glocke mehr statt, verhält sie sich gemäß der Definition wie ein Starrkörper. Es müssen sich demnach alle Elemente der Glocke mit gleicher Geschwindigkeit, die sich aus dem Quotienten des Stoßimpulses und der Gesamtmasse ergibt, fortbewegen.

Sind aufgrund einer hohen Kontaktsteifigkeit die Stoßkontaktzeiten so gering, daß die Welle keine Möglichkeit hat, im Körper zu dispergieren oder kann die Welle nicht in einer Weise reflektiert werden, daß sie die ihr innewohnende Energie wieder an den Stoßpunkt zurückbringen kann, wird eine Starrkörpernäherung falsche Resultate erbringen. Dieser Fall ist zum Beispiel beim zentralen Stoß dünner Stäbe und beim „Mehrkugenspiel“ erfüllt.

Um zu entscheiden, ob die Ausbreitung von Festkörperwellen berücksichtigt werden muß, sind zwei Kriterien zu beachten:

1. Wesentlich ist die Form der beteiligten Körper: Können die Wellen den Körper ungestört durch Querschnittsänderungen, Bohrungen und andere Hindernisse durchlaufen und auch wieder gut reflektiert werden, ist mit Einflüssen durch Wellen zu rechnen. Stäbe die in Stabachsenrichtung gestoßen werden und Kugeln erfüllen diese Bedingung gut. In unregelmäßig geformten Körpern wird die den Wellen innewohnende Energie durch teilweise Reflektion und Streuung schnell gleichmäßig im Körper verteilt und ein starrkörperähnliches Verhalten stellt sich ein.
2. Ist die Kontaktzeit, die man durch eine Abschätzung mit einem lokalen elastischen Modell gewinnen kann, so kurz, daß in dieser Zeit die Stoßwelle nur wenige Male im Körper hin- und herlaufen kann, ist mit Welleneinflüssen zu rechnen. Voraussetzung ist jedoch, daß gemäß Punkt 1. die Wellen auch nach einem oder mehreren Durchläufen durch den Körper noch als lokale Ereignisse erhalten geblieben sind.

In der Arbeit [79] werden die wesentlichen Effekte wellendominierter Stöße untersucht und auch ihre Übergangsbereiche zur klassischen Starrkörper-Stoßtheorie erfaßt. Besonders geeignet ist das Beispiel, bei dem zwei Rundstäbe unterschiedlicher Länge mit fluchtenden Achsen aufeinanderstoßen. Der erste Stab mit der Masse m prallt mit der Geschwindigkeit v_0 auf den zweiten ruhenden Stab mit doppelter Länge und Masse. Zwischen den Stäben ist ein Feder-Dämpferpaar angebracht, das durch Variation der Parameter alle Kontakteigenschaften darstellen kann. In den im folgenden dargestellten Berechnungen ist diese Steifigkeit in einem Bereich variiert,

der von einer weichen Zwischenlage über die Steifigkeiten, die bei einem Hertz'schen Kontakt balliger Stabenden auftreten bis zum perfekten Starrkörperkontakt reicht.

Berechnet man diesen Stoß mit einem klassischen Impulsstoßgesetz (Newton und Poisson liefern in diesem Fall die gleichen Ergebnisse) erhält man

$$v_1 = \frac{1}{3}(1 - 2\varepsilon)v_0 \quad (2.37)$$

$$v_2 = \frac{1}{3}(1 + \varepsilon)v_0 \quad (2.38)$$

mit v_1 als Geschwindigkeit des zunächst ruhenden Körpers nach dem Stoß und v_2 für den stoßenden Körper. Die Stoßzahl sei ε .

Bei Verwendung des idealen Wellenmodells, wie es in [69] dargestellt wird, spielen sich in den Körpern folgende Vorgänge ab (siehe hierzu auch Bild 2.4):

1. Ausgehend von dem Kontaktpunkt laufen zwei Kompressionsfronten durch die Stäbe. Die Punkte im stoßenden Körper die die Welle passiert hat, sind auf die halbe Geschwindigkeit abgebremst. Die Welle im gestoßenen Körper beschleunigt jeden Massenpunkt, an dem sie vorbeigelaufen ist, auf die halbe Stoßgeschwindigkeit.
2. Die Welle im stoßenden Körper erreicht das freie Ende und wird dort als Expansionsfront reflektiert und läuft zurück. Die passierten Bereiche haben die Geschwindigkeit 0. Im gestoßenen Körper läuft weiter eine Kompressionswelle nach vorne.
3. Die Expansionsfront erreicht den Kontaktpunkt und kann, da dort ein Kompressionsdruck herrscht, in den gestoßenen Stab übertreten². Der stoßende Stab ist jetzt in Ruhe und die Kontaktstelle spannungsfrei.
4. Die Kompressionsfront im vorderen Stab hatte dessen Ende erreicht und wurde dort reflektiert. Nun laufen zwei gegenläufige Expansionswellen durch den gestoßenen Stab. Sobald die erste dieser Wellen den Kontaktpunkt erreicht, tritt endgültig die Separation der Körper ein, da die Expansionsfront in der spannungsfreien Kontaktstelle nicht übertragen werden kann.
5. Wird keine Energie im gestoßenen Stab dissipiert, laufen in diesem zwei gegenläufige Fronten ständig hin und her. Die mittlere Geschwindigkeit aller Massenelemente ist gleich der halben Stoßgeschwindigkeit. Damit ist die globale Impulsbilanz erfüllt.

²Es scheint zunächst ungewöhnlich, daß eine Zugwelle über einen rein auf Druck belastbaren Kontakt hinweglaufen kann. Das ist aber trotzdem sinnvoll. Wenn man annimmt, daß eine Zugwelle nicht übertragen werden kann und sofort Separation der Körper eintritt, läuft eine Entlastungswelle von der zuvor unter Spannung stehenden Kontaktstelle in den gestoßenen Stab, was mit der übertragenen Zugwelle identisch ist.

Die vom stoßenden Körper eingebrachte kinetische Energie ist vollständig in den gestoßenen Körper übergegangen, dort aber zum Teil als potentielle Energie gespeichert. An den Stoßfronten wird ständig potentielle Energie in kinetische umgewandelt und umgekehrt. Im Grenzzustand, wenn sich die beiden Fronten gerade in der Mitte treffen, ist zwar die potentielle Energie vollständig in kinetische umgewandelt, jedoch steht dann die eine Stabhälfte während sich die andere bewegt, was sofort zu einer Art innerem Stoß führt, der neue Fronten mit der Folge potentieller Energie auslöst (Übergang Phase 4 – Phase 5).

Wenn die Stoßfronten durch Dispersion und Dissipation verschmiert werden und schließlich verschwinden, bewegt sich der Gesamtkörper mit gleichförmiger Geschwindigkeit wie ein Starrkörper. Die Hälfte der ursprünglichen Energie ist dann dissipiert worden.

Die geschilderten Vorgänge sind in Bild 2.4 dargestellt. Die Phasen entsprechen den oben verwendeten Aufzählungsnummern.

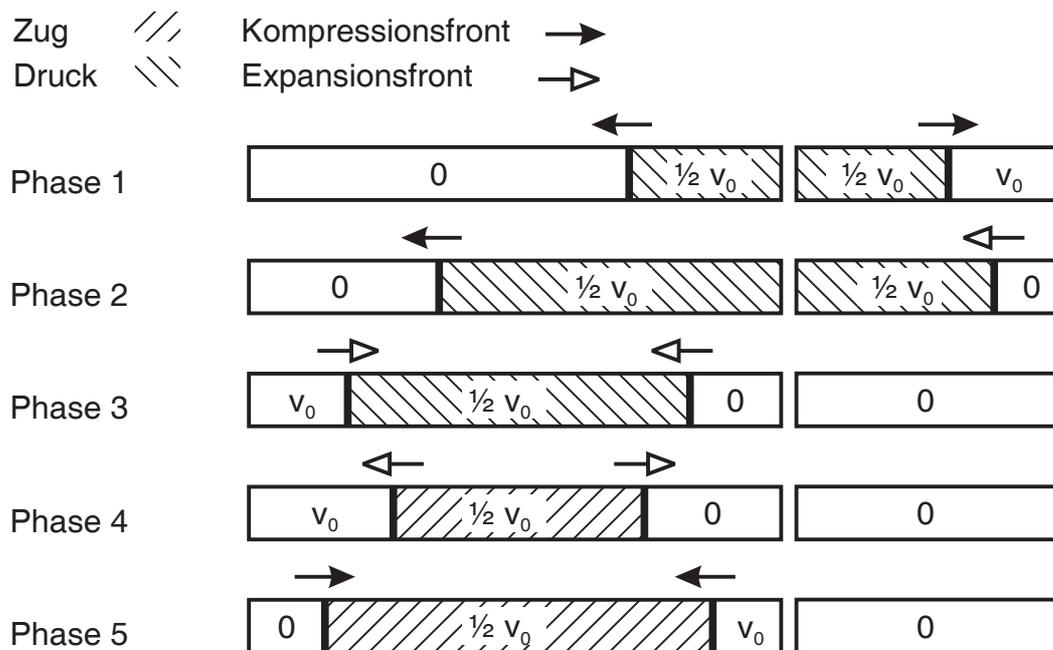


Bild 2.4: Ausschließlich durch Stoßwellen beeinflusster Stoß zweier Zug-Druckstäbe

In den Bildern 2.5 und 2.6 sind die gemittelten Geschwindigkeiten der Stäbe nach dem Stoß in Abhängigkeit der Variation der Federsteifigkeit im Kontaktpunkt dargestellt. Bild 2.5 stellt dabei die Ergebnisse des gestoßenen, Bild 2.6 die Ergebnisse für den stoßenden Stabes dar. Bei den Kurven 1 hat das Kontaktelement keine Dämpfung, bei den Kurven 2 wird ein viskoelastisches Kraftelement verwendet. Die Bereiche der Geschwindigkeiten mit niedrigen Steifigkeiten entsprechen genau den Ergebnissen, die mit dem Impulsmodell gemäß den Gleichungen (2.37) und (2.38)

gewonnen werden können ($v_0 = -4$ m/s). Die Kontaktzeit dauert so lange, daß sich in den Körpern der Starrkörperbewegungszustand voll ausbilden kann. Bei starker Dämpfung verhält sich das System wie bei einem plastischen Stoß. Erhöht man die Steifigkeit, fallen der plastische und der elastische Fall zusammen und konvergieren gegen das Ergebnis der Wellenberechnung, die vorhersagt, daß der stoßende Stab stehen bleibt und der gestoßene Stab sich mit $v_2 = 1/2v_0$ wegbewegt.

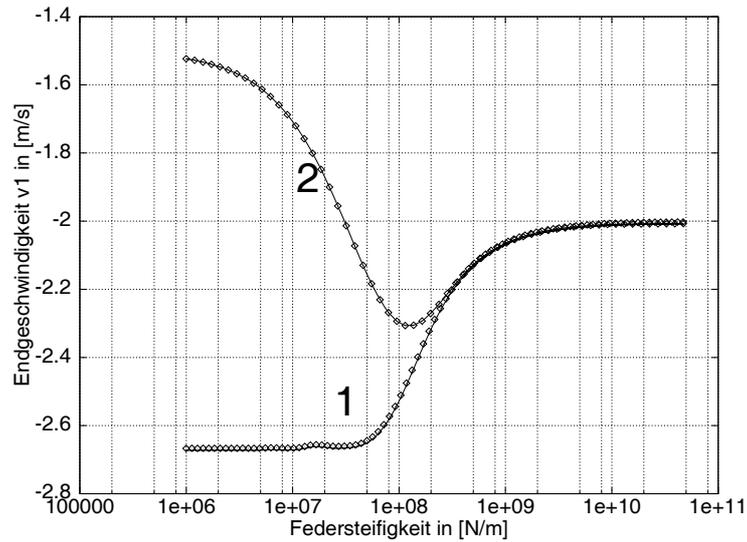


Bild 2.5: Gemittelte Abhebegeschwindigkeit des gestoßenen Stabes, Kurve 1 ohne, Kurve 2 mit Dämpfung, entnommen aus [79]

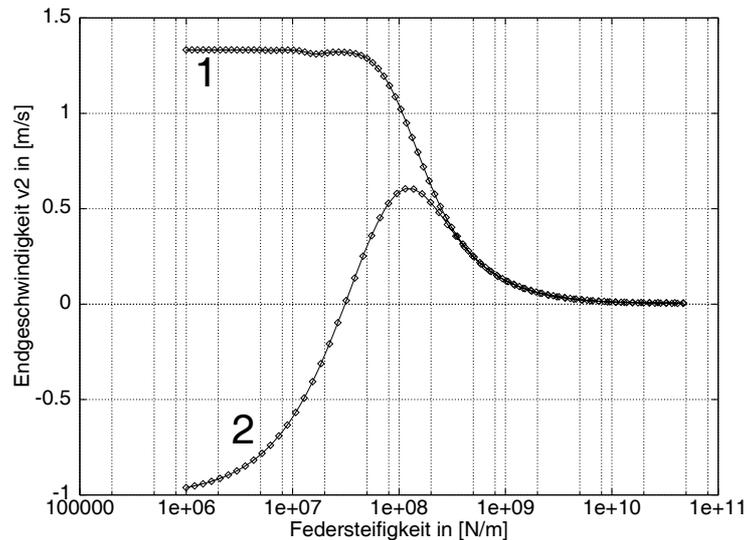


Bild 2.6: Gemittelte Abhebegeschwindigkeit des stoßenden Stabes, Kurve 1 ohne, Kurve 2 mit Dämpfung, entnommen aus [79]

Der Bereich der Steifigkeit, der bei der Annahme von Hertz'schem Kontakt von zwei

balligen Stabenden, erreicht würde, liegt bei diesem Beispiel in Abhängigkeit vom Balligkeitsradius zwischen $4 \cdot 10^8$ N/m und $1 \cdot 10^{10}$ N/m. Das heißt, Stöße mit dieser technischen Realisierung liegen immer im Übergangsbereich, der weder durch ein reines Wellenmodell, noch durch das Starrkörpermodell befriedigend gut beschrieben werden kann. Ist der Kontakt durch schlechte Oberflächen oder Zwischenschichten (Öl) noch weicher, ähnelt das Ergebnis immer mehr dem klassischen Starrkörperstoß.

Die Grenze jeglicher Stoßmodellierung ist erreicht, wenn die Annäherungsgeschwindigkeit der Körper größer als ihre Körperschallgeschwindigkeit ist und ein starkes Eindringen mit kontinuierlichem Abbremsen nicht möglich ist. Das hat zur Folge, daß die Partikel des stoßenden Körpers sich schneller an die Stoßstelle annähern als die Information des Kraftereignisses sich zu ihnen ausbreiten kann. Diese Kollision hat eine Zerstörung des stoßenden Körpers zur Folge. Derartige Phänomene treten beim Einschlag von ballistischen Projektilen auf. Ein anderer Typ derartiger Stöße sind die Einschläge von Meteoriten auf der Erde, die typischerweise mit Geschwindigkeiten von 10–50 km/s auf der Erdoberfläche eintreffen, was deutlich über der Schallgeschwindigkeit in Gesteinskörpern liegt.

Zusammenfassend läßt sich sagen: Wellenvorgänge können grundsätzlich andere Stoßeffekte hervorrufen, als es Starrkörpermodelle vorhersagen. Ob in einem System derartige Effekte eine Rolle spielen, kann durch den Vergleich des Wellenlaufzeit in einem stoßenden Körper mit der Stoßzeit, gewonnen mit einer geeigneten Kontaktsteifigkeit, ermittelt werden. Wesentlich für die Gültigkeit des Wellenmodells ist aber eine einwandfreie Reflektion innerhalb des Körpers. Findet diese nicht statt, wird die Welle schnell im Inneren des Körpers gestreut, und eine starrkörperartige Geschwindigkeitsverteilung stellt sich ein.

Prinzipiell sind alle derartigen Effekte auch für Stöße mit Reibung denkbar, bei denen sich dann Schubwellen in den Körpern ausbreiten. Der Autor ist jedoch der Ansicht, daß in technisch relevanten Systemen diese Effekte nicht auftreten.

Kapitel 3

Das Stoßgesetz auf Impulsebene

In diesem Kapitel soll die Formulierung des Stoßgesetzes auf Impulsebene dargestellt werden. Dieses Gesetz kommt zum Einsatz, wenn bei der Berechnung des Zeitverhaltens eines oder mehrerer Körper ein Kontaktereignis mit negativer Relativgeschwindigkeit festgestellt wird, und nach den im Kapitel 2 dargestellten Kriterien eine Impulsmodellierung zulässig ist.

Zunächst werden die vorhandenen Basisstoßgesetze diskutiert. Im Abschnitt 3.3 wird der Übergang von der zeitkontinuierlichen Mehrkörpersystems simulation auf das Stoßereignis dargestellt. In den folgenden Abschnitten wird die Formulierung der Kompressionsphase und zwei Varianten der Expansionsphase vorgestellt.

3.1 Modellvorstellung zeitdiskreter Stoßgesetze

Ein Stoß ist in der Natur immer ein zeitlich und örtlich kontinuierlicher Vorgang, der bei einem Impulsmodell gedanklich in eine zeitlich unstetige Stoßübergangsgleichung komprimiert wird. Ein weiteres Vereinfachungsziel ist immer auch, den Stoß, der durch lokale Abplattung immer auf eine ganze Kontaktzone einwirkt, auf einen Kontaktpunkt zu reduzieren.

Während der kurz erscheinenden Kontaktzeit können in einem Stoßkontakt mehrere sich zeitlich überlappende und beeinflussende Prozesse gleichzeitig ablaufen und zu verschiedenen Zeiten beginnen und enden. Beispiel dafür sind Haft-Gleit-Übergänge, die während eines Stoßes mehrfach auftreten können.

Um ein Stoßgesetz zu entwickeln, ist es deshalb sinnvoll, den eigentlich gewünschten Starrkörpercharakter der Körper zunächst aufzugeben und lokale Kräftelemente im Kontaktpunkt einzuführen. Dadurch kann man den stetigen Kontaktvorgang in seinen Phasen und Ablaufvarianten verfolgen und die möglichen Endzustände untersuchen.

Ist es möglich, die denkbaren Endzustände mit guter Näherung nur in Abhängigkeit des Anfangszustandes des Stoßes darzustellen, kann man den kurzen kontinuierlichen auf einen infinitesimalen unstetigen Prozeß reduzieren. Im Abschnitt 3.4 wird

diese Modellvorstellung verwendet um die Vorgänge beim tangentialreversiblen Stoß darzustellen.

3.2 Elementare Stoßgesetze

Im Lauf der Geschichte der Mechanik sind mittlerweile zahlreiche Stoßgesetze vorgeschlagen worden, die einen unmittelbaren Übergang von „vorher“ zu „nachher“ ermöglichen, ohne eine explizite Zeitauflösung des Stoßes vornehmen zu müssen. Letztlich basieren alle diese Gesetze auf drei Stoßhypothesen, die hier kurz vorgestellt werden sollen.

- Das sogenannte Newton'sche Stoßgesetz:
Es fordert, daß die Abhebegeschwindigkeit zweier stoßender Körper in einem festen Verhältnis zu der Kollisionsgeschwindigkeit steht. Dieses einfache Gesetz hat die Schwäche, daß die Effekte nicht-zentraler, reibungsbehafteter Stöße nicht dargestellt werden können und auch Mehrfachstöße nicht sinnvoll modellierbar sind. Der Vorteil dieses Gesetzes besteht darin, daß es zu keinen kinematischen Unverträglichkeiten kommen kann und die Dissipativität des Gesetzes immer eindeutig ist. Dieses Stoßgesetz kommt ohne die Verwendung von Kraftgrößen aus und hat den Charakter einer kinematischen Zwangsbedingung auf Geschwindigkeitsebene. Es ist somit ein rein kinematisches Gesetz.
- Das sogenannte Poisson'sche Stoßgesetz:
Dieses Gesetz setzt zunächst die Aufteilung des Stoßes in eine Kompressions- und Expansionsphase voraus. Die zentrale Aussage des Gesetzes ist, daß ein bestimmter Anteil des Impulses, der an einer Kontaktstelle zur Abbremsung der Körper in der Kompressionsphase wirken muß, in der Expansionsphase dort erneut wirkt und so die Separation der Körper einleitet. Die Berechnung der Geschwindigkeitsänderungen geschieht auf der Basis von Impulsbilanzen, das heißt, verschiedene Bindungen können sich gegenseitig beeinflussen und die Reibung in einem Stoßkontakt kann auch das Abheben in Normalenrichtung beeinflussen. Für eine Klasse von Stoßkonfigurationen liefert das Poisson-Gesetz die gleichen Resultate wie das Newton'sche Gesetz, ist aber in der Lage, auch eine große Klasse von weiteren Konfigurationen zu beschreiben. Der wesentliche Nachteil dieses Gesetzes in seiner Urform besteht darin, daß es bei Mehrfachstößen das Abheben der Körper voneinander nicht immer gewährleistet. Das Poisson'sche Gesetz ist ein rein dynamisches Stoßgesetz.
- Stoßgesetze auf Energiebasis:
Es existieren mehrere Ansätze, die Stoßgleichungen auf der Basis der Energie, die während des Stoßes umgewandelt oder dissipiert wird, zu formulieren. Diese Gesetze haben den Nachteil, daß sie letztlich nur eine Gleichung (Energiebilanz) zur Verfügung haben, mit denen in einem Stoßkontakt sowohl Aussagen zur Normal- als auch zur Reibrichtung getroffen werden sollen. Besonders problematisch werden diese Gesetze bei Mehrfachstößen.

Sowohl das Newton'sche als auch das Poisson'sche Stoßgesetz sind ursprünglich für den zentralen Stoß von zwei Körpern entwickelt worden und liefern dort, wie auch der Energieansatz, identische Resultate. Bei der Anwendung dieser Gesetze auf Stöße mit Reibungseffekten und auf Mehrfachstöße scheint das Poissongesetz die größten „Reserven“ zu enthalten.

Ein eher anschaulicher Vorteil des Poisson-Gesetzes läßt sich wie folgt darstellen: die Basis der Formulierung des Stoßgesetzes ist identisch mit der der Bewegungsgleichungen vor und nach dem Stoß:

1. Kräfte (Kraftstöße) sind die Ursache von Bewegungen.
2. Kräfte (Kraftstöße) ergeben sich aus Gesetzen, die vom Bewegungszustand und der Zeit abhängen.

Diese Prinzipien der Mechanik gelten auch während des Stoßes, und man ist deshalb nicht auf die integrierte Größe Energie angewiesen.

Wägt man die beschriebenen Vor- und Nachteile der Gesetze gegeneinander ab, scheint das Poisson'sche Gesetz am besten geeignet zu sein, eine große Klasse verschiedener Stoßtypen zu beschreiben. Der Nachteil, daß nach Stoßende ein Eindringen der Körper auftreten kann, läßt sich, wie im folgenden gezeigt wird, durch die Einführung einer einseitigen Bindung verhindern.

3.3 Übergang von der kontinuierlichen Zeitentwicklung zum Stoß

Ein allgemeines Mehrkörpersystem mit einseitigen Bindungen kann sich in vielen verschiedenen Bindungskonfigurationen befinden. Ein Stoß findet zunächst an einem oder mehreren Kontaktpunkten statt, den aktuellen Stoßkontakten. Während des Stoßes wirken Impulse, die sich über die, nach wie vor im Gesamtsystem gültigen Impulsbilanzen, an allen anderen geschlossenen Kontakten bemerkbar machen können und dort zu Änderungen in der Bindungskonfiguration führen können. So ist es ohne weiteres denkbar, daß ein Stoß an einer Stelle im System zu Haft-Gleit-Übergängen oder zum Abheben von Normalbindungen an anderen einseitigen Bindungen führt. Aus diesem Grund müssen bei der Formulierung der Stoßgleichungen nicht nur die aktuellen Stoßkontakte, sondern auch alle anderen geschlossenen Bindungen im System berücksichtigt werden.

Zu diesem Zeitpunkt t_0 des Stoßes sind folgende Größen des gebundenen Mehrkörpersystems bekannt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_A & : \text{Lagen aller generalisierten Koordinaten} \\
\dot{\mathbf{q}}(t_0) = \dot{\mathbf{q}}_A & : \text{Geschwindigkeiten aller generalisierten Koordinaten} \\
\mathbf{M}(\mathbf{q}_A, t_0) = \mathbf{M} & : \text{Massenmatrix des Systems} \\
\mathbf{W}_N & : \text{Jacobi-Matrix der aktiven Normalbindungen} \\
\mathbf{W}_T & : \text{Jacobi-Matrix der aktiven Tangentialbindungen} \\
\tilde{\mathbf{w}}_N, \tilde{\mathbf{w}}_T & : \text{nichtlineare Terme der Bindungen}
\end{aligned}$$

Der Stoß wird in zwei Phasen aufgeteilt: die Kompressions- und die Expansionsphase. In der Kompressionsphase wird die normale Annäherungsbewegung der Stoßpartner in den aktuellen Stoßkontakten gestoppt. Zusätzlich können in anderen geschlossenen Bindungen Zwangsimpulse wirken. Am Ende der Kompressionsphase ist ein Teil der vor dem Stoß im System vorhandenen kinetischen Energie in Form von potentieller Energie im System gespeichert.

In der Expansionsphase wird die zuvor gespeicherte Energie wieder über die wirkenden Expansionsimpulse in kinetische Energie zurückverwandelt. Dabei ist zu berücksichtigen, daß Teile der Energie dissipiert werden, am Ende kein Eindringen der Kontaktpartner stattfinden darf und das Reibgesetz im Kontakt nicht verletzt werden darf.

Hier kann noch zwischen zwei Stoßtypen unterschieden werden:

- Beim tangentialreversiblen Stoß wird ein Teil der Energie auch in die tangential Richtung zurückgespeichert. Im Grenzfall eines „tangentialplastischen“ Stoßes wirkt während der Expansionsphase kein Tangentialimpuls.
- Beim reinen Reibstoß wird in tangentialer Richtung keine Energie gespeichert. Am Reibkontakt herrscht während der gesamten Stoßzeit das Coulomb'sche Reibgesetz.

Für beide Varianten ist die Beschreibung der Kompressionsphase identisch, die Expansionsphase unterscheidet sich. Im Fall des zentralen Stoßes sind der vollständig tangentialplastische und der reine Reibstoß identisch. Ein einfaches Beispiel für ein System, bei dem sich diese Stoßtypen unterscheiden wird in 4.3 vorgestellt und diskutiert.

3.4 Vorüberlegungen zum Energieumsatz

In diesem Abschnitt soll der prinzipielle Ablauf eines Stoßes mit einem anschaulichen Modell für die verschiedenen Phasen dargestellt werden. Auch wenn im Abschnitt 3.2 die Energie zunächst aus dem Stoßgesetz verbannt wurde, so soll sie hier verwendet werden, um die physikalischen Vorgänge besser erläutern zu können.

Der Stoß soll gemäß der Modellvorstellung in Abschnitt 3.1 betrachtet werden: Während des Stoßes befindet sich zwischen den Körpern ein Kraftelement, das aus zwei viskoelastischen Subelementen in Normal- und Tangentialrichtung zusammengesetzt

ist. In diesem Element seien die gedachten Nachgiebigkeiten beider Stoßpartner vereint. Ein tatsächlicher Kontakt herrscht nur an einem Reibelement mit Coulomb'scher Reibcharakteristik. Damit untersucht man den Prozeß gedanklich als stetigen Vorgang mit allen Haft-Gleit-Übergängen sowie Speicherungs- und Entspeicherungsprozessen von Energie. Die am Ende dieser Überlegungen verbleibenden Geschwindigkeitsdifferenzen dienen zur Reduktion des Stoßgesetzes auf einen diskreten Geschwindigkeitssprung. In Bild 3.1 sind prinzipielle mögliche Abläufe im Stoßkontakt dargestellt.

Die Körper berühren sich im Moment des Stoßes am *Kontaktpunkt*. Vernachlässigt man später die Weiterbewegung der Körper während dem Stoß, ist dies der Kontaktpunkt des Starrkörpermodells. Für die stetige Betrachtung ist es der Punkt der ersten Berührung. Im Verlauf des Stoßes kommen zwei für die Beschreibung wichtige Teilpunkte hinzu: Der *Körperpunkt* und der *Reibpunkt*. Der Körperpunkt ist der Punkt, an dem das gedachte Kraftelement angeheftet ist. Die Kräfte (Impulse) wirken weiterhin auf den Kontaktpunkt, während sich der Reibpunkt relativ zum Körperpunkt verschiebt und damit die Auslenkung des Kraftelements darstellt.

Im Coulomb'schen Reibelement herrscht zu Beginn des Stoßes, abgesehen von der Ausnahme des völlig reibungsfreien Falles, immer Haften, da es nicht massebehaftet ist und das Tangentialelement zunächst entspannt ist. Im Verlauf der Kompressionsphase steigt die Tangentialkraft wie auch die Normalkraft an. Der Reibkontakt kann entweder losreißen oder weiterhin haften bleiben. Die Entscheidung darüber hängt von dem Reibkoeffizienten, der Kontaktgeometrie, dem Verhältnis der Anfangsgeschwindigkeiten und von der projizierten Massenverteilung des stoßenden Systems ab. Am Ende der Kompressionsphase ist das Normalkraftelement maximal komprimiert und die Annäherungsgeschwindigkeit der Körper zum Stillstand gekommen. Ein Teil der kinetischen Anfangsenergie des Systems ist nun in Form elastischer potentieller Energie gespeichert. (Erste Zeile von Bild 3.1)

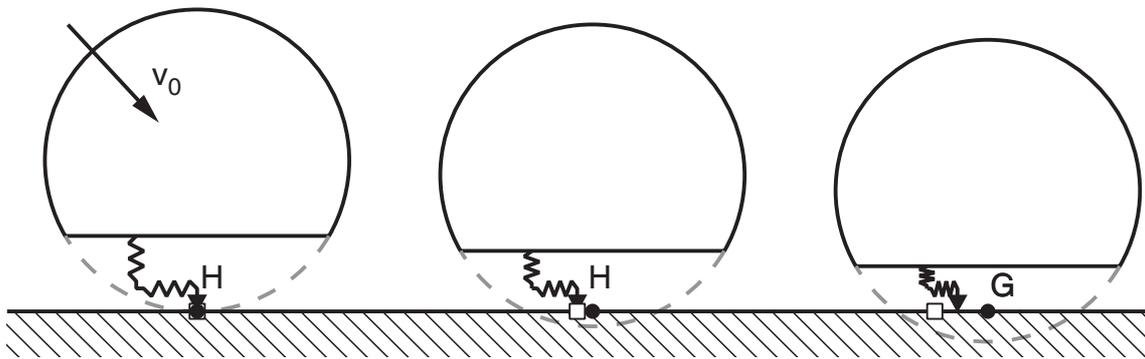
In tangentialer Richtung sind mehrere Zustände denkbar:

- Der Reibkontaktpunkt haftet und der Körperpunkt ist auch in tangentialer Richtung zum Stillstand gekommen.
- Der Reibkontaktpunkt haftet, der Körperpunkt bewegt sich noch.
- Der Reibkontaktpunkt gleitet, und der Körperpunkt bewegt sich.

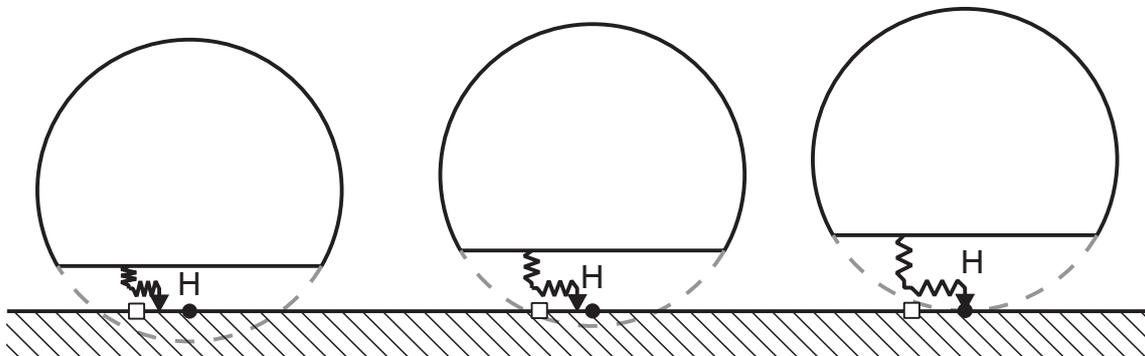
In allen Fällen ist in dem tangentialen Kraftelement ein Teil der kinetischen Energie in Form von Verformungsenergie gespeichert. Da die Beschreibung des Stoßes aber nur einen Punkt berücksichtigen kann, bezieht sich die Aussage „Haften am Ende der Kompressionsphase“ eigentlich auf den Reibpunkt, obwohl nur der Körperpunkt betrachtet wird.

In der Expansionsphase können sich ähnliche Zustände einstellen. Ein besonders „gutartiger“ Fall tritt ein, wenn die Kompressionsphase mit Haften im Reibpunkt und Stillstand des Körperpunktes endet: In der Expansionsphase kann nun ein Teil der gespeicherten Energie durch Entspannung sowohl des normalen als auch des

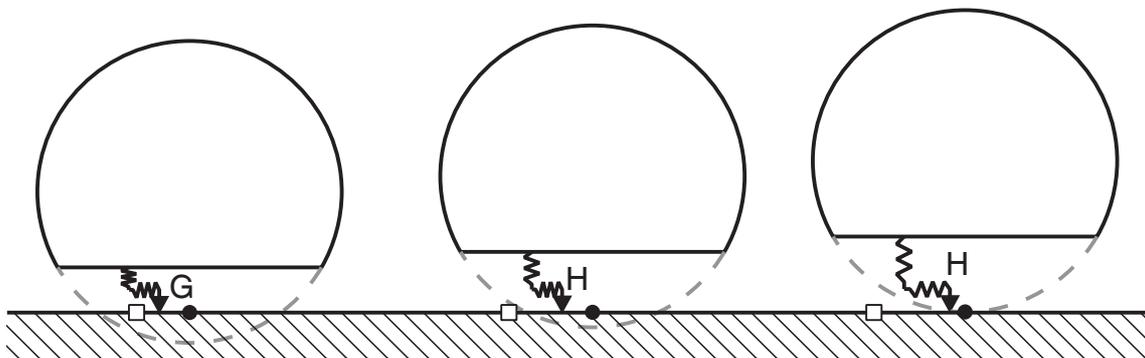
Kompressionsphase



Expansionsphase mit Umkehrung



Expansionsphase mit Geschwindigkeitsdifferenz



- Körperpunkt ●
- Reibpunkt ▼
- Kontaktpunkt □
- Haften im Kont. H
- Gleiten im Kont. G

Bild 3.1: Prinzipielle Stoßabläufe

tangentialen Kraftelements entspeichert und wieder in kinetische Energie zurückverwandelt werden (Zweite Zeile von Bild 3.1). Im günstigsten Fall kommen sogar im Moment des Abhebens die drei Punkte wieder zur Deckung.

Ein anderer gutartiger Fall ist das kontinuierliche Gleiten während der Expansionsphase: Nach kurzer Vorspannung des tangentialen Kraftelements in der Kompressionsphase gleitet es mit maximaler Reibkraft im Reibpunkt. Reibpunkt und Körperpunkt haben keine Relativgeschwindigkeit. Da man sowieso nur Geschwindigkeiten betrachtet, spielt dies jedoch keine Rolle. Der Lagefehler, der durch die kontinuierliche Weiterbewegung des Körpers während des Stoßes entsteht, wird aufgrund der Annahme „vernachlässigbare Bewegungen der Körper während des Stoßes“ (Abschnitt 2.5) billigend in Kauf genommen.

Ein widersprüchlicher Fall stellt sich ein, wenn während der Expansionsphase der zu Beginn gleitende Reibpunkt zum Stillstand kommt. Die im Tangentialelement gespeicherte Energie kann trotzdem dazu führen, daß sich der Körperpunkt am Stoßende bewegt, obwohl die Kraftbilanz für den Reibpunkt Haften verlangt. Dieser Fall ist durchaus nicht unwahrscheinlich. Um auch hier sinnvolle Resultate zu erzielen, muß mit einem Trick das Coulomb'sche Reibgesetz modifiziert werden. Diese Modifikation wird in Abschnitt 3.6.3 erläutert und durch Gleichung (3.26) realisiert (Dritte Zeile von Bild 3.1). Danach ist es dem Körper möglich, am Stoßende eine Relativgeschwindigkeit gegenüber dem Stoßpartner zu haben, obwohl das Reibelement im Reibpunkt haftet.

3.5 Kompressionsphase

Zur Berechnung der Kompressionsphase sind zwei Klassen von Gleichungen erforderlich: einerseits die Impulsbilanz über alle Körper sowie die Projektionsgleichungen, die die Effekte im Stoßpunkt in die Richtung der generalisierten Koordinaten projizieren und umgekehrt, andererseits die sogenannten Stoßgesetze, welche einen Zusammenhang zwischen kinematischen Zuständen und wirkenden Stoßimpulsen herstellen.

3.5.1 Kinematik- und Impulsgleichungen

Die Kompressionsphase beginnt mit dem Kontakt der Körper an dem oder den aktuellen Stoßkontakten. Damit ist für eine Reihe von Kontaktpunkten i die Bedingung $g_{NA,i}(\mathbf{q}_A, t_0) = 0$ erfüllt. Der Index A kennzeichnet dabei den Zustand zu Beginn des Stoßes. Mit der Kinematikgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{g}}_{NA} \\ \dot{\mathbf{g}}_{TA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N^T \\ \mathbf{W}_T^T \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_A + \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_N \\ \tilde{\mathbf{w}}_T \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

können die Vektoren der Relativgeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{g}}_{NA}$ in normaler und $\dot{\mathbf{g}}_{TA}$ in tangentialer Richtung bestimmt werden. Während der Kompressionsphase gilt die Im-

pulsbilanz für alle Körper in folgender Form:

$$\mathbf{M}(\dot{\mathbf{q}}_C - \dot{\mathbf{q}}_A) = \mathbf{W}_N \mathbf{A}_{NC} + \mathbf{W}_T \mathbf{A}_{TC} \quad (3.2)$$

Dabei bedeuten \mathbf{A}_{NC} und \mathbf{A}_{TC} die normalen und tangentialen Impulse, die während der Kompressionsphase in den geschlossenen Kontakten wirken und durch die Jacobimatrizien \mathbf{W}_N und \mathbf{W}_T aus den Eingriffsrichtungen in die Richtungen der generalisierten Koordinaten projiziert werden. Am Ende der Kompressionsphase lauten die generalisierten Koordinaten des Systems $\dot{\mathbf{q}}_C$.

Für die Formulierung des Stoßgesetzes sind die Relativgeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{g}}_{NC}$ und $\dot{\mathbf{g}}_{TC}$ am Ende der Kompressionsphase wichtig. Man berechnet sie über eine zu Gleichung (3.1) äquivalente Projektionsgleichung:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{g}}_{NC} \\ \dot{\mathbf{g}}_{TC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N^T \\ \mathbf{W}_T^T \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_C + \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_N \\ \tilde{\mathbf{w}}_T \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Durch Verknüpfung der Gleichungen (3.1) und (3.3) erhält man eine Form, die direkt die Änderung der Relativgeschwindigkeiten zueinander in Beziehung setzt:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{g}}_{NC} \\ \dot{\mathbf{g}}_{TC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N^T \\ \mathbf{W}_T^T \end{pmatrix} (\dot{\mathbf{q}}_C - \dot{\mathbf{q}}_A) + \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{g}}_{NA} \\ \dot{\mathbf{g}}_{TA} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Die Terme $\tilde{\mathbf{w}}_N$ und $\tilde{\mathbf{w}}_T$ sind in dieser Differenz verschwunden. Dies ist auch physikalisch erklärbar: Die $\tilde{\mathbf{w}}$ hängen nur von \mathbf{q} , t und anderen konstanten Größen ab. Diese bleiben jedoch während des Stoßes unverändert.

Die Impulsgleichung (3.2) löst man nach $\dot{\mathbf{q}}_C - \dot{\mathbf{q}}_A$ auf, setzt sie in die Kinematikgleichung (3.4) ein und erhält die in die Normal- und Tangentialrichtung projizierte Impulsbilanz:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{g}}_{NC} \\ \dot{\mathbf{g}}_{TC} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{W}_N^T \\ \mathbf{W}_T^T \end{pmatrix} \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N \\ \mathbf{W}_T \end{pmatrix}^T}_{\mathbf{G}} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{NC} \\ \mathbf{A}_{TC} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{g}}_{NA} \\ \dot{\mathbf{g}}_{TA} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Dabei faßt man die quadratische Form aus Jacobi- und inverser Massenmatrix zu der *projizierten Massenwirkungsmatrix* \mathbf{G} zusammen. Sie ist eine quadratische, symmetrische Matrix, die im Fall abhängiger Bindungen positiv semidefinit sonst positiv definit ist. Im folgenden wird von der Aufteilung dieser Matrix in vier Blockuntermatrizen

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{NN} & \mathbf{G}_{NT} \\ \mathbf{G}_{TN} & \mathbf{G}_{TT} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{G}_{ij} = \mathbf{W}_i^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{W}_j, \quad i, j \in \{N, T\} \quad (3.6)$$

Gebrauch gemacht. \mathbf{G}_{NN} und \mathbf{G}_{TT} haben die gleichen Eigenschaften wie \mathbf{G} , die Nebendiagonalblockmatrizen sind ebenfalls quadratisch und es gilt $\mathbf{G}_{NT} = \mathbf{G}_{TN}^T$.

Die projizierte Massenwirkungsmatrix gibt, anschaulich betrachtet, Aufschluß darüber, welche Bewegungsänderungen das System infolge der Impulswirkung in eine der projizierten Stoßrichtungen erfahren wird.

Gleichung (3.5) erlaubt es nun, aus den bekannten Anfangsgeschwindigkeiten und den in der Kompressionsphase wirkenden Impulsen den Zustand am Ende dieser Phase zu berechnen. Um dies durchführen zu können, ist es außerdem erforderlich, die Beziehungen zwischen Impulsen und Geschwindigkeiten im sogenannten Stoßgesetz zu erfassen. Dabei ist eine Unterscheidung zwischen einem Gesetz für die normalen und die tangentialen Richtung sinnvoll.

3.5.2 Normales Stoßgesetz

Die Kompressionsphase ist dadurch definiert, daß an ihrem Ende die normale Relativgeschwindigkeit aller einseitigen Bindungskontakte größer oder gleich null ist ($\dot{g}_{N,i} \geq 0$). Dabei können in allen Kontakten, in denen die Relativgeschwindigkeit $\dot{g}_{N,i} = 0$ ist, auch Impulse $\Lambda_{N,i} \geq 0$ gewirkt haben. In Kontakten, die bereits am Ende der Kompressionsphase eine Separationsgeschwindigkeit haben, sollen aber keine Impulse wirken. Dieses Phänomen tritt jedoch nur bei Mehrfachstößen auf. Die normalen Kompressionsimpulse und die Relativgeschwindigkeiten bilden somit ein komplementäres Paar von Vektoren, für die gilt:

$$\dot{g}_{NC} \geq 0, \quad \Lambda_{NC} \geq 0, \quad \dot{g}_{NC} \cdot \Lambda_{NC} = 0 \quad (\text{komponentenweise}) \quad (3.7)$$

Stellt man diesen Zusammenhang graphisch dar, erhält man eine „Ecke“, wie er im linken Teil von Bild 3.2 dargestellt ist.

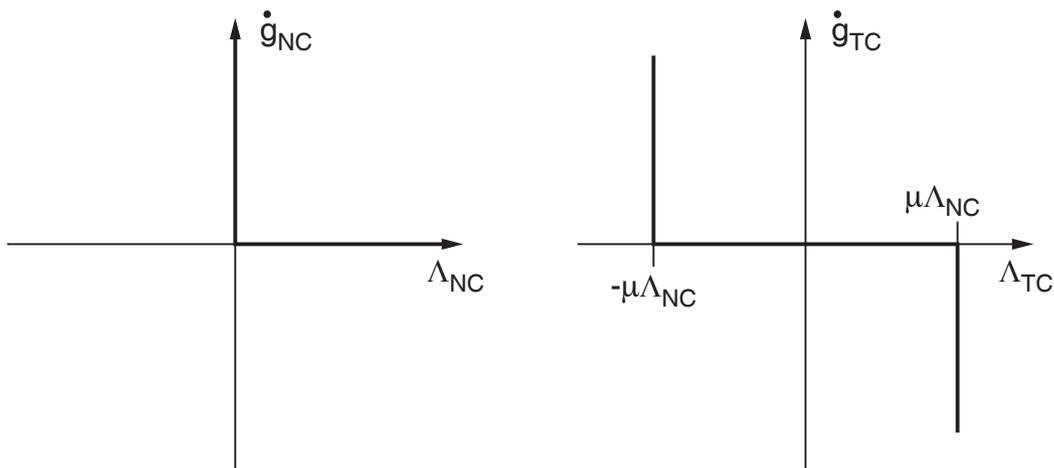


Bild 3.2: Graphische Darstellung des normalen und tangentialen Stoßgesetzes für die Kompressionsphase mit komplementären Kennlinien

3.5.3 Tangentiales Stoßgesetz

Das Verhalten der beiden Stoßpartner in tangentialer Richtung wird durch die Reibung im Kontakt der Körper bestimmt. Mit welchen Einschränkungen das Coulomb'sche Reibgesetz auch auf Impulsebene gültig ist, kann in [22] Seite 111ff. nachgelesen werden. Am Ende der Kompressionsphase sind in jedem Stoßkontakt drei Zustände denkbar:

- Gleiten in positive Richtung ($\dot{g}_{TC} > 0$): der Tangentialimpuls wirkt während der gesamten Phase in die entgegengesetzte Richtung und wird durch den Normalimpuls und den Reibkoeffizienten bestimmt: $\Lambda_{TC} = -\mu\Lambda_{NC}$.
- Haften am Ende der Phase ($\dot{g}_{TC} = 0$): der während der Kompression wirkende Tangentialimpuls ist groß genug, um im Kontakt Haften zu erreichen. Die Größe des Impulses liegt in einem Bereich, der durch die maximal übertragbaren Impulse an der Haftgrenze bestimmt wird: $-\mu\Lambda_{NC} < \Lambda_{TC} < \mu\Lambda_{NC}$.
- Gleiten in negative Richtung ($\dot{g}_{TC} < 0$): der Tangentialimpuls wirkt während der gesamten Phase in positive Richtung und wird durch den Normalimpuls und den Reibkoeffizienten bestimmt: $\Lambda_{TC} = \mu\Lambda_{NC}$.

Die möglichen Kombinationen von \dot{g}_{TC} und Λ_{TC} lassen sich als abschnittsweise definiertes Stoßgesetz für jeden Stoßkontakt

$$\dot{g}_{TC} \in \begin{cases} < 0 & \text{für } \Lambda_{TC} = \mu\Lambda_{NC} \\ = 0 & \text{für } -\mu\Lambda_{NC} < \Lambda_{TC} < \mu\Lambda_{NC} \\ > 0 & \text{für } \Lambda_{TC} = -\mu\Lambda_{NC} \end{cases} \quad (3.8)$$

beschreiben und in einem Diagramm wie im rechten Teil von Bild 3.2 darstellen. Das Reibgesetz auf Impulsebene hat mit dem klassischen Coulomb'schen Reibgesetz auf Kräftebene die wesentliche Eigenschaft gemeinsam, abschnittsweise entweder als Kraftgesetz oder als kinematische Zwangsbedingung zu wirken: Im Fall Haften handelt es sich um eine kinematische Zwangsbedingung, deren Aufhebung über eine Kraftbedingung (Haftkraftreserve) gesteuert wird. Im Fall Gleiten ist es ein Kraftgesetz, das sich bei Erreichen eines kinematischen Indikators in eine Zwangsbedingung verwandeln kann.

Die Komplementarität von Relativgeschwindigkeit und Impuls läßt sich nicht unmittelbar angeben, wie es beim Normalgesetz der Fall ist.

3.5.4 Lösung für die Kompressionsphase

Ziel ist es nun, die Zustände am Ende der Kompressionsphase ($\dot{\mathbf{g}}_{NC}$ und $\dot{\mathbf{g}}_{TC}$) in Abhängigkeit von den Größen zu Beginn ($\dot{\mathbf{g}}_{NA}$ und $\dot{\mathbf{g}}_{TA}$) und den Systemparametern (\mathbf{G} und μ_i) zu berechnen. Eigentliche Zielgrößen sind die wirkenden Impulse ($\mathbf{\Lambda}_{NC}$ und $\mathbf{\Lambda}_{TC}$), die benötigt werden, um die Änderung der generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$ durch die Kompressionsphase berechnen zu können. Als Gleichungen

stehen die in die Stoßrichtung projizierte Impulsbilanz (3.5) und das normale (3.7) und tangentiale (3.8) Stoßgesetz zur Verfügung.

Wenn n_S Kontakte während des Stoßes geschlossen sind, sucht man die Lösung eines Gleichungssystems im $4n_S$ -dimensionalen Raum der Unbekannten. Mathematisch betrachtet stellt die Impulsgleichung eine Sammlung von $2n_S$ Hyperebenen in diesem Raum dar. Das normale und tangentiale Stoßgesetz werden durch je n_S Flächen repräsentiert. In der Summe stehen damit $4n_S$ Flächen zur Verfügung, die miteinander geschnitten werden müssen, um die Lösung für die unbekanntes Relativgeschwindigkeiten und Impulse zu finden. In den Abschnitten 4.1 und 4.2, in denen der Einfachstoß detailliert untersucht wird, sind diese Flächen und Ebenen für Spezialfälle auch graphisch dargestellt.

Die Stoßgesetze sind abschnittsweise definiert, deshalb ist keine klassische Gleichungslösung ohne Fallunterscheidungen möglich. Fallen die geknickten Flächen abschnittsweise mit den Koordinatenachsen zusammen oder lassen sie sich in diese Form transformieren, existiert mit dem linearen Komplementaritätsproblem (LCP) ein formalisierter Lösungsalgorithmus für derartige Probleme.

Ein LCP läßt sich wie folgt beschreiben: Gesucht sind $2n$ Unbekannte in einem Koordinatenraum dieser Dimension, die in den zwei n -dimensionalen Vektoren \mathbf{x} und \mathbf{y} zusammengefaßt sind. n lineare Gleichungen $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ beschreiben eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit, auf der die Lösung liegen muß. Weitere Einschränkungen stellen n abschnittsweise definierte, aus je zwei Halbebenen bestehende Flächen dar, die durch die Gleichungen $x_i = 0$ für $y_i > 0$ und $y_i = 0$ für $x_i > 0$ beschrieben werden. Die Größen x_i und y_i sind *komplementär*.

Will man dieses Schema auf die Lösung der Kompressionsphase übertragen, sieht man, daß beim normalen Stoßgesetz die Impulse und Relativgeschwindigkeiten bereits komplementäre Form aufweisen. Das tangentiale Reibgesetz besteht zwar ebenfalls aus abschnittsweise definierten Ebenen, die jedoch noch nicht die Standardform eines LCP haben. Es ist allerdings möglich, den zweifach geknickten „Haken“ in zwei komplementäre Bedingungen aufzuspalten.

Das Vorgehen lehnt sich an [22] an. Die Aufspaltung greift dabei auf das Verfahren zurück, wie es in [67] beschrieben ist. Im ersten Schritt führt man dazu eine Koordinatentransformation durch, die alle tangentialen Stoßimpulse so verschiebt, daß der negative Ast des Reibgesetzes mit der $\dot{g}_{TC,i}$ -Achse zusammenfällt. Die verschobenen Impulse werden $\Lambda_{TCV,i}$ genannt:

$$\Lambda_{TCV,i} = \Lambda_{TC,i} + \mu_i \Lambda_{NC,i} \quad (3.9)$$

Diese Transformation wird in die Impulsbilanz (3.5) eingesetzt, die sich dann als

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{g}}_{NC} \\ \dot{\mathbf{g}}_{TC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{NN} - \mathbf{G}_{NT}\boldsymbol{\mu} & \mathbf{G}_{NT} \\ \mathbf{G}_{TN} - \mathbf{G}_{TT}\boldsymbol{\mu} & \mathbf{G}_{TT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{NC} \\ \Lambda_{TCV} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{g}}_{NA} \\ \dot{\mathbf{g}}_{TA} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

anschreiben läßt. Die Matrizen $\boldsymbol{\mu}$ sind Diagonalmatrizen, deren Elemente die Reibkoeffizienten μ_i der Stoßkontakte sind. Die Werte von μ können von $\dot{g}_{TA,i}$ abhängig

gemacht werden, wenn bei der vorliegenden Materialpaarung eine deutliche Relativgeschwindigkeitsabhängigkeit des Reibkoeffizienten vorliegt.

Ein wesentlicher Schritt ist es nun, die Reibkennlinie in den oberen rechten und den unteren linken Ast aufzuteilen, wie es in Bild 3.3 dargestellt ist.

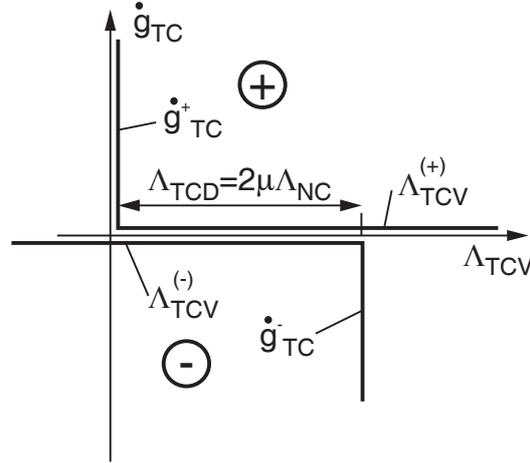


Bild 3.3: Aufspaltung der Reibkennlinie in zwei einseitige Bindungen

Die Geschwindigkeiten werden in ihren positiven Teil $\dot{g}_{TC,i}^+ > 0$ und den negativen Teil $\dot{g}_{TC,i}^- < 0$ aufgespalten, wobei

$$\dot{g}_{TC,i} = \dot{g}_{TC,i}^+ - \dot{g}_{TC,i}^- \quad (3.11)$$

gilt. Die zugehörigen Tangentialimpulse werden wie folgt definiert:

$$\Lambda_{TCV,i}^{(+)} = \Lambda_{TCV,i} \quad (3.12)$$

$$\Lambda_{TCV,i}^{(-)} = -\Lambda_{TCV,i} + 2\mu_i\Lambda_{NC,i} \quad (3.13)$$

Nach dieser Aufspaltung hat man nun 3 Paare von komplementären Größen: \dot{g}_{NC} und Λ_{NC} wurden bereits oben erwähnt, hinzugekommen sind \dot{g}_{TC}^+ und $\Lambda_{TCV}^{(+)}$, sowie \dot{g}_{TC}^- und $\Lambda_{TCV}^{(-)}$. Setzt man nun (3.11) und (3.13) in (3.10) ein, und fügt (3.13) als eigene Gleichung hinzu, erhält man

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{g}_{NC} \\ \dot{g}_{TC}^+ \\ \Lambda_{TCV}^{(-)} \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{G}_{NN} - \mathbf{G}_{NT}\boldsymbol{\mu} & \mathbf{G}_{NT} & 0 \\ \mathbf{G}_{TN} - \mathbf{G}_{TT}\boldsymbol{\mu} & \mathbf{G}_{TT} & \mathbf{E} \\ 2\boldsymbol{\mu} & -\mathbf{E} & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} \Lambda_{NC} \\ \Lambda_{TCV}^{(+)} \\ \dot{g}_{TC}^- \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{g}_{NA} \\ \dot{g}_{TA} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} \quad (3.14)$$

als LCP in Standardform, da die Vektoren \mathbf{x} und \mathbf{y} jeweils die Paare der komplementären Größen enthalten. Nach der Lösung des LCP müssen die ursprünglich

gesuchten Größen durch Rücktransformation gewonnen werden:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{g}}_{NC} & \quad \text{direkt enthalten} \\ \dot{\mathbf{g}}_{TC} & = \dot{\mathbf{g}}_{TC}^+ - \dot{\mathbf{g}}_{TC}^- \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda}_{NC} & \quad \text{direkt enthalten} \\ \mathbf{\Lambda}_{TC} & = \mathbf{\Lambda}_{TCV}^{(+)} - \mu \mathbf{\Lambda}_{NC} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Alle diese Größen werden auch für die Berechnung der Expansionsphase benötigt. Mit Hilfe der Impulse ist es möglich, die generalisierten Geschwindigkeiten

$$\dot{\mathbf{q}}_C = \dot{\mathbf{q}}_A + \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{W}_N \mathbf{\Lambda}_{NC} + \mathbf{W}_T \mathbf{\Lambda}_{TC}) \quad (3.17)$$

des Systems am Ende der Kompressionsphase zu berechnen.

3.6 Expansionsphase mit tangentialer Reversibilität

Die Struktur der Berechnung der Expansionsphase ist der der Kompressionsphase sehr ähnlich: Es werden die in die Stoßrichtungen projizierten Impulsbilanzen über alle Körper sowie die Stoßgesetze benötigt.

Diese Gesetze sind jedoch für die Expansionsphase deutlich komplizierter als für die Kompressionsphase, da die Effekte der Verschiebung Körperpunkt-Reibpunkt allesamt in der Expansionsphase konzentriert auftreten.

3.6.1 Kinematik- und Impulsgleichungen

Während der Expansionsphase findet der Übergang der generalisierten Koordinaten von $\dot{\mathbf{q}}_C$ am Ende der Kompressionsphase nach $\dot{\mathbf{q}}_E$ am Ende des Stoßes statt, was durch die Impulsbilanz

$$\mathbf{M}(\dot{\mathbf{q}}_E - \dot{\mathbf{q}}_C) = \mathbf{W}_N \mathbf{\Lambda}_{NE} + \mathbf{W}_T \mathbf{\Lambda}_{TE} \quad (3.18)$$

dargestellt wird. Die in die Stoßrichtung projizierte Kinematikgleichung ist ebenfalls äquivalent zur Kompressionsphase und läßt sich als

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{g}}_{NE} \\ \dot{\mathbf{g}}_{TE} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N^T \\ \mathbf{W}_T^T \end{pmatrix} (\dot{\mathbf{q}}_E - \dot{\mathbf{q}}_C) + \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{g}}_{NC} \\ \dot{\mathbf{g}}_{TC} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

anschreiben. Setzt man noch Gleichung (3.18) in (3.19) ein, erhält man die projizierte Impulsgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{g}}_{NE} \\ \dot{\mathbf{g}}_{TE} \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_{NE} \\ \mathbf{\Lambda}_{TE} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{g}}_{NC} \\ \dot{\mathbf{g}}_{TC} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

für die Expansionsphase. Dieses Vorgehen ist bis auf Indexvertauschungen identisch zur Kompressionsphase.

3.6.2 Normales Stoßgesetz

Am Ende der Kompressionsphase ist die normale Relativgeschwindigkeit in allen Kontakten entweder gleich null, oder es hat bereits in der Kompressionsphase eine Separation eingesetzt. Ein Kompressionsimpuls konnte nur wirken, wenn keine Separation einsetzte.

Dabei wurde während der Kompressionsphase Arbeit geleistet: kinetische Energie wurde durch die wirkenden Impulse umgewandelt. Aufgabe der Expansionsphase ist es nun, je nach Art der Energieumwandlung, einen Impuls für das Wiederabheben der Körper zur Verfügung zu stellen, oder ihn als dissipiert zu betrachten. In jedem Fall muß die Expansionsphase so gestaltet sein, daß ein weiteres Eindringen der Körper nach ihrem Ende verhindert wird.

Das Poisson'sche Stoßgesetz, das hier verwendet werden soll, stellt eine Beziehung zwischen den Impulsen während der Kompressionsphase und der Expansionsphase her, die im Fall eines Einfachstoßes

$$\Lambda_{NE} = \varepsilon_N \Lambda_{NC} \quad (3.21)$$

lautet. Für die Stoßzahl ε_N gilt immer $0 \leq \varepsilon_N \leq 1$ und sie kann für jeden Stoßkontakt unterschiedlich sein. Eine Stoßzahl $\varepsilon_N = 0$ entspricht einem plastischen Stoß und $\varepsilon_N = 1$ einem sogenannten vollelastischen Stoß ohne lokalen Energieverlust. Weiß man, daß bei einer Materialpaarung eine Abhängigkeit der Stoßzahl von den Stoßbedingungen gegeben ist, kann $\varepsilon_N = f(\dot{g}_{NA}, \Lambda_{NC})$ gewählt werden, wenn dabei die Grenzen für ε_N eingehalten werden.

In der Natur treten immer Stoßzahlen kleiner als 1 auf, da bei jedem Stoß ein Teil der Energie dissipiert wird. Ein sicheres Kennzeichen dafür, daß Stöße immer einen dissipativen Charakter haben ist die Tatsache, daß ein Stoß zumeist mit einer Geräusentwicklung verbunden ist. Die diesem Schall innewohnende Energie muß den Stoßpartnern entzogen werden.

Dieses Stoßgesetz in Normalenrichtung hat, wie schon in Abschnitt 3.2 erwähnt, den Nachteil, daß es Eindringen der Körper ineinander am Ende des Stoßes nicht ausschließt. Ein Beispiel dafür wird in Abschnitt 4.4 erläutert. Aus diesem Grund wird das Gesetz um eine einseitige Bindungskomponente erweitert: Der Normalimpuls beträgt mindestens $\varepsilon_N \Lambda_{NC}$, kann aber beliebig groß werden, um die Impenetrabilität der im Kontakt befindlichen Körper zu gewährleisten. Da die zentrale Gleichung der Expansionsphase die Impulsbilanz ist, besteht durch diese Maßnahme keine Gefahr, dadurch physikalisch unzulässige Bewegungszustände zu erreichen.

Bild 3.4 stellt die Expansionskennlinie dar, die diese Eigenschaften zusammenfaßt: kommt es zum Abheben, wirkte der berechnete Expansionsimpuls, andernfalls kann er beliebig groß werden, um ein Eindringen der Körper zu verhindern. Um diese Bedingung als klassisches LCP formulieren zu können, muß die Expansionskennlinie in den Ursprung verschoben werden. Dazu wird eine Koordinatentransformation durchgeführt, bei der die neue Koordinate

$$\Lambda_{NP,i} = \Lambda_{NE,i} - \varepsilon_{N,i} \Lambda_{NC,i} \quad (3.22)$$

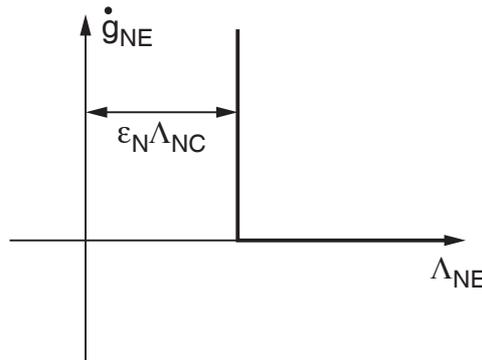


Bild 3.4: Graphische Darstellung des normalen Stoßgesetzes für die Expansionsphase mit komplementärer Kennlinie

eingeführt wird. Diese Transformation ist immer eindeutig durchführbar, da sowohl die Stoßzahl ε_N , als auch der während der Kompressionsphase aufgetretene Impuls $\Lambda_{NC,i}$ zu Beginn der Expansionsphase bekannt sind. Der transformierte Impuls und die Abhebegeschwindigkeit ergeben das Paar

$$\dot{g}_{NE} \geq 0, \quad \mathbf{A}_{NP} \geq 0, \quad \dot{\mathbf{g}}_{NE}^T \cdot \mathbf{A}_{NP} = 0 \quad (\text{komponentenweise}) \quad (3.23)$$

von komplementären Vektoren.

3.6.3 Tangentiales Stoßgesetz

Das tangentielle Stoßgesetz muß zwei wesentliche physikalische Effekte möglichst korrekt wiedergeben: Einerseits ist das Verhalten im Kontakt von der dort wirkenden Reibung geprägt, andererseits wird auch hier die mögliche tangentielle Rückspeicherung der Energie über den wirkenden Expansionsimpuls vorgenommen.

Hierbei handelt es sich um eine „Hintereinanderschaltung“ von zwei Elementen: Der Körper berührt im Reibungspunkt den Kontaktpartner, für diesen gilt das Coulomb'sche Reibgesetz auf Impulsebene. Die potentielle Energie ist in tangentialen Verschiebungen in der Umgebung der Kontaktzone gespeichert und wirkt wie ein dahintergeschaltetes zweites elastisches Kraftelement.

Das Stoßgesetz soll eine kompakte Formulierung für den Stoß von Körpern in den jeweiligen Kontaktpunkten darstellen. Das „Auseinanderfallen“ dieser Punkte in den Reibpunkt im Kontakt und den Körperpunkt, auf den die Impulse wirken, tritt in der Realität auf und kann in einem Stoßgesetz auf Impuls-Geschwindigkeitsebene nicht direkt nachgebildet werden. An dieser Stelle sei noch einmal auf die Vorüberlegungen in Abschnitt 3.4 verwiesen. Es ist jedoch möglich die Folgen dieses Phänomens auf einfache Weise im Stoßgesetz zu realisieren.

Prinzipiell muß im Kontaktpunkt das Coulomb-Reibgesetz gelten. Das heißt, der in der Expansionsphase übertragene Tangentialimpuls darf den mit dem Reibkoeffizienten multiplizierten Normalimpuls nicht überschreiten.

Das Rückspeichern des Tangentialimpulses soll folgendem Gesetz gehorchen:

$$\Lambda_{TE,i} = \varepsilon_{N,i} \varepsilon_{T,i} \Lambda_{TC,i} \quad (3.24)$$

Analog zum Gesetz (3.21) soll ein um einen Dissipationsfaktor verminderter Anteil des Kompressionsimpulses in der Expansionsphase wirken. Dieser tangentielle Faktor heißt ε_T , kann in jeder Bindung im System unterschiedlich sein und es gilt – analog zum normalen Koeffizienten – der Wertebereich $0 \leq \varepsilon_T \leq 1$. In diesem Zusammenhang muß jedoch noch eine wichtige Annahme gemacht werden: Der Expansionsimpuls in Normalenrichtung Λ_{NE} ist in der Regel um den Faktor ε_N geringer als der Kompressionsimpuls Λ_{NC} (Gleichung (3.21)). Aus diesem Grund wird auch der tangentielle Expansionsimpuls Λ_{TE} zusätzlich um den Faktor ε_N verringert. Das ist notwendig, da der Tangentialimpuls bei seiner Entfaltung über die Reibung im Kontakt auf den Normalimpuls angewiesen ist. Diese Formulierung verhindert zugleich, daß der reversible Impuls größer als der maximal durch Reibung übertragbare Impuls wird, was sich durch die Ungleichungskette

$$\varepsilon_N \varepsilon_T |\Lambda_{TC}| \leq \varepsilon_N |\Lambda_{TC}| \leq \varepsilon_N \mu \Lambda_{NC} \leq \mu \Lambda_{NE} \quad (3.25)$$

zeigen läßt. Mit den jetzt zusammengetragenen Gleichungen läßt sich das Expansionsgesetz wie folgt formulieren (unter der Annahme $\Lambda_{TC} > 0$): der Expansionsimpuls beträgt in jeder Bindung mindestens $\varepsilon_N \varepsilon_T \Lambda_{TC}$ (anteilige Rückgabe der gespeicherten Energie) und höchstens $\mu \Lambda_{NE}$ (Erreichen der Haftgrenze). Diese beiden Grenzen werden durch die senkrechten Äste der Kennlinie in Bild 3.5 dargestellt.

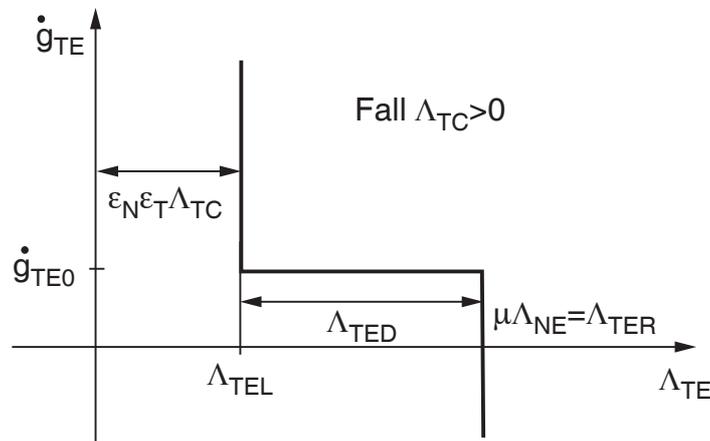


Bild 3.5: Graphische Darstellung des tangentialen Stoßgesetzes für die Expansionsphase mit komplementärer Kennlinie

In der Arbeit von GLOCKER [22] wird für den Bereich zwischen diesen Impulsgrenzen gefordert, daß die tangentiale Expansionsgeschwindigkeit \dot{g}_{TE} in diesem Fall verschwinden soll, was klassischer Coulomb-Reibung entspricht. Physikalisch erreicht man diesen Zustand, wenn während der Kompressionsphase im Kontakt Gleiten und zum Ende der Expansionsphase Haften herrscht.

In Abschnitt 3.4 wurde gezeigt, daß dadurch wichtige Effekte, die bei einem tangentialreversiblen Stoß auftreten können, nicht erfaßt werden. Wurde während einer gleitenden Kompressionsphase das tangentiale reversible Element „vorgespannt“, kann es während der Expansionsphase bei haftendem Kontaktpunkt die reversible Rückspeicherung vornehmen. Da für die Berechnung des Gesamtstoßes die Körperpunktdynamik von Bedeutung ist und nicht das Verhalten des Reibpunktes, muß man hier eine Modifikation durchführen, um diesen Effekt im Stoßgesetz berücksichtigen zu können. Es wird die Geschwindigkeit \dot{g}_{TE0} eingeführt, die der Körperpunkt in diesem Fall erhalten soll.

Man berechnet die Geschwindigkeit \dot{g}_{TE0} , indem man zunächst die Berechnung des Tangentialanteils einer Expansionsphase durchführt, bei der man die Impulse \mathbf{A}_{NC} und \mathbf{A}_{TC} aus der Kompressionsphase verwendet, jedoch von Haften am Ende der Kompressionsphase in den Kontakten ausgeht:

$$\dot{g}_{TE0} = \mathbf{G}_{TN} \boldsymbol{\varepsilon}_N \mathbf{A}_{NC} + \mathbf{G}_{TT} \boldsymbol{\varepsilon}_N \boldsymbol{\varepsilon}_T \mathbf{A}_{TC} \quad (3.26)$$

Die Matrizen $\boldsymbol{\varepsilon}_N$ und $\boldsymbol{\varepsilon}_T$ sind Diagonalmatrizen, die die Stoßzahlen jedes Kontaktes als Diagonalelemente enthalten. Alle Größen sind zu Beginn der Expansionsphase bekannt, die Berechnung kann unmittelbar erfolgen.

Diese Berechnung basiert auf folgender Annahme: Wenn während der Expansionsphase im Reibpunkt Haften auftritt, hat dies eine ähnliche Geschwindigkeitsänderung am Körper zur Folge, wie wenn schon am Ende der Kompressionsphase Haften geherrscht hätte, da auch während Gleitphasen bereits eine Rückspeicherung aus dem vorgespannten Tangentialelement stattfinden kann. Wie im Kapitel 6 gezeigt wird, läßt sich diese Annahme gut mit Experimenten in Einklang bringen.

Nun sind die drei Äste des tangentialen Stoßgesetzes in Bild 3.5 erklärt. Als Beispiel ist ein Fall gewählt, bei dem der tangentialer Kompressionsimpuls positiv war. Der linke Ast der Kennlinie ist bis in den positiven Quadranten zum Wert $\Lambda_{TEL,i}$ (Index L wegen „links“) verschoben. Der rechte Ast liegt an der Reibgrenze beim Wert $\Lambda_{TER,i}$ (Index R wegen „rechts“). Der Abstand beider Äste beträgt $\Lambda_{TED,i} = \mu_i \Lambda_{NE,i} - \varepsilon_{N,i} \varepsilon_{T,i} |\Lambda_{TC,i}|$, unabhängig vom Vorzeichen des Kompressionsimpulses. Erreicht der Expansionsimpuls keinen der beiden Extremwerte, muß die Expansionsgeschwindigkeit \dot{g}_{TE0} betragen.

3.6.4 Lösung für die Expansionsphase

Ziel ist es, die Zustände am Ende des Stoßes zu berechnen. Als Eingangsgrößen stehen die Ergebnisse am Ende der Kompressionsphase (\dot{g}_{NC} , \dot{g}_{TC} , \mathbf{A}_{NC} und \mathbf{A}_{TC}) sowie die Systemparameter (\mathbf{G} und μ_i) zur Verfügung. Neu hinzu kommen die Stoßzahlen $\varepsilon_{N,i}$ und $\varepsilon_{T,i}$ in normaler und tangentialer Richtung. Gesucht sind die Impulse \mathbf{A}_{NE} und \mathbf{A}_{TE} , die letztlich benötigt werden, um mit Hilfe der Impulsgleichung (3.18) den Zustand der generalisierten Koordinaten am Stoßende zu berechnen. Als Ergebnis stehen auch die Relativgeschwindigkeiten in den Kontakten am Ende des Stoßes (\dot{g}_{NE} und \dot{g}_{TE}) zur Verfügung, die einerseits für das physikalische Verständnis

des Stoßes wichtig sind und andererseits als Indikatoren für den Bindungszustand für die weitere Simulation des Mehrkörpersystems nach dem Stoß benötigt werden. Im folgenden wird erläutert, wie die Gleichungen, die die Expansionsphase beschreiben, zu einem lösbaren LCP zusammengefaßt werden können. Wie in Abschnitt 3.4 erläutert wurde, spielt die Fallunterscheidung, ob in einem Kontakt während der Kompressionsphase ein positiver oder negativer Tangentialimpuls wirkte, eine wesentliche Rolle. Um für die gesamte Phase eine geschlossene Darstellung in Matrixform angeben zu können, wird die Fallunterscheidung in den Selektionsmatrizen \mathbf{S}^+ und \mathbf{S}^- vorgenommen, die wie folgt definiert sind:

$$\mathbf{S}^+ = \text{diag} \left(\frac{1}{2} (1 + \text{sign}(\Lambda_{TC,i})) \right) \quad (3.27)$$

$$\mathbf{S}^- = \text{diag} \left(\frac{1}{2} (1 - \text{sign}(\Lambda_{TC,i})) \right) \quad (3.28)$$

Diese Matrizen sind abgewandelte Einheitsmatrizen, deren Diagonalelemente in Abhängigkeit vom Vorzeichen von $\Lambda_{TC,i}$ entweder eins oder null betragen.

Wie bereits in der Kompressionsphase gezeigt, muß durch geeignete Koordinatentransformationen

$$\Lambda_{TEV,i} = \Lambda_{TE,i} - \Lambda_{TEL,i} \quad (3.29)$$

$$\dot{g}_{TEV,i} = \dot{g}_{TE,i} - \dot{g}_{TE0,i} \quad (3.30)$$

die Kennlinie mit ihrem „linken unteren“ Knick in den Ursprung verschoben werden. Die entsprechende Verschiebung der Normalkennlinie ist bereits in Gleichung (3.22) angegeben. Man setzt nun die Transformationen (3.22), (3.29) und (3.30) in die Impulsleichung (3.20) ein und erhält zwei Gleichungen

$$\dot{g}_{NE} = \mathbf{G}_{NN}(\mathbf{A}_{NP} + \boldsymbol{\varepsilon}_N \mathbf{A}_{NC}) + \mathbf{G}_{NT}(\mathbf{A}_{TEV} + \mathbf{A}_{TEL}) + \dot{g}_{NC} \quad (3.31)$$

$$\dot{g}_{TEV} = \mathbf{G}_{TN}(\mathbf{A}_{NP} + \boldsymbol{\varepsilon}_N \mathbf{A}_{NC}) + \mathbf{G}_{TT}(\mathbf{A}_{TEV} + \mathbf{A}_{TEL}) + \dot{g}_{TC} - \dot{g}_{TE0} \quad (3.32)$$

in normaler und tangentialer Richtung. Setzt man noch die Bestimmungsgleichung für \dot{g}_{TE0} (3.26) in (3.32) ein, erhält man für die Tangentialgleichung:

$$\dot{g}_{TEV} = \mathbf{G}_{TN} \mathbf{A}_{NP} + \mathbf{G}_{TT}(\mathbf{A}_{TEV} + \mathbf{A}_{TEL} - \boldsymbol{\varepsilon}_N \boldsymbol{\varepsilon}_T \mathbf{A}_{TC}) + \dot{g}_{TC} \quad (3.33)$$

Um endgültig zur LCP-Formulierung zu gelangen, muß die Reibbindung noch in zwei Einfachbindungen mit Hilfe der Gleichungen

$$\dot{g}_{TEV,i} = \dot{g}_{TEV,i}^+ - \dot{g}_{TEV,i}^- \quad (3.34)$$

$$\Lambda_{TEV,i}^{(+)} = \Lambda_{TEV,i} \quad (3.35)$$

$$\Lambda_{TEV,i}^{(-)} = -\Lambda_{TEV,i} + \Lambda_{TED,i} \quad (3.36)$$

aufgespaltet werden.

Die komplementären Paare des Systems sind $(\dot{\mathbf{g}}_{NE}, \mathbf{\Lambda}_{NP})$, $(\dot{\mathbf{g}}_{TEV}^+, \mathbf{\Lambda}_{TEV}^{(+)})$ sowie $(\mathbf{\Lambda}_{TEV}^{(-)}, \dot{\mathbf{g}}_{TEV}^-)$. Die Vektoren $\mathbf{\Lambda}_{TEL}$ und $\mathbf{\Lambda}_{TED}$ müssen mit Hilfe der Selektionsmatrizen in Abhängigkeit von den Basisgrößen dargestellt werden:

$$\mathbf{\Lambda}_{TEL} = \mathbf{S}^+ \boldsymbol{\varepsilon}_N \boldsymbol{\varepsilon}_T \mathbf{\Lambda}_{TC} - \mathbf{S}^- \boldsymbol{\mu} (\mathbf{\Lambda}_{NP} - \boldsymbol{\varepsilon}_N \mathbf{\Lambda}_{NC}) \quad (3.37)$$

$$\mathbf{\Lambda}_{TED} = \boldsymbol{\mu} (\mathbf{\Lambda}_{NP} + \boldsymbol{\varepsilon}_N \mathbf{\Lambda}_{NC}) - \boldsymbol{\varepsilon}_N \boldsymbol{\varepsilon}_T |\mathbf{\Lambda}_{TC}| \quad (3.38)$$

Man setzt nun die Gleichungen (3.34), (3.35), (3.37) und (3.38) in (3.33) und (3.32) ein, nimmt die Gleichungen (3.36) hinzu und faßt diese in Matrix-Vektor-Schreibweise zu

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{g}}_{NE} \\ \dot{\mathbf{g}}_{TEV}^+ \\ \mathbf{\Lambda}_{TEV}^{(-)} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_{NP} \\ \mathbf{\Lambda}_{TEV}^{(+)} \\ \dot{\mathbf{g}}_{TEV}^- \end{pmatrix} + \mathbf{b} \quad (3.39)$$

zusammen, wobei die Matrix \mathbf{A} und der Vektor \mathbf{b} lauten:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{NN} - \mathbf{G}_{NT} \mathbf{S}^- \boldsymbol{\mu} & \mathbf{G}_{NT} & 0 \\ \mathbf{G}_{TN} - \mathbf{G}_{TT} \mathbf{S}^- \boldsymbol{\mu} & \mathbf{G}_{TT} & \mathbf{E} \\ \boldsymbol{\mu} & -\mathbf{E} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{NN} \boldsymbol{\varepsilon}_N \mathbf{\Lambda}_{NC} + \mathbf{G}_{NT} \mathbf{S}^+ \boldsymbol{\varepsilon}_N \boldsymbol{\varepsilon}_T \mathbf{\Lambda}_{TC} - \mathbf{G}_{NT} \mathbf{S}^- \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\varepsilon}_N \mathbf{\Lambda}_{NC} + \dot{\mathbf{g}}_{NC} \\ \mathbf{G}_{TT} (\mathbf{S}^+ - \mathbf{E}) \boldsymbol{\varepsilon}_N \boldsymbol{\varepsilon}_T \mathbf{\Lambda}_{TC} - \mathbf{G}_{TT} \mathbf{S}^- \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\varepsilon}_N \mathbf{\Lambda}_{NC} + \dot{\mathbf{g}}_{TC} \\ \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\varepsilon}_N \mathbf{\Lambda}_{NC} - \boldsymbol{\varepsilon}_N \boldsymbol{\varepsilon}_T |\mathbf{\Lambda}_{TC}| \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

Dieses LCP in Standardform kann gelöst werden. Die eigentlich gesuchten Größen müssen durch eine Serie von Rücktransformationen gewonnen werden:

$\dot{\mathbf{g}}_{NE}$ direkt enthalten

$$\dot{\mathbf{g}}_{TE} = \dot{\mathbf{g}}_{TEV}^+ - \dot{\mathbf{g}}_{TEV}^- + \dot{\mathbf{g}}_{TE0} \quad (3.42)$$

$$\mathbf{\Lambda}_{NE} = \mathbf{\Lambda}_{NP} + \boldsymbol{\varepsilon}_N \mathbf{\Lambda}_{NC} \quad (3.43)$$

$$\mathbf{\Lambda}_{TE} = \mathbf{\Lambda}_{TEV}^{(+)} + \mathbf{\Lambda}_{TEL} = \mathbf{\Lambda}_{TEV}^{(+)} + \mathbf{S}^+ \boldsymbol{\varepsilon}_N \boldsymbol{\varepsilon}_T \mathbf{\Lambda}_{TC} - \mathbf{S}^- \boldsymbol{\mu} \mathbf{\Lambda}_{NE} \quad (3.44)$$

Die Relativgeschwindigkeiten am Stoßende sind für die weitere Berechnung des Gesamtsystems nicht erforderlich. Mit Hilfe der während der Kompressions- und Expansionsphase wirkenden Impulse können die generalisierten Geschwindigkeiten

$$\dot{\mathbf{q}}_E = \dot{\mathbf{q}}_A + \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{W}_N (\mathbf{\Lambda}_{NC} + \mathbf{\Lambda}_{NE}) + \mathbf{W}_T (\mathbf{\Lambda}_{TC} + \mathbf{\Lambda}_{TE})) \quad (3.45)$$

am Ende des Stoßes aus denen zu Beginn des Stoßes berechnet werden.

3.7 Expansionsphase des reinen Reibstoßes

In diesem Abschnitt wird die Expansionsphase des reinen Reibstoßes vorgestellt. Dieser ist bei einem zentralen Stoß identisch mit einem tangentialreversiblen Stoß mit $\varepsilon_T = 0$, was man als *tangentialplastischen* Stoß bezeichnet. Im Fall eines exzentrischen Stoßes können Unterschiede zwischen dem tangentialplastischen und dem reinen Reibstoß auftreten, deren Voraussetzungen und Konsequenzen im Abschnitt 4.3 diskutiert werden.

Die Kompressionsphase ist für beide Stoßtypen identisch. Auch die Expansionsphasen haben große Ähnlichkeiten: Die Kinematik- und Impulsgleichungen und das normale Stoßgesetz können aus den Abschnitten 3.6.1 und 3.6.2 übernommen werden.

Das tangential Gesetz ist in diesem Fall das unmodifizierte Coulomb-Gesetz, wie es in Gleichung (3.8) für die Kompressionsphase verwendet wird. Die Koordinatentransformationen und die Aufspaltung der Kennlinie sind identisch zur Expansionsphase in Abschnitt 3.6.4. Aus diesen Gründen wird hier sofort das LCP angegeben, das die gesamte Expansionsphase beschreibt:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{g}}_{NE} \\ \dot{\mathbf{g}}_{TE}^+ \\ \mathbf{\Lambda}_{TE}^{(-)} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_{NP} \\ \mathbf{\Lambda}_{TEV}^{(+)} \\ \dot{\mathbf{g}}_{TEV}^- \end{pmatrix} + \mathbf{b} \quad (3.46)$$

Die Matrix \mathbf{A} und der Vektor \mathbf{b} lauten:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{NN} - \mathbf{G}_{NT}\boldsymbol{\mu} & \mathbf{G}_{NT} & 0 \\ \mathbf{G}_{TN} - \mathbf{G}_{TT}\boldsymbol{\mu} & \mathbf{G}_{TT} & \mathbf{E} \\ 2\boldsymbol{\mu} & -\mathbf{E} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{NN}\boldsymbol{\varepsilon}_N\mathbf{\Lambda}_{NC} + \dot{\mathbf{g}}_{NC} \\ \dot{\mathbf{g}}_{TC} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

Dieses LCP in Standardform kann gelöst werden. Die eigentlich gesuchten Größen müssen wiederum durch Rücktransformationen gewonnen werden:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{g}}_{NE} & \quad \text{direkt enthalten} \\ \dot{\mathbf{g}}_{TE} & = \dot{\mathbf{g}}_{TE}^+ - \dot{\mathbf{g}}_{TE}^- \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\mathbf{\Lambda}_{NE} = \mathbf{\Lambda}_{NP} + \boldsymbol{\varepsilon}_N\mathbf{\Lambda}_{NC} \quad (3.50)$$

$$\mathbf{\Lambda}_{TE} = \mathbf{\Lambda}_{TEV}^{(+)} - \boldsymbol{\mu}\mathbf{\Lambda}_{NC} \quad (3.51)$$

Mit Gleichung (3.45) können die generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}_E$ am Ende des Stoßes berechnet werden.

3.8 Klassifikation von impulsmodellierten Stößen

In Abschnitt 2.3 wurde bereits die Klassifizierung von Stößen angedeutet. Modelliert man Stöße mit einem Impulsstoßgesetz, kann man aus der Struktur der verwendeten Gleichungen weitere Unterscheidungskriterien ableiten.

Existiert in einem System nur eine einseitige Bindung, oder sind beim Stoß einer Bindung alle anderen geöffnet, spricht man von einem *Einfachstoß*, sonst von einem *Mehrfachstoß*. Für die weiteren Unterscheidungen betrachtet man die Struktur der Massenwirkungsmatrix \mathbf{G} .

Gilt für eine Gruppe von Stoßkontakten i , daß $G_{NN,i,j} = 0$, $G_{TN,i,j} = 0$ und $G_{TN,i,j} = 0$ für alle Stoßkontakte $j \neq i$, das heißt, die Nebendiagonalelemente von \mathbf{G} , die den Kontakt i mit dem Kontakt j wechselwirken lassen können, sind null, nennt man diese eine *entkoppelte Gruppe*. Die entkoppelten Gruppen von Stoßkontakten beeinflussen sich untereinander nicht. Die weiteren Klassifikationskriterien lassen sich jeweils unabhängig voneinander auf die entkoppelten Gruppen anwenden. Jede Gruppe kann dabei andere Eigenschaften im Rahmen des folgenden Klassifikationsschemas haben. Ist ein Stoß oder das Teilsystem innerhalb einer Gruppe gekoppelt, kann man abhängig davon, welche Elemente von \mathbf{G} besetzt sind, von *normal-*, *tangential-* oder *mischgekoppelten* Stößen sprechen.

Gilt für eine Gruppe von Kontakten $\mathbf{G}_{NT} = 0$ nennt man diesen Stoß *verallgemeinert zentral*. Diese Definition wurde von GLOCKER in [22] angegeben. In der Arbeit [5] von BATTLE wird dafür der Begriff „balanced collision“ eingeführt. Bei diesen Stößen kann das Normalproblem unabhängig vom Tangentialproblem gelöst werden. Ein mischgekoppelter Stoß ist immer exzentrisch. Das Beispiel in Abschnitt 4.5 zeigt, daß die klassische Definition des zentralen Stoßes, die einen Stoß als zentral bezeichnet, wenn die Stoßnormalenrichtung durch den Schwerpunkt der stoßenden Körper verläuft, bei Mehrfachstößen mit Reibung nicht mehr trägt.

Hat die Matrix \mathbf{G} des Stoßes vollen Rang, spricht man von *unabhängigen* Bindungen, bei einem Rangabfall von *abhängigen Bindungen*. Sind in einem System mehr Bindungen (ein Kontakt enthält zwei Bindungen) als Freiheitsgrade, kann \mathbf{G} niemals vollen Rang haben. Somit kann auch der Einfachstoß eines Körpers mit einem Freiheitsgrad bereits abhängige Bindungen enthalten.

Ein Stoß kann *plastisch*, *teilelastisch* oder *elastisch* sein. Bei der Betrachtung von tangentialreversiblen Stößen kann dieses Kriterium sowohl auf die Normal- als auch auf die Tangentialrichtung angewendet werden. Dabei gilt ein Stoß als plastisch, wenn $\varepsilon = 0$, teilelastisch, wenn $0 < \varepsilon < 1$ und elastisch, wenn $\varepsilon = 1$ ist. Bei einem zentralen Einfachstoß garantiert $\varepsilon = 1$ vollständige Energieerhaltung. Dies ist bei komplizierten Stößen nicht uneingeschränkt der Fall. Insbesondere in Tangentialrichtung gilt hier eine wichtige Einschränkung: Voraussetzung dafür, daß der Stoß elastisch und damit energierhaltend ist, ist eine für Haften während des gesamten Stoßes ausreichende Reibung im Kontakt. Ist dies nicht der Fall, kann trotz $\varepsilon_T = 1$ eine erhebliche Energiemenge beim Stoß dissipiert werden (siehe Bild 4.6).

Auch bei Mehrfach-Normalstößen bildet ein $\varepsilon_N = 1$ keine Garantie für ein Abheben

der Körper am Ende des Stoßes. Betrachtet man den linken Teil von Bild 3.4, sieht man, daß die Körper trotz eines vorhandenen $\varepsilon_N > 0$ am Stoßende in Kontakt bleiben, was der Anschauung eines elastischen Stoßes widerspricht.

Bei einem Einfachstoß beschreiben die Begriffe plastisch, teilelastisch und elastisch Stoßphänomene, die sich dann mit einem geeigneten Koeffizienten erfassen lassen. Bei komplizierten Stoßphänomenen gilt diese Anschauung nicht mehr und, die Begriffe sind nur noch an die Wertebereiche der Koeffizienten gebunden.

Als letztes Klassifizierungskriterium kann der *reine Reibstoß* und der *tangential-elastische Stoß* unterschieden werden. Beim zentralen Stoß ist der reine Reibstoß identisch zum tangentialelastischen Stoß mit $\varepsilon_T = 0$ und stellt somit nur einen Sonderfall dar. Beim exzentrischen Stoß kann unter besonderen Bedingungen hier ein Unterschied auftreten, der in Abschnitt 4.3 ausführlich diskutiert wird.

Kapitel 4

Sonderfälle und Beispiele

4.1 Der zentrale Einfachstoß

In diesem Abschnitt soll die Berechnung des zentralen Einfachstoßes auf Impulsebene dargestellt werden. Dabei wird der Berechnungsgang, wie er in den Abschnitten 3.5 bis 3.7 erläutert ist, auf diesen Spezialfall angewendet. Bei diesem einfachen System können die LCPs (Gleichungen (3.14) und (3.39)) durch Fallunterscheidungen gelöst werden und eine geschlossene Lösung des Gesamtsystems, abhängig von nur einem Parameter, angegeben werden.

Diese Stoßkonfiguration erhält dadurch eine besondere Bedeutung, daß ein großer Teil der Stoßversuche mit einem rotationssymmetrischen Wurfkörper durchgeführt wurde, was eine technische Realisation des zentralen Einfachstoßes darstellt. Die Meßergebnisse dieser Versuche werden in Abschnitt 6.2 mit den theoretischen Ergebnissen in diesem Abschnitt verglichen.

Bei diesem Stoß gelte immer $\dot{g}_{NA} < 0$ und $\dot{g}_{TA} < 0$. Ersteres ist Voraussetzung für das Auftreten eines Stoßes und die zweite Bedingung vereinfacht die Fallunterscheidungen. Am Ende wird gezeigt, daß bei $\dot{g}_{TA} > 0$ symmetrische Ergebnisse herauskommen.

Die Berechnung läßt sich übersichtlicher gestalten, wenn man mit dimensionslosen Größen rechnet. Alle Geschwindigkeiten werden mit der negativen normalen Relativgeschwindigkeit normiert. Die neu entstehenden Größen werden mit γ und entsprechenden Indizes bezeichnet. Eine Ausnahme stellt γ_{TA} , dar bei dem der Index weggelassen wurde, da es als wichtigster freier Parameter sehr häufig in weiteren Rechnungen und Bildern gebraucht wird.

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\dot{g}_{TA}}{-\dot{g}_{NA}}, & \gamma_{NC} &= \frac{\dot{g}_{NC}}{-\dot{g}_{NA}}, & \gamma_{TC} &= \frac{\dot{g}_{TC}}{-\dot{g}_{NA}}, \\ \gamma_{NE} &= \frac{\dot{g}_{NE}}{-\dot{g}_{NA}}, & \gamma_{TE} &= \frac{\dot{g}_{TE}}{-\dot{g}_{NA}}, & \gamma_{TE0} &= \frac{\dot{g}_{TE0}}{-\dot{g}_{NA}} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Aufgrund der Annahme $\dot{g}_{TA} < 0$ gilt auch $\gamma < 0$. Auch die Impulse werden in dimensionslose Größen umgewandelt. Dazu werden sie mit dem Element G_{NN} der

Massenwirkungsmatrix \mathbf{G} multipliziert und ebenfalls durch die negative normale Relativgeschwindigkeit dividiert. Da die Impulse bereits mit griechischen Buchstaben bezeichnet sind, werden die dimensionslosen Größen mit einem Stern* gekennzeichnet.

$$\begin{aligned}\Lambda_{NC}^* &= \frac{G_{NN}}{-\dot{g}_{NA}} \Lambda_{NC}, & \Lambda_{TC}^* &= \frac{G_{NN}}{-\dot{g}_{NA}} \Lambda_{TC} \\ \Lambda_{NE}^* &= \frac{G_{NN}}{-\dot{g}_{NA}} \Lambda_{NE}, & \Lambda_{TE}^* &= \frac{G_{NN}}{-\dot{g}_{NA}} \Lambda_{TE}\end{aligned}\quad (4.2)$$

Als weitere Größe für die dimensionslose Darstellung wird noch das Verhältnis der Elemente von \mathbf{G} mit $\Gamma = G_{TT}/G_{NN}$ eingeführt. Es gilt immer $\Gamma > 0$, da \mathbf{G} in diesem Fall positiv definit ist.

Kompressionsphase Im Fall des zentralen Stoßes lassen sich das Normal- und das Tangentialproblem unabhängig voneinander lösen. Aus Gleichung (3.5) werden zwei unabhängige Gleichungen

$$\gamma_{NC} = \Lambda_{NC}^* - 1 \quad (4.3)$$

$$\gamma_{TC} = \Gamma \Lambda_{TC}^* - \gamma, \quad (4.4)$$

die zusammen mit dem normalen Kontaktgesetz aus Gleichung (3.7)

$$\gamma_{NC} \geq 0, \quad \Lambda_{NC}^* \geq 0, \quad \gamma_{NC} \Lambda_{NC}^* = 0 \quad (4.5)$$

und dem Reibgesetz

$$\gamma_{TC} = \begin{cases} < 0 & \text{für } \Lambda_{TC}^* = \mu \Lambda_{NC}^* \\ 0 & \text{für } -\mu \Lambda_{NC}^* < \Lambda_{TC}^* < \mu \Lambda_{NC}^* \\ > 0 & \text{für } \Lambda_{TC}^* = -\mu \Lambda_{NC}^* \end{cases} \quad (4.6)$$

die Kompressionsphase beschreiben.

Die Gleichungen (4.3) und (4.5) lassen sich als zwei Kurven in der γ_{NC} - Λ_{NC}^* Ebene interpretieren, die im linken Teil von Bild 4.1 dargestellt sind. Im rechten Teil sind die Gleichungen (4.4) und (4.6) in der γ_{TC} - Λ_{TC}^* Ebene eingetragen. Die Impulsbilanzen stellen jeweils Geraden mit positiver Steigung dar, deren γ -Achsenabschnitt durch die tangentialen Relativgeschwindigkeiten vor dem Stoß bestimmt wird. Die Lösung für das Normalproblem läßt sich sofort mit

$$\Lambda_{NC}^* = 1 \quad \text{und} \quad \gamma_{NC} = 0 \quad (4.7)$$

ablesen, was auch der Definition des Endes der Kompressionsphase entspricht.

Beim Tangentialproblem sind in Abhängigkeit von γ drei Lösungsbereiche denkbar, die den Fällen „Gleiten links“, „Gleiten rechts“ und „Haften“ entsprechen. Mit der Einschränkung $\gamma < 0$ bleiben zwei Fälle übrig:

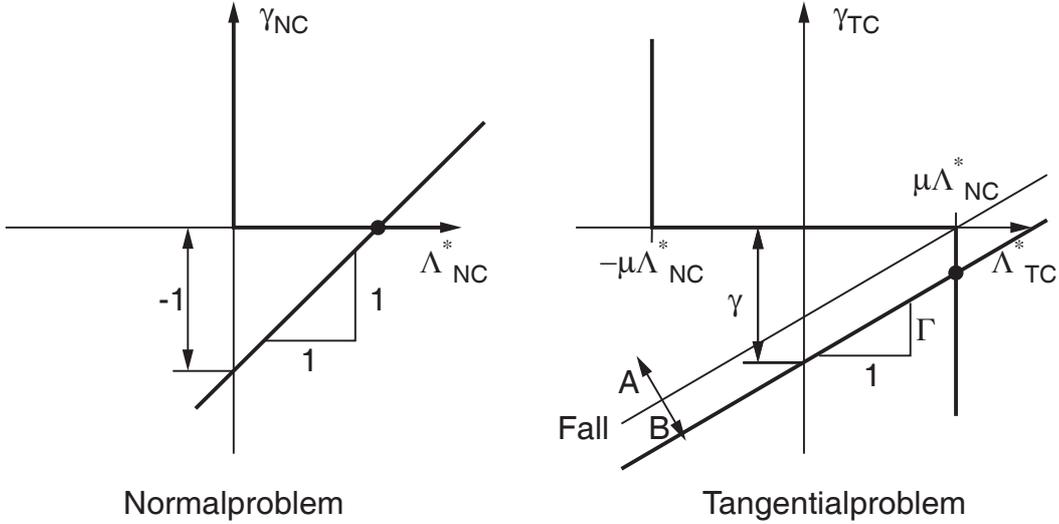


Bild 4.1: Kompressionsphase des zentralen Einfachstoßes

- Fall A: $\gamma > -\mu\Gamma$ $\gamma_{TC} = 0$ $\Lambda_{TC}^* = \frac{\gamma}{\Gamma}$ Haften
 Fall B: $\gamma < -\mu\Gamma$ $\gamma_{TC} = \gamma + \mu\Gamma$ $\Lambda_{TC}^* = \mu$ Gleiten

Die Fallunterscheidung hängt nur von der normierten tangentialen Relativgeschwindigkeit γ ab. Festzustellen ist, daß für den Impuls immer $\Lambda_{TC}^* \geq 0$ gilt.

Expansionsphase Das Normalproblem der Expansionsphase kann graphisch in der γ_{NE} - Λ_{NE}^* -Ebene dargestellt (Bild 4.2) und gelöst werden. Die erste Komponente der Impulsgleichung (3.20) vereinfacht sich in der dimensionslosen Darstellung zu

$$\gamma_{NE} = \Lambda_{NE}^* + \gamma_{NC} \quad (4.8)$$

und das Stoßgesetz lautet:

$$\gamma_{NE} \geq 0, \quad (\Lambda_{NE}^* - \varepsilon_N \Lambda_{NC}^*) \geq 0, \quad \gamma_{NE} (\Lambda_{NE}^* - \varepsilon_N \Lambda_{NC}^*) = 0 \quad (4.9)$$

Die Impulsbilanz stellt eine Gerade dar und das Stoßgesetz einen in den ersten Quadranten verschobenen Haken. Die Gerade geht immer vom Ursprung aus, da am Ende der Kompressionsphase $\gamma_{NC} = 0$ gilt. Die Steigung der Geraden ist positiv, daher muß der Schnittpunkt immer im senkrechten Ast des Hakens liegen. Demzufolge gilt am Ende der Expansionsphase

$$\gamma_{NE} = \varepsilon_N \quad \text{und} \quad \Lambda_{NE}^* = \varepsilon_N. \quad (4.10)$$

Das Tangentialproblem der Expansionsphase ist entscheidend dafür, daß tangentialreversible Effekte nachgebildet werden können. Die Impulsbilanz

$$\gamma_{TE} = \Gamma \Lambda_{TE}^* + \gamma_{TC} \quad (4.11)$$

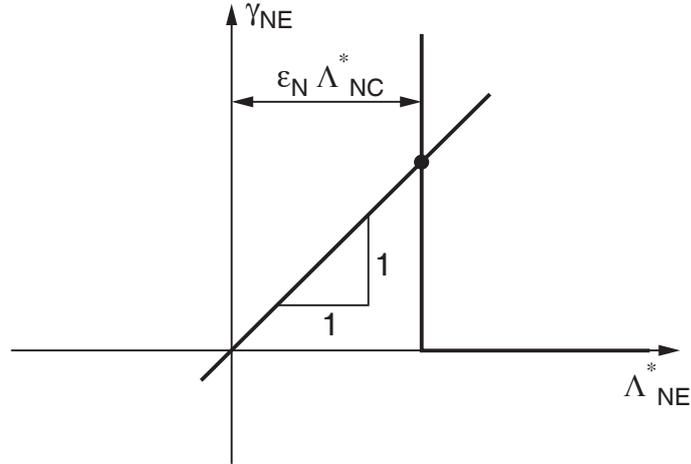


Bild 4.2: Expansionsphase des zentralen Einfachstoßes, Normalproblem

stellt eine Gerade mit positiver Steigung in der γ_{TE} - Λ_{TE}^* Ebene dar (Bild 4.3). Das Stoßgesetz setzt sich aus drei Ästen zusammen, die sich wie folgt bestimmen: Da der tangentialer Kompressionsimpuls bei den getroffenen Annahmen immer größer als null ist, gilt auch $\Lambda_{TE}^* = \varepsilon_N \varepsilon_T \Lambda_{TC}^* \geq 0$. Dies stellt den linken Ast des Hakens dar. Der rechte Ast wird durch das Coulomb'sche Reibgesetz bestimmt und liegt bei $\Lambda_{TE}^* = \mu \Lambda_{NE}^* = \mu \varepsilon_N$. Die Höhe des horizontalen Verbindungsastes γ_{TE0} wird mit Gleichung (3.26) zu

$$\gamma_{TE0} = \varepsilon_N \varepsilon_T \Gamma \Lambda_{TC}^* \quad (4.12)$$

berechnet. Damit liegen die drei Abschnitte der Stoßkennlinie fest. Die Impulsbilanz ist eine Gerade mit der positiven Steigung Γ und dem γ -Achsenabschnitt γ_{TC} , der negativ ist. Abhängig von diesem Abschnitt, der die tangentialer Relativgeschwindigkeit am Ende der Kompressionsphase repräsentiert, kann die Gerade in einem der drei Abschnitte die Kennlinie des Stoßgesetzes schneiden. Bei dieser Fallunterscheidung müssen auch die Zustände am Ende der Kompressionsphase mit einbezogen werden.

Fall A: Am Ende der Kompressionsphase herrschte Haften $\gamma_{TC} = 0$ und der Tangentialimpuls betrug $\Lambda_{TC}^* = -\gamma/\Gamma$. Damit ergibt sich $\gamma_{TE0} = -\varepsilon_N \varepsilon_T \gamma$. Die Gerade der Impulsgleichung, die im Fall A immer durch den Ursprung des γ_{TE} - Λ_{TE}^* Koordinatensystems geht, schneidet die Kennlinie damit genau in ihrem linken Knickpunkt. Physikalisch kann man diesen Fall so interpretieren, daß während der Kompressionsphase ein tangentialer Impuls gespeichert wird, der, da während des Stoßes Haften herrscht, auch weitgehend wieder zurückgegeben werden kann.

Fall B: Am Ende der Kompressionsphase herrschte Gleiten, der Tangentialimpuls betrug $\Lambda_{TC}^* = \mu$. Die Höhe des horizontalen Abschnitts der Stoßkennlinie liegt damit

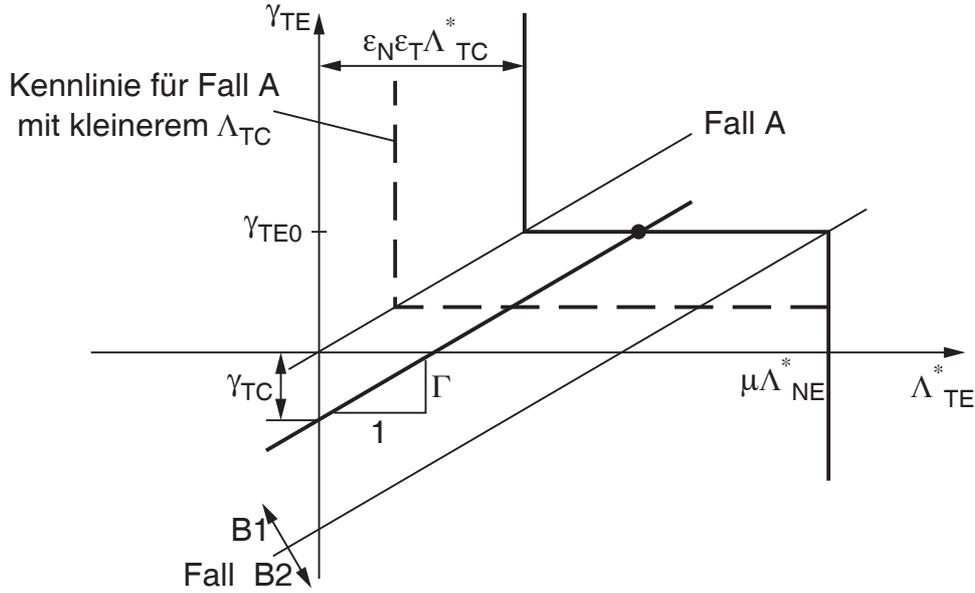


Bild 4.3: Expansionsphase des zentralen Einfachstoßes, Tangentialproblem

bei

$$\gamma_{TE0} = \epsilon_N \epsilon_T \mu \Gamma \quad (4.13)$$

fest und ist nicht mehr von den Anfangsbedingungen abhängig. Man kann die Impulsgerade nun nach unten verschieben, bis sie den rechten Knickpunkt der Stoßkennlinie erreicht. Das ist genau dann der Fall, wenn $\gamma_{TC} = \Gamma \mu \epsilon_N (\epsilon_T - 1)$ gilt. Bleibt γ_{TC} oberhalb dieser Grenze, liegt Fall B1 vor, und es gilt für den Expansionsimpuls und die tangential Relativgeschwindigkeit:

$$\gamma_{TE} = \epsilon_N \epsilon_T \gamma, \quad \Lambda_{TE}^* = \mu (\epsilon_N \epsilon_T - 1) - \frac{\gamma}{\Gamma} \quad (4.14)$$

Diesen Fall kann man sich so vorstellen, daß während der gleitend absolvierten Kompressionsphase ein tangentialer Impuls gespeichert werden konnte, der, da in der Expansionsphase Haften auftritt, trotzdem entspeichert werden kann.

Gilt $\gamma_{TC} < \Gamma \mu \epsilon_N (\epsilon_T - 1)$ liegt Fall B2 vor und die Impulsgerade schneidet den reinen Reibast der Expansionskennlinie. Es gilt

$$\Lambda_{TE}^* = \mu \epsilon_N, \quad \gamma_{TE} = \mu \Gamma (1 + \epsilon_N) + \gamma \quad (4.15)$$

Bei dieser Stoßkonfiguration herrscht während des gesamten Stoßes Gleiten. Die Gleitgeschwindigkeit ist die ursprüngliche Relativgeschwindigkeit, vermindert um einen konstanten Term. Die Ergebnisse der Expansionsphase für die drei Fälle sind in Tabelle 4.1 zusammengefaßt.

Tabelle 4.1: Das Tangentialproblem des zentralen Einfachstoßes

Kompressionsphase					
Wert	Fall A	Grenze	Fall B		
	$0 > \gamma > -\mu\Gamma$	$\gamma = -\mu\Gamma$	$\gamma < -\mu\Gamma$		
γ_{TC}	0	0	$\gamma + \mu\Gamma$		
Λ_{TC}^*	$-\frac{\gamma}{\Gamma}$	μ	μ		
Expansionsphase, $\gamma_{\text{grenz}} = -\mu\Gamma(1 + \varepsilon_N - \varepsilon_N\varepsilon_T)$					
			Fall B1	Grenze	Fall B2
			$\gamma > \gamma_{\text{grenz}}$	$\gamma = \gamma_{\text{grenz}}$	$\gamma < \gamma_{\text{grenz}}$
γ_{TE}	$-\varepsilon_N\varepsilon_T\gamma$	$\mu\varepsilon_N\varepsilon_T\Gamma$	$\mu\varepsilon_N\varepsilon_T\Gamma$	$\mu\varepsilon_N\varepsilon_T\Gamma$	$\mu\Gamma(1 + \varepsilon_N) + \gamma$
Λ_{TE}^*	$-\varepsilon_N\varepsilon_T\frac{\gamma}{\Gamma}$	$\varepsilon_N\varepsilon_T\mu$	$\mu(\varepsilon_N\varepsilon_T - 1) - \frac{\gamma}{\Gamma}$	$\mu\varepsilon_N$	$\mu\varepsilon_N$
Gesamtstoß					
Λ_T^*	$-(1 + \varepsilon_N\varepsilon_T)\frac{\gamma}{\Gamma}$	$(1 + \varepsilon_N\varepsilon_T)\mu$	$\mu\varepsilon_N\varepsilon_T - \frac{\gamma}{\Gamma}$	$\mu(\varepsilon_N + 1)$	$\mu(\varepsilon_N + 1)$

Der Gesamtimpuls in Normalrichtung beträgt gemäß den Gleichungen (4.7) und (4.10) $\Lambda_N^* = 1 + \varepsilon_N$. Das gesamte Verhalten dieses Stoßes ist ausschließlich von der dimensionslosen Geschwindigkeit γ und den Kontaktkoeffizienten μ , ε_N und ε_T abhängig. Für positive Werte von γ ergibt sich ein entsprechendes punktsymmetrisches Verhalten. In den Bildern 4.4, 4.5 und 4.6 sind Ergebniskurven für jeweils 4 Parametersätze, die in Tabelle 4.2 aufgelistet sind, aufgetragen. $\Gamma = 2.5$ tritt bei einer Kreisscheibe mit außenliegender Masse auf.

Tabelle 4.2: Untersuchte Beispielsätze

Satz	Γ	μ	ε_N	ε_T	Typ
1	2.5	0.5	0.8	0.0	ohne tang. Reversibilität
2	2.5	0.5	0.8	0.4	mit geringer tang. Reversibilität (ähnl. Stahl)
3	2.5	0.5	0.8	0.8	$\varepsilon_N = \varepsilon_T$ (ähnl. Gummi)
4	2.5	0.5	1	1	Grenzfall Energieerhaltung

In Bild 4.4 ist die tangentielle Relativgeschwindigkeit nach dem Stoß γ_{TE} über der vor dem Stoß γ dargestellt. Die Knicke in den Kurven stellen jeweils die Grenzen der Bereiche (A, B1, und B2) dar. Sobald $\varepsilon_T > 0$ ist, entsteht in der Nähe von $\gamma = 0$, was einem Stoß mit kleiner tangentialer Relativgeschwindigkeit entspricht, eine Umkehrung der Relativgeschwindigkeit. Ist die Relativgeschwindigkeit zu groß, überwiegen die Gleitphasen während des Stoßes und es kann keine Reversion mehr auftreten. Mit der Steigung der Kennlinien in der Nähe des Ursprungs läßt sich ε_T gut identifizieren (Sätze 2–4). Bei Satz 4 verschwindet der Bereich des Falls B1, bei Satz 1 sind die Fälle A und B1 identisch und gehen knickfrei ineinander über.

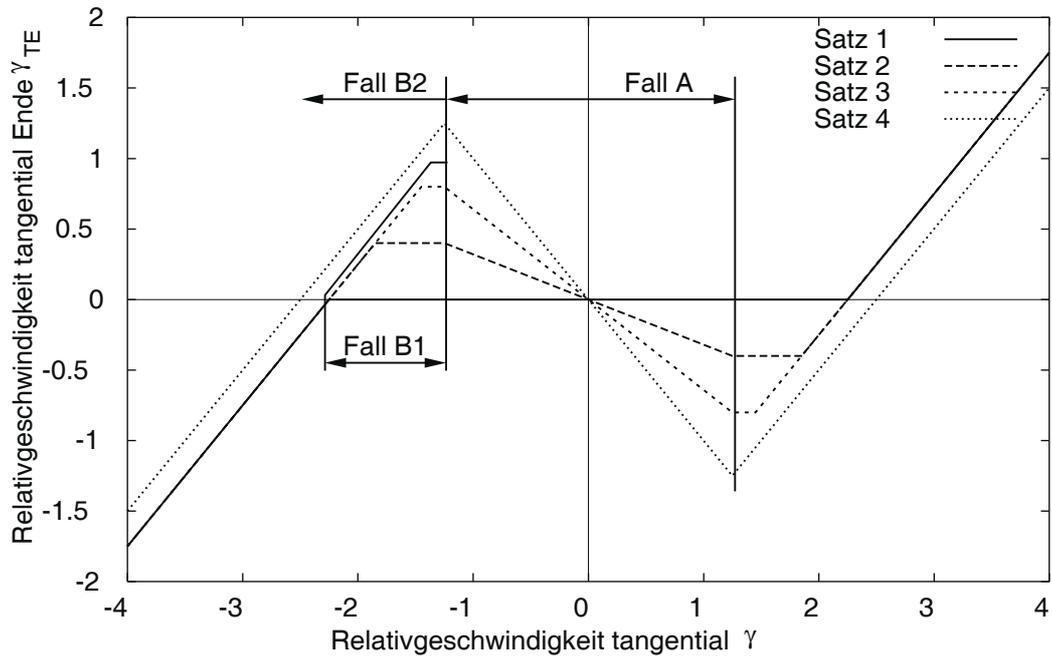


Bild 4.4: Relativgeschwindigkeiten des zentralen Einfachstoßes

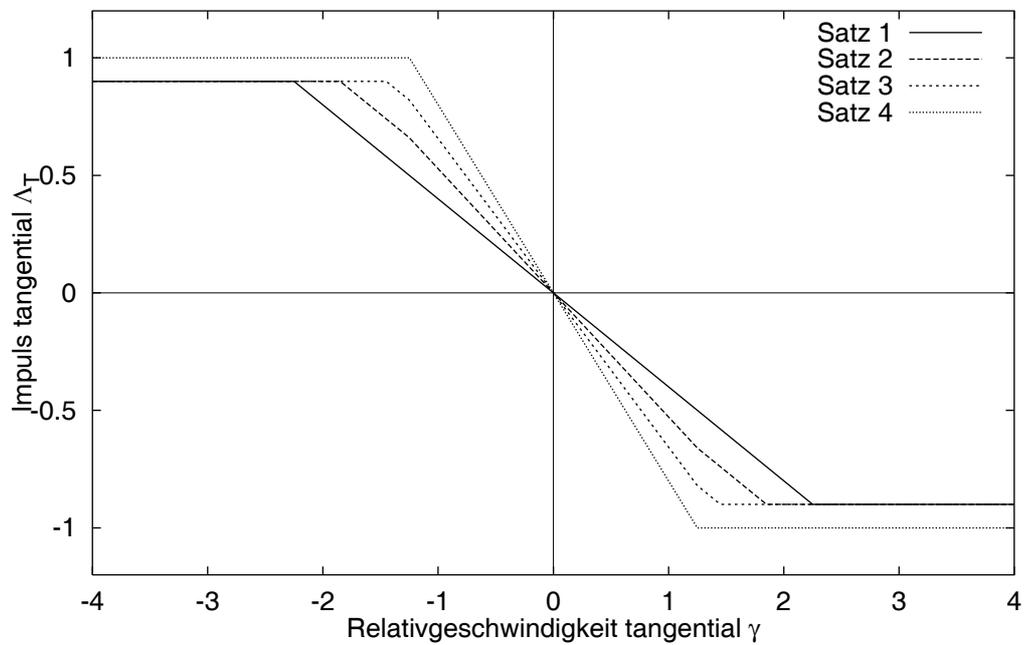


Bild 4.5: Tangentialimpulse des zentralen Einfachstoßes

In Bild 4.5 sind die während des Stoßes wirkenden Tangentialimpulse aufgetragen. Mit steigender Reversibilität (Satz 1–3) wird in der Übergangzone zunehmend mehr Impuls übertragen. Beim voll elastischen Stoß (Satz 4) ist der übertragene Impuls immer größer, da in der Expansionsphase ein größerer Normalimpuls wirkt, der mittels Reibung auch einen größeren Tangentialimpuls zuläßt.

Energiebilanz Die Differenz aus kinetischer Energie nach dem Stoß T_E und vor dem Stoß T_A wird mit ΔT bezeichnet und läßt sich mit Stoßimpulsen und Relativgeschwindigkeiten ausdrücken:

$$\Delta T = T_E - T_A = \frac{1}{2}\Lambda_N^2 G_{NN} + \frac{1}{2}\Lambda_T^2 G_{TT} + \Lambda_N \dot{g}_{NA} + \Lambda_T \dot{g}_{TA} \quad (4.16)$$

Es wird die dimensionslose Energie ΔT^* eingeführt, die zu folgendem Ausdruck führt:

$$\Delta T^* = \frac{\Delta T \cdot G_{NN}}{\dot{g}_{NA}^2} = \frac{1}{2}(\Lambda_N^*)^2 + \frac{1}{2}\Gamma(\Lambda_T^*)^2 - \Lambda_N^* + \Lambda_T^* \gamma \quad (4.17)$$

Zu zeigen ist, daß bei dem Stoß immer Energie dissipiert wird. Da die Normierung von ΔT das Vorzeichen nicht ändert, soll $\Delta T^* < 0$ abschnittsweise bewiesen werden. Zunächst sollen die beiden Komponenten von ΔT^* betrachtet werden, die Λ_N^* enthalten. Es gilt

$$\frac{1}{2}(\Lambda_N^*)^2 - \Lambda_N^* = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon_N)^2 - (1 - \varepsilon_N) = \frac{1}{2}(\varepsilon_N^2 - 1) \leq 0 \text{ für } \varepsilon_N \leq 1 \quad (4.18)$$

Diese Teile der Energiedifferenz erfüllen die Dissipationsbedingung. Grenzfall ist mit $\varepsilon_N = 1$ ein energieerhaltender Stoß.

In tangentialer Richtung muß noch der Term $\Delta T_T^* = \frac{1}{2}\Gamma(\Lambda_T^*)^2 + \Lambda_T^* \gamma$ fallweise untersucht werden:

Fall A

$$\Delta T_T^* = - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1 + \varepsilon_N \varepsilon_T}{\Gamma}}_{>0} \underbrace{\gamma^2}_{\geq 0} \underbrace{(1 - \varepsilon_N \varepsilon_T)}_{\geq 0} \quad (4.19)$$

Die Teilterme sind alle größer oder gleich null. Aufgrund des negativen Vorzeichens entsteht dadurch ein Energieverlust. Im Fall von $\gamma = 0$ ist keine tangentielle Relativbewegung vorhanden. Entsprechend wird auch keine Energie dadurch dissipiert.

Fall B1

$$\Delta T_T^* = \frac{1}{2\Gamma} \left((\mu \varepsilon_N \varepsilon_T \Gamma)^2 - \gamma^2 \right) \quad (4.20)$$

In diesem Fall gilt immer, daß $\gamma < -\mu\Gamma$ und somit auch $\gamma^2 > \mu^2\Gamma^2$. Dadurch ist der Klammerausdruck in Gleichung (4.20) immer ≤ 0 .

Fall B2

$$\Delta T_T^* = \mu(1 + \varepsilon_N) \left(\frac{1}{2} \mu \Gamma (1 + \varepsilon_N) + \gamma \right) \quad (4.21)$$

Hier ist nicht auf den ersten Blick zu erkennen, daß dieser Ausdruck ≤ 0 ist. Löst man Gleichung (4.21) nach γ auf und setzt γ_{grenz} aus Tabelle 4.1 ein, erhält man die Ungleichung

$$\frac{\Delta T_T^*}{\mu(\varepsilon_N + 1)} - \frac{1}{2} \mu \Gamma (\varepsilon_N + 1) < -\mu \Gamma (\varepsilon_N + 1) + \mu \Gamma \varepsilon_N \varepsilon_T, \quad (4.22)$$

die sich zu

$$\frac{\Delta T_T^*}{\mu(\varepsilon_N + 1)} < \mu \Gamma \left(\varepsilon_N \varepsilon_T - \frac{1}{2} (\varepsilon_N + 1) \right) \quad (4.23)$$

umformen läßt. Der Klammerausdruck auf der rechten Seite ist für $\varepsilon_N \leq 1$ und $\varepsilon_T \leq 1$ immer ≤ 0 .

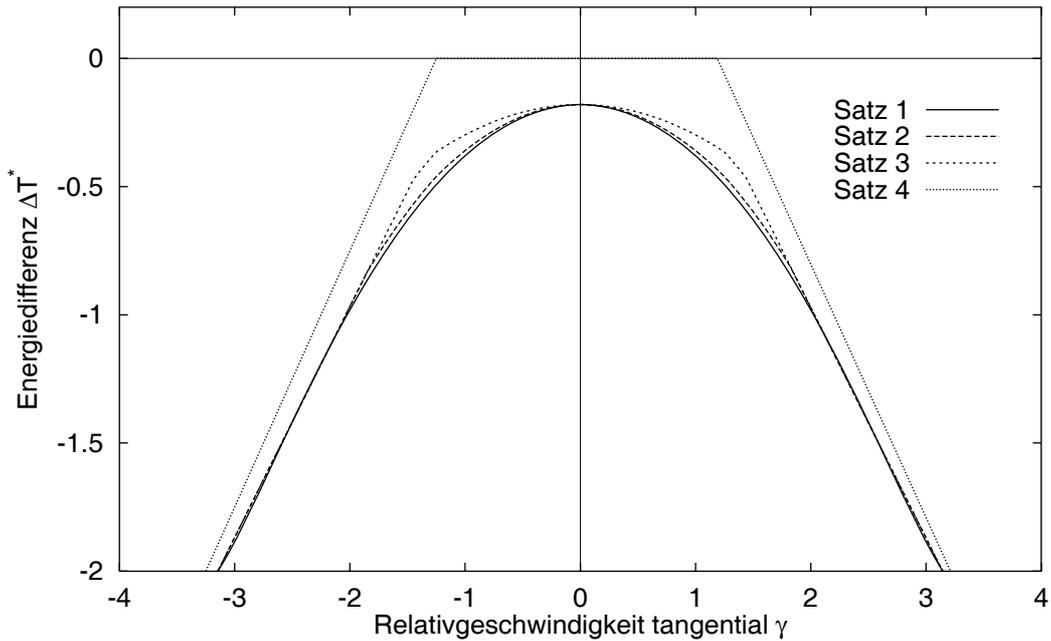


Bild 4.6: Energiebilanz des zentralen Einfachstoßes

Damit ist für alle Bereiche von γ gezeigt, daß durch den Stoß keine Energie hinzugewonnen werden kann. In Bild 4.6 ist die Energiedifferenz durch den Stoß für die verschiedenen Beispieldatensätze dargestellt.

In der Nähe von $\gamma = 0$ wird die Energiebilanz nur durch den normalen Stoßkoeffizienten ε_N bestimmt. Bei zunehmender Relativgeschwindigkeit nimmt die Dissipation durch Reibung zu, etwas vermindert bei großem ε_T (Satz 3). Für Datensatz 4 ist der

Stoß im Bereich des Haftens vollständig energieerhaltend. Bei Verlassen des Haftbereichs nimmt die Dissipation durch Reibung rasch zu. Bei reinem Gleiten während des gesamten Stoßes unterscheiden sich die Energieverluste der verschiedenen Parametersätze nur noch gering.

Eine wichtige Erkenntnis dieser Energiebetrachtung soll im folgenden erklärt werden: Ein Stoß hat immer dissipativen Charakter, wenn am Ende der Expansionsphase Haften vorliegt, das heißt die Rollbedingung gegenüber dem Stoßpartner beim Abheben erfüllt ist. Ausgenommen ist der triviale Fall, bei dem die Bedingung auch zu Stoßbeginn erfüllt war. Als Erläuterung soll das Beispiel in Bild 4.7 dienen.

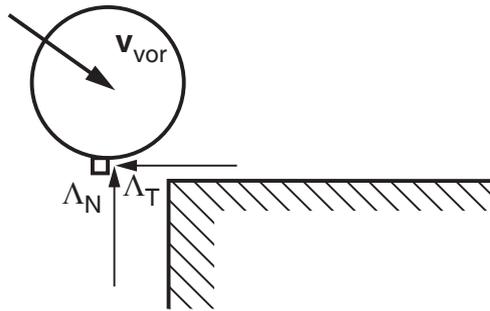


Bild 4.7: Gedankenmodell für den Stoß mit „Nase“

Der Tangentialimpuls entsteht in diesem Gedankenmodell nicht durch Reibung, sondern durch einen „Normalstoß“ an der Nase des Körpers. Man hat es also mit zwei unabhängigen Normalstößen zu tun. Fordert man die Erfüllung der Rollbedingung nach dem Stoß, muß an der „Nase“ in Tangentialrichtung ein plastischer Stoß stattfinden, der immer mit Dissipation verbunden ist.

Die Größenordnung dieser Verluste kann man für ein typisches Beispiel aus dem Bereich des Sportes abschätzen: Ein Tennisball (Hohlkugel) fliegt zunächst drallfrei und stößt mit einem Anflugwinkel von 20° auf den Boden. Wenn der Stoß so abläuft, daß für die normale Stoßzahl $\varepsilon_{N=0.8}$ gilt und in tangentialer Richtung nach dem Stoß die Rollbedingung gilt, verliert der Ball insgesamt ca. 37% seiner kinetischen Energie. Davon entfallen 4% auf den Verlust in Normalrichtung durch die Stoßzahl $\varepsilon_N < 1$ und 33% auf den Effekt der Reibung im Kontakt.

4.2 Der exzentrische Einfachstoß

In diesem Abschnitt wird der exzentrische Einfachstoß detailliert dargestellt. In diesem Fall sind die Gleichungen in Normal- und Tangentialrichtung nicht entkoppelt. Einfache Fallunterscheidungen wie im Abschnitt 4.1 sind hier nicht mehr möglich. Es kommt ein weiterer Parameter, der das Maß der Exzentrizität kennzeichnet, ins Spiel.

Zunächst wird die Kompressionsphase für einen derartigen Stoß allgemein dargestellt. Danach wird für einen speziellen exzentrischen Körper der gesamte Stoß be-

rechnet.

4.2.1 Die allgemeine Kompressionsphase

Auch hier soll eine dimensionslose Darstellung gewählt werden. Zusätzlich zu den in den Gleichungen (4.1) und (4.2) eingeführten Größen wird noch $\Gamma_{NT} = G_{NT}/G_{NN}$, eingeführt. Diese Größe charakterisiert das Maß der Exzentrizität des Stoßes. Wenn $\Gamma_{NT} = 0$ gilt, ist der Stoß zentral. Sie kann aber positives und negatives Vorzeichen annehmen, was Fallunterscheidungen erheblich erschwert.

Die Kompressionsphase wird durch vier Gleichungen beschrieben. Zunächst wird die Impulsbilanz 3.5 dimensionslos gemacht und in Form zweier skalarer Gleichungen

$$\gamma_{NC} = \Lambda_{NC}^* + \Gamma_{NC}\Lambda_{TC}^* - 1 \quad (4.24)$$

$$\gamma_{TC} = \Gamma_{NC}\Lambda_{NC}^* + \Gamma\Lambda_{TC}^* + \gamma. \quad (4.25)$$

für die normale und tangentialer Richtung dergestellt. Hinzu kommen die Kontaktgesetze in normaler und tangentialer Richtung gemäß den Gleichungen (4.5, 4.6). Die vier Unbekannten sind γ_{NC} , γ_{TC} , Λ_{NC}^* und Λ_{TC}^* .

Das normale Teilproblem kann man einfach lösen: Angenommen, man befindet sich im senkrechten Ast der Kennline (siehe Bild 3.2, linker Teil), gilt $\Lambda_{NC}^* = 0$. Da der Tangentialimpuls Λ_{TC}^* nur durch Reibung erzeugt werden kann, gilt somit auch $\Lambda_{TC}^* = 0$. Damit verbleibt $\gamma_{NC} = -1$, was gleichbedeutend mit Eindringen wäre und einen Widerspruch zum Kontaktgesetz (4.5) darstellt. Demnach muß $\gamma_{NC} = 0$ gelten.

Somit verbleiben noch drei Unbekannte, für die die Impulsbilanzen und das tangentialer Stoßgesetz zur Lösung zur Verfügung stehen. Eine weitere Einschränkung stellt die Beziehung $\Lambda_{NC}^* > 0$ aus dem normalen Stoßgesetz dar. In Bild 4.8 ist der dreidimensionale Raum, der durch die verbliebenen Unbekannten γ_{TC} , Λ_{NC}^* und Λ_{TC}^* aufgespannt wird, dargestellt. Die normale und die tangentialer Impulsbilanz stellen jeweils Ebenen in diesem Raum dar:

- Die normale Impulsbilanzebene steht senkrecht im Bild, das heißt, sie ist parallel zur γ_{TC} -Achse. Im Punkt P_2 schneidet sie bei $\Lambda_{TC}^* = 1$ die Λ_{NC}^* -Achse. Die Steigung in Λ_{NC}^* -Richtung beträgt Γ_{NT} . Diese Ebene kann sich in Abhängigkeit von Γ_{NT} um den Punkt P_2 in senkrechter Richtung drehen.
- Die tangentialer Impulsbilanzebene schneidet im Punkt P_1 die γ_{TC} -Achse beim Wert γ . Ihre Steigung in Λ_{NC}^* -Richtung beträgt Γ_{NT} und in Λ_{TC}^* -Richtung Γ . In Abhängigkeit von der Anfangsbedingung γ wird diese Ebene entlang der γ_{TC} -Achse nach oben oder unten verschoben.

Die Ebenen sind nicht begrenzt und nur in der Zeichnung zur besseren Sichtbarkeit jeweils auf ein endliches Flächenstück beschränkt.

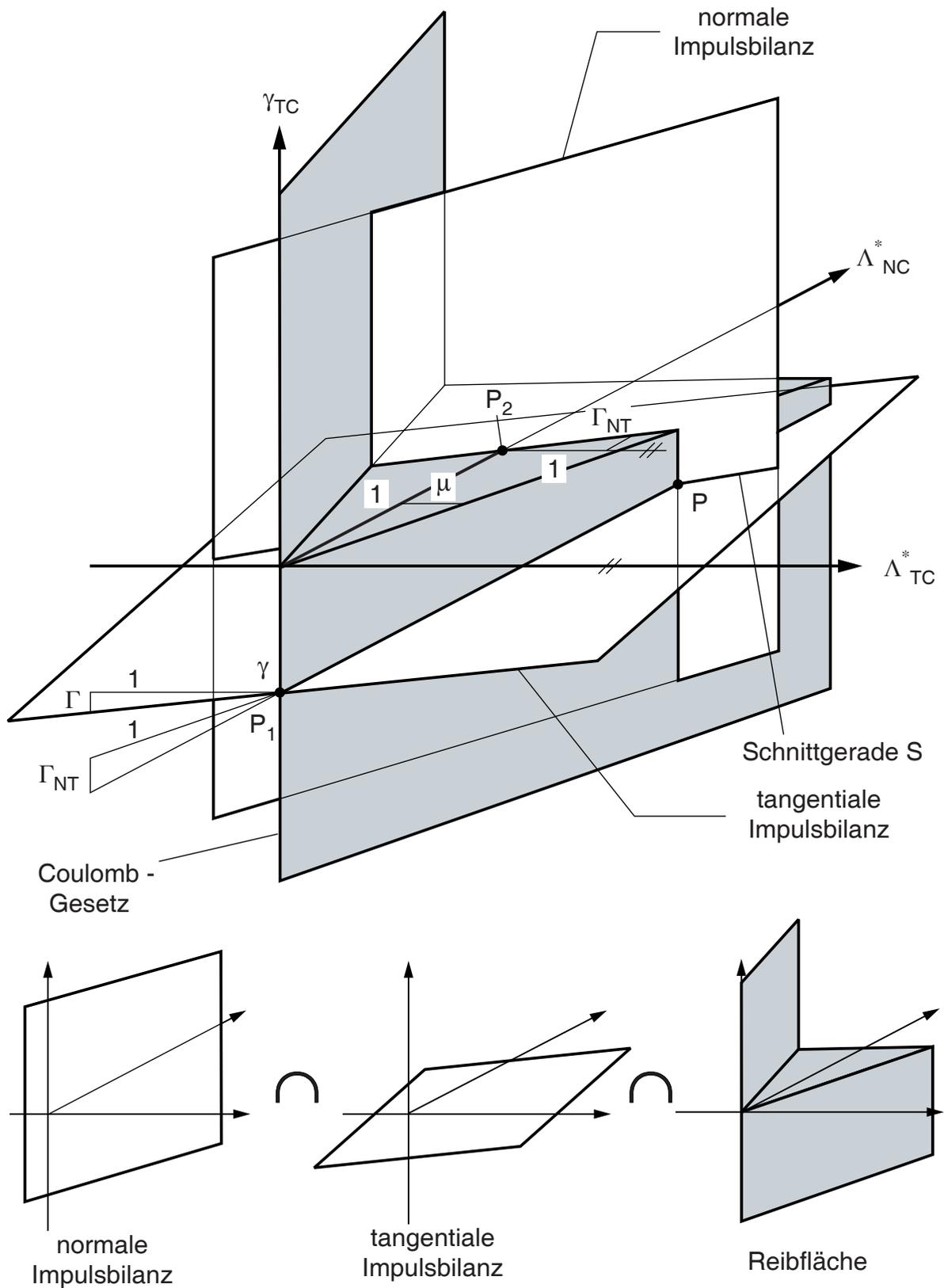


Bild 4.8: Raum der Unbekannten γ_{NC} , γ_{TC} und Λ_{TC}^* mit den lösungsbestimmenden Ebenen und Flächen

Das Stoßgesetz wird durch eine zweifach geknickte Fläche repräsentiert. Die beiden äußeren Flanken sind jeweils parallel zur γ_{TC} -Achse. Die verbindende horizontale Dreiecksfläche liegt in der Ebene, die durch die Λ_{NC}^* - und Λ_{TC}^* -Achsen aufgespannt wird. Diese Fläche erweitert sich mit der Steigung μ (Reibkoeffizient) in positive Λ_{NC}^* -Achsenrichtung. Die Flächen sind jeweils halbumendlich: sie erstrecken sich von den Knicken, an denen sie tatsächlich begrenzt sind, unendlich weit. In der Zeichnung sind die Flächen begrenzt dargestellt.

Der Schnittpunkt der beiden Ebenen mit der Stoßgesetzfläche ist der Lösungspunkt im $(\gamma_{TC}, \Lambda_{NC}^*, \Lambda_{TC}^*)$ -Raum. Zu untersuchen ist, ob in Anbetracht der Form der Reibfläche eine eindeutige Lösung existiert. Dazu wird die Schnittgerade S der beiden Ebenen betrachtet:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{TC} \\ \Lambda_{NC}^* \\ \Lambda_{TC}^* \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} \Gamma - \Gamma_{NT}^2 \\ -\Gamma_{NT} \\ 1 \end{pmatrix} \Lambda_{TC}^* + \begin{pmatrix} \Gamma_{NT} + \gamma \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

Für diese Gerade gilt grundsätzlich, daß mit einer Zunahme von Λ_{TC}^* auch γ_{TC} ansteigt, da

$$\frac{\partial \gamma_{TC}}{\partial \Lambda_{TC}^*} = \Gamma - \Gamma_{NT}^2 > 0 \quad (4.27)$$

die immer positive Determinante der positiv definiten \mathbf{G} -Matrix ist. Aus diesem Grund schneidet die Gerade S die Stoßgesetzfläche genau einmal, deshalb gibt es eine eindeutige Lösung.

Die Lage des Schnittpunktes wird letztlich durch vier Parameter bestimmt: Die Reibung μ steht unabhängig von der Stoßkonfiguration fest. Γ und Γ_{NT} ändern sich durch die Lage des Schwerpunktes zum Stoßpunkt im Stoßmoment und spiegeln damit den Grad der Exzentrizität wieder. Der Parameter γ stellt die Tangentialgeschwindigkeit vor dem Stoß dar.

Prinzipiell sind drei Lagen des Schnittpunktes denkbar: Er befindet sich in einer der beiden senkrechten Flanken, was Gleiten am Ende der Kompressionsphase in die eine oder andere Richtung bedeutet, oder der Schnittpunkt liegt im horizontalen Bereich, was Haften anzeigt. Tendenziell verschiebt ein großes γ den Schnittpunkt in Richtung $\gamma_{TC} > 0$ und $\Lambda_{TC}^* < 0$. Dennoch ist auch eine Reibrichtungsumkehr bereits in der Kompressionsphase denkbar.

Es wäre auch hier möglich, analog zum Vorgehen in Abschnitt 4.1, eine Kaskade von Fallunterscheidungen durchzuführen. Dies führt jedoch zu unanschaulichen Ergebnissen. Es ist sinnvoller, dieses Problem numerisch mit einem LCP zu lösen, welches ein strukturiertes Fallunterscheidungsschema enthält.

Die Expansionsphase ist noch komplizierter, da die Komplementaritätsbedingung des Normalgesetzes nicht sofort zu lösen ist, und somit die Lösung im vierdimensionalen Raum zu suchen ist. Dabei geht die Anschauung völlig verloren, weshalb hier auf eine allgemeine Darstellung verzichtet wird.

4.2.2 Kontaktkinematik des speziellen Wurfkörpers

Es wird ein Körper gemäß Bild 4.9 betrachtet. Der Körper sei beliebig geformt (graue Linie). Ein Teil der Körperkontur ist ein Kreisbogen mit dem Radius R (schwarze Linie), an dem auch der Stoß stattfindet. Stoßpartner sei eine inertielle Fläche. Bezugspunkt ist der Schwerpunkt S . Für ihn gelten die Koordinaten x , y und φ im Inertialsystem. Der Ortsvektor vom Schwerpunkt zum Mittelpunkt M des Konturkreisbogens sei \mathbf{r}_{SM} . Dieser Körper kann im Grenzfall eine Kreisscheibe ($\mathbf{r}_{SM} = 0$) oder einen Körper mit einer Ecke ($R = 0$) darstellen. Auch ein Stab ist ein Spezialfall dieser Körpergeometrie. Der Winkel φ beschreibt die Verdrehung zwischen dem körperfesten und dem inertialen Koordinatensystem.

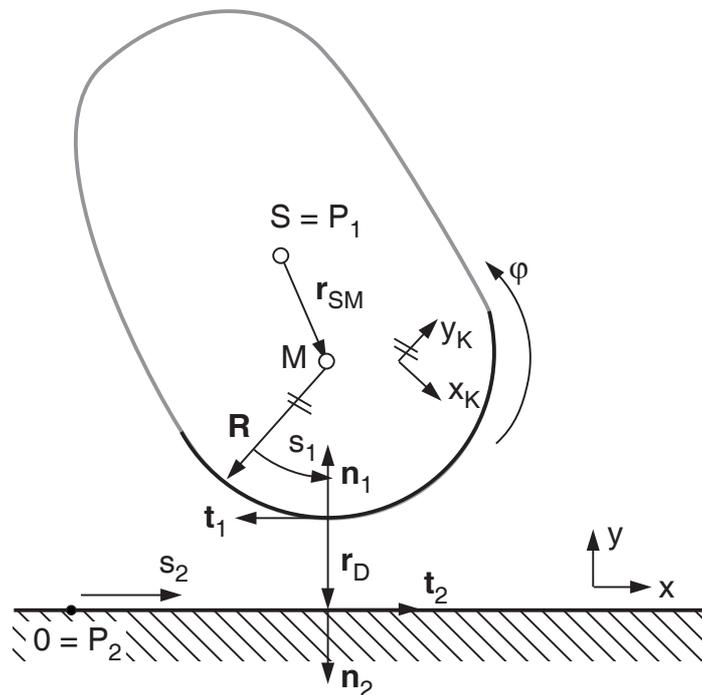


Bild 4.9: Exzentrischer Wurfkörper mit kreisbogenförmiger Kontaktzone

Ohne auf die Herleitung einzugehen, die im Abschnitt 2.3 von [22] ausführlich beschrieben ist, sollen gleich die normalen und tangentialen Abstände und Relativgeschwindigkeiten

$$g_N = r_{SM,x} \sin \varphi + r_{SM,y} \cos \varphi + y - R \quad (4.28)$$

$$g_T = -r_{SM,x} \cos \varphi + r_{SM,y} \sin \varphi - x - R \cdot \varphi \quad (4.29)$$

$$\dot{g}_N = (r_{SM,x} \cos \varphi - r_{SM,y} \sin \varphi) \dot{\varphi} + \dot{y} \quad (4.30)$$

$$\dot{g}_T = (-r_{SM,x} \sin \varphi + r_{SM,y} \cos \varphi) \dot{\varphi} - \dot{x} - R \cdot \dot{\varphi} \quad (4.31)$$

angegeben werden. Aus den Relativgeschwindigkeiten (Gleichung (4.30) und (4.31))

wird die Bindungsprojektionsmatrix

$$\mathbf{W}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & r_{SM,x} \cos \varphi - r_{SM,y} \sin \varphi \\ -1 & 0 & r_{SM,x} \sin \varphi + r_{SM,y} \cos \varphi - R \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

gewonnen.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man das körperfeste Koordinatensystem so wählen, daß $r_{SM,y} = 0$ und $r_{SM,x} = r_{SM}$ gilt. Zusätzlich wird eine neuer Winkel $\alpha = \varphi + \pi/2$ eingeführt, für den genau dann $\alpha = 0$ gilt, wenn der Schwerpunkt über dem Stoßkontaktpunkt liegt. In diesem Fall handelt es sich um einen zentralen Stoß. Die Bindungsprojektionsmatrix vereinfacht sich zu

$$\mathbf{W}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & r_{SM} \sin \alpha \\ -1 & 0 & -r_{SM} \cos \alpha - R \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

und mit der Massenmatrix $\mathbf{M} = \text{diag}(m, m, J)$ ergibt sich die projizierte Massenwirkungsmatrix

$$\mathbf{G} = \frac{1}{Jm} \begin{pmatrix} J + r_{SM}^2 m (1 - \cos^2 \alpha) & mr_{SM} \sin \alpha (R + r_{SM} \cos \alpha) \\ mr_{SM} \sin \alpha (R + r_{SM} \cos \alpha) & J + m (R + r_{SM} \cos \alpha)^2 \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

Man sieht, daß alle Elemente von \mathbf{G} vom Auftreffwinkel α abhängen, die Hauptdiagonalelemente G_{NN} und G_{TT} nur in zweiter Ordnung, die Nebendiagonalelemente G_{NT} in erster Ordnung. Für $\alpha = 0$ verschwinden diese Elemente erwartungsgemäß.

4.2.3 Stoßverhalten des speziellen Wurfkörpers

Für die Fälle, die in Tabelle 4.2 dargestellt sind, soll nun das Verhalten des exzentrischen Stoßes untersucht werden. Der Auftreffwinkel betrage zunächst $\alpha = -20^\circ$. Dabei ergeben sich für den untersuchten Wurfkörper abweichend zu Tabelle 4.2 $\Gamma = 3$ und $\Gamma_{NT} = 0.65$.

In Bild 4.10 ist analog zu Bild 4.4 die tangential Relativgeschwindigkeit nach dem Stoß aufgetragen. Die Sätze 1–3 zeigen zunehmendes tangentialreversibles Verhalten. Im Schnittpunkt dieser Kurven verhalten sich die Stöße gleich: Der Stoß verläuft so, daß kein tangentialer Impuls wirkt (Nulldurchgang aller Kurven in Bild 4.11). Das ist genau dann der Fall wenn $\gamma = -\Gamma_{NT}$ gilt, das heißt, das Verhältnis der tangentialen und normalen Relativgeschwindigkeit entspricht dem Verhältnis der Elemente der Massenwirkungsmatrix.

Das in dieser Arbeit vorgestellte Stoßgesetz zeichnet sich dadurch aus, daß die Effekte in tangentialer Richtung auch das Verhalten des Stoßes in normaler Richtung beeinflussen können. Voraussetzung dafür ist, daß der Stoß exzentrisch ist, weil sonst die Hauptrichtungen entkoppelt sind. In Bild 4.12 ist die Abhebegeschwindigkeit am Ende des Stoßes über der tangentialen Relativgeschwindigkeit aufgetragen. Bei

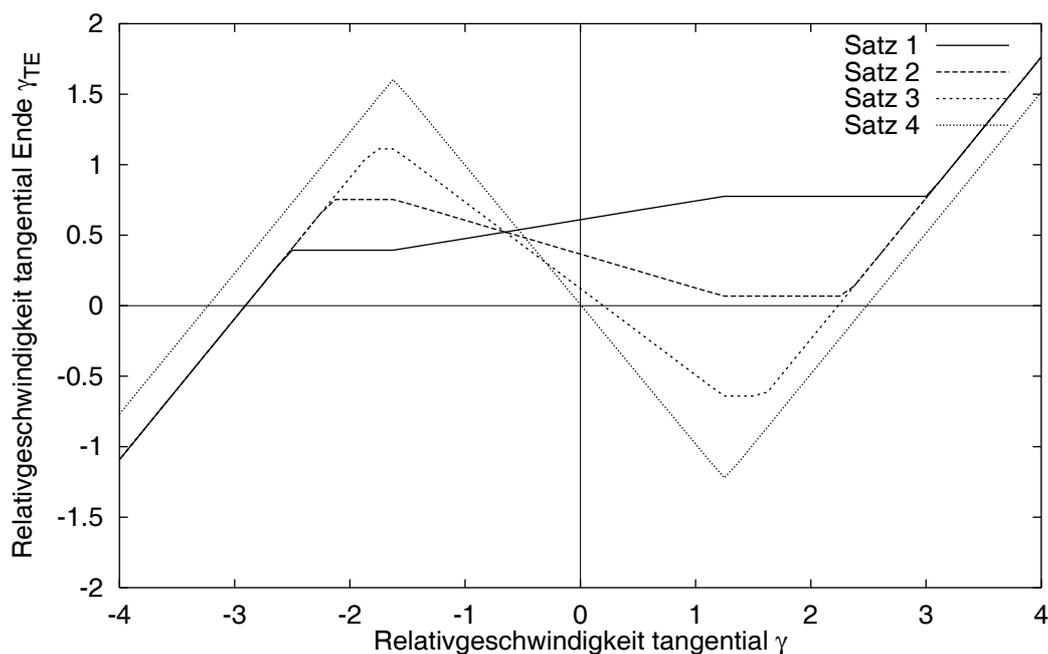


Bild 4.10: Tangentiale Relativgeschwindigkeit des exzentrischen Einfachstoßes

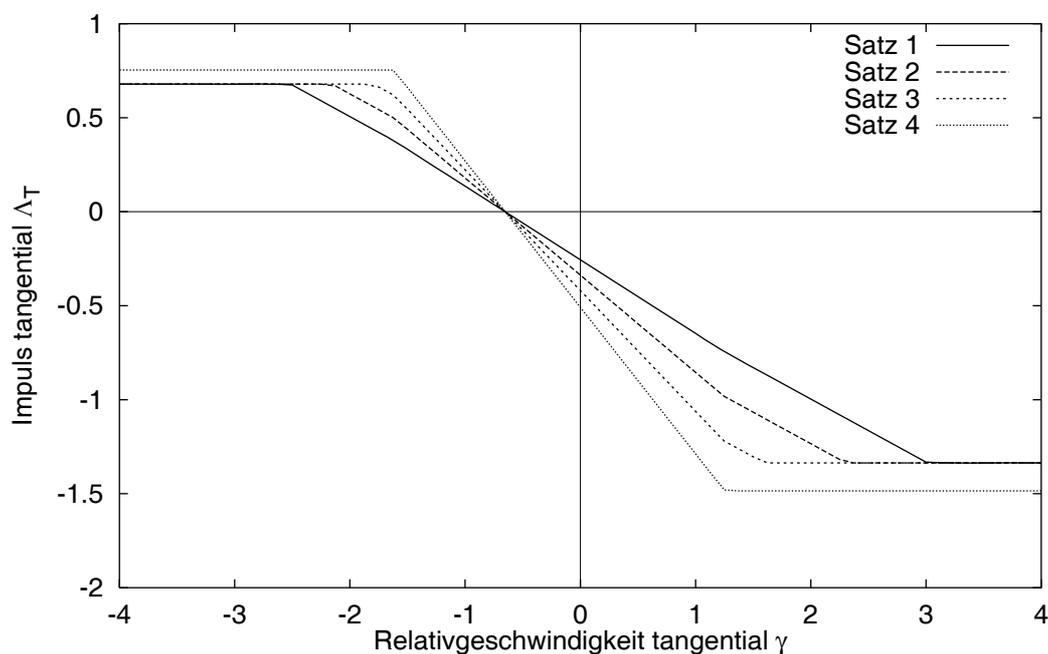


Bild 4.11: Tangentialimpuls des exzentrischen Einfachstoßes

großen Relativgeschwindigkeiten, die einem völligen Durchrutschen während des gesamten Stoßes entsprechen, findet keine Beeinflussung statt. Kommt es aber zum Haften während des Stoßes, kann entweder eine Verringerung der Abhebegeschwin-

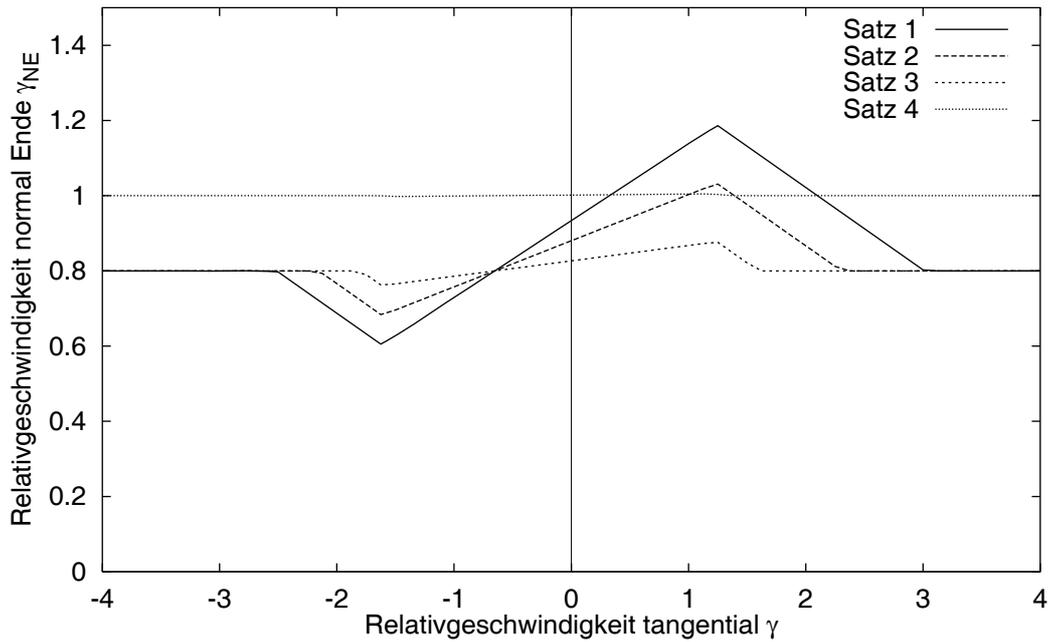


Bild 4.12: Normale Relativgeschwindigkeit des exzentrischen Einfachstoßes

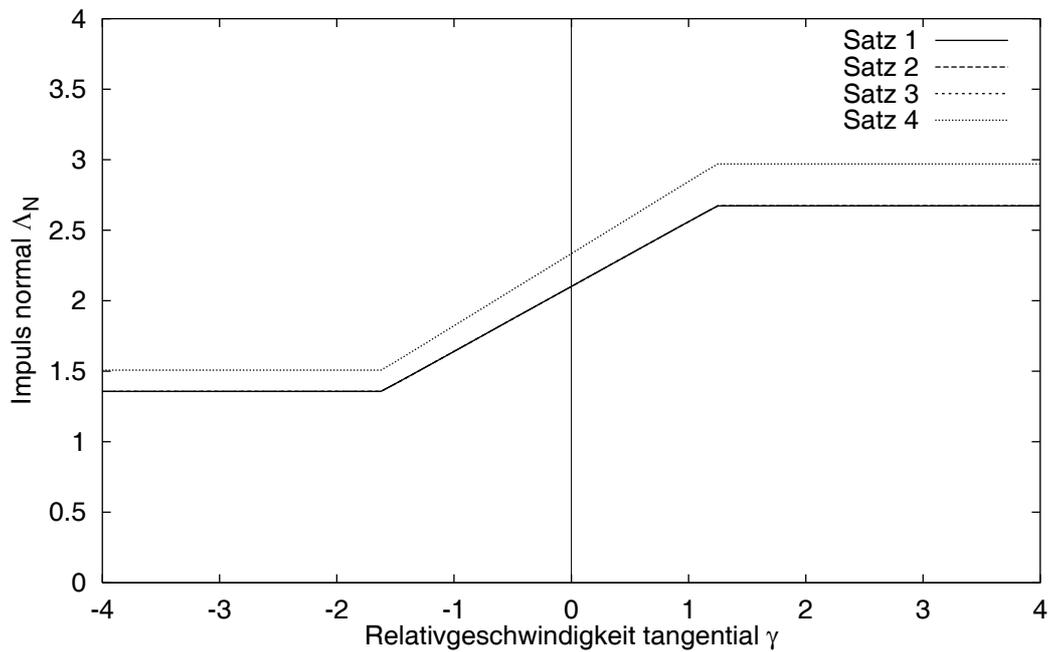


Bild 4.13: Normalimpuls des exzentrischen Einfachstoßes

digkeit stattfinden und im Gegenzug die Tangentialgeschwindigkeit erhöht werden (Bereich ca. $-2.5 < \gamma < -0.65$) oder umgekehrt aus der Tangentialbewegung Energie in die Normalbewegung umgelagert werden (Bereich ca. $-0.65 < \gamma < 2.5$). Der

Grenzfall ist der oben beschriebene Fall $\gamma = -\Gamma_{NT}$. Bei entsprechenden Stoßkonfigurationen ist es durchaus möglich, daß die normale Abhebegeschwindigkeit größer als die Kollisionsgeschwindigkeit ist, so daß scheinbar ein kinematisch definiertes $\varepsilon_N > 1$ auftreten kann. Dies ist ein Hinweis darauf, daß derartige Stoßvorgänge keinesfalls mit dem Newton'schen Stoßgesetz beschrieben werden können.

Ein interessanter Sonderfall ist in diesem Zusammenhang der sowohl in normale als auch in tangentialer Richtung voll-elastische Stoß ($\varepsilon_N = 1, \varepsilon_T = 1$). Dieser durch Satz 4 dargestellte Fall zeichnet sich dadurch aus, daß keine Umlagerung von Energie zwischen den Stoßrichtungen stattfindet. Zur Umlagerung ist offensichtlich immer Dissipation erforderlich.

Beim Blick auf Bild 4.13 fällt auf, daß die Normalimpulse für die Sätze 1–3 identisch sind. Der Normalimpuls würde im zentralen Fall $\Lambda_N^* = 1 + \varepsilon_N$ betragen. Abhängig von der tangentialen Relativgeschwindigkeit vor dem Stoß liegt der wirkende Impuls entweder darunter oder darüber.

Bei allen diesen Effekten stellt sich sofort die Frage, ob bei der Verwendung dieses Stoßgesetzes der dissipative Charakter gewahrt bleibt. Aufschluß darüber gibt Bild 4.14, in dem der während des Stoßes auftretende Energieverlust ΔT^* dargestellt ist. Die Sätze 1–3 sind schon alleine aufgrund $\varepsilon_N < 1$ immer dissipativ. Satz 4 zeigt, analog zum zentralen Stoß, einen Bereich, in dem er vollständig ohne Energieverlust abläuft. Dieser ist im Gegensatz zum zentralen Stoß (vergleiche Bild 4.6) nicht mehr symmetrisch bezüglich $\gamma = 0$. Bei größeren Relativgeschwindigkeiten kommt es immer zum Gleiten und damit zu reibungsbedingtem Energieverlust.

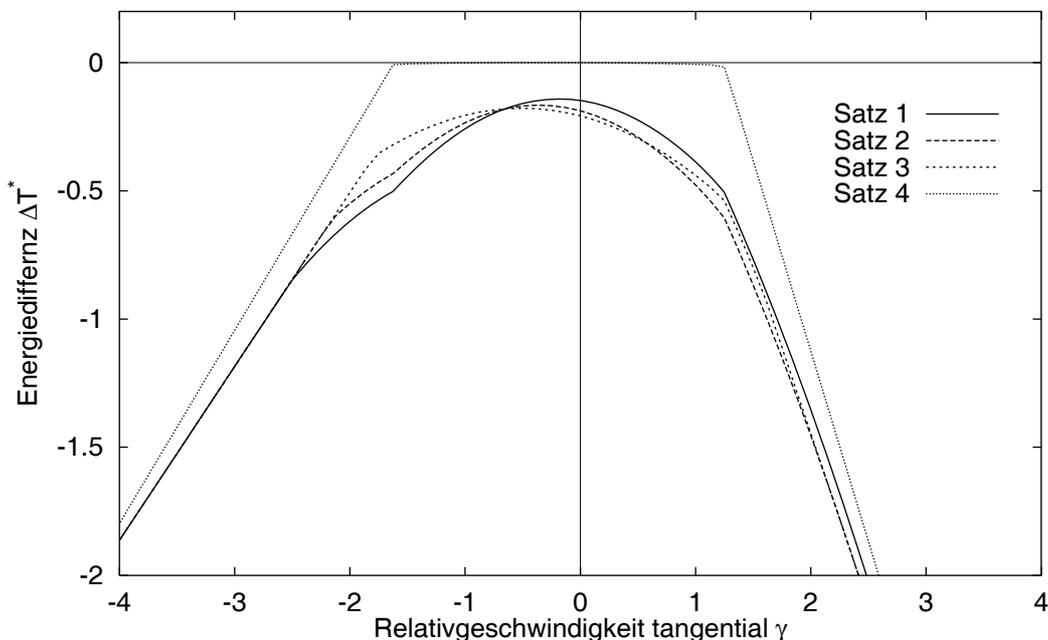


Bild 4.14: Energiebilanz des exzentrischen Einfachstoßes

Am Beispiel der tangentialen Relativgeschwindigkeiten soll der Einfluß der Exzentri-

zität dargestellt werden. In Bild 4.15 ist für einen Stoß, welcher Satz 3 entspricht, der Winkel α variiert worden. Um den Fall des zentralen Stoßes $\alpha = 0^\circ$ gruppieren sich punktsymmetrisch die exzentrischen Stöße mit $\alpha = \pm 15^\circ$ und $\alpha = \pm 30^\circ$. Interessanterweise geht die Reversibilität bei zunehmender Exzentrizität zurück. Dies liegt daran, daß in dem Maße, wie der Stoß exzentrischer wird, weniger Normalimpuls aufgebracht werden kann, und dementsprechend auch eher Gleiten auftritt. Dies ist bei Betrachtung des linken oberen Elements der Matrix \mathbf{G} (Gleichung 4.34) erkennbar: mit zunehmendem Betrag von α wird dieses Element kleiner, was bedeutet, daß die zur Bewegungsumkehrung im Stoßpunkt benötigten Impulse in Normalenrichtung bei gleicher Stoßgeschwindigkeit immer geringer werden.

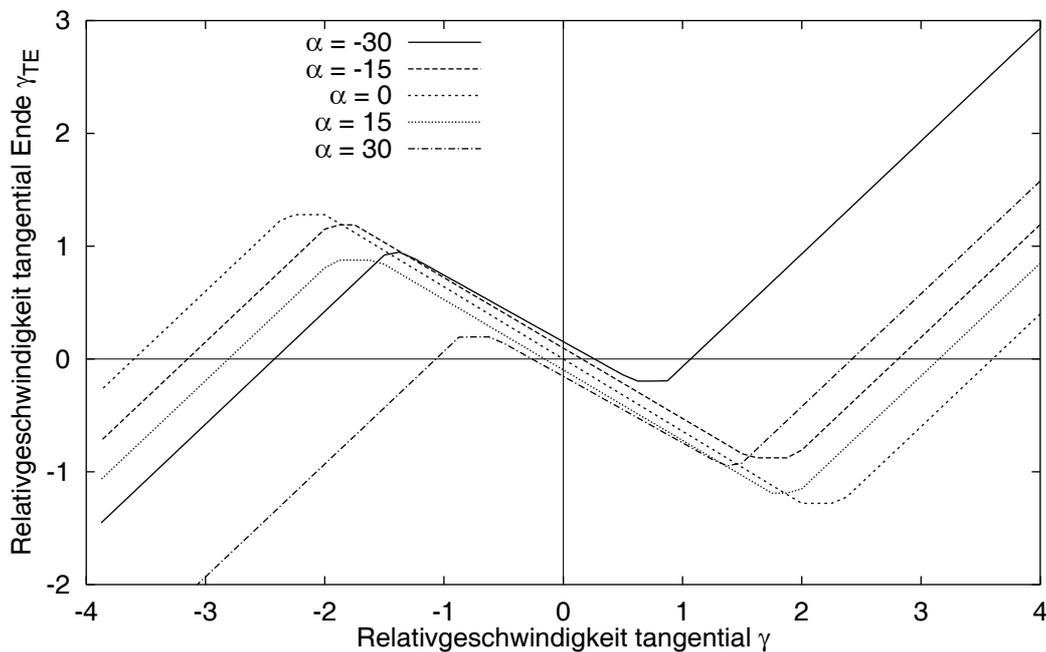


Bild 4.15: Tangentiale Relativgeschwindigkeit des exzentrischen Einfachstoßes bei verschiedenen Exzentrizitäten

An dieser Stelle soll noch geklärt werden, in wieweit die Ergebnisse des Impulsmodells mit denen des hybriden Stoßmodells übereinstimmen. Dazu wurde als Testbeispiel der Stoß des Wurfkörpers, der für die exzentrischen Stoßversuche verwendet wurde, mit beiden Stoßmodellen berechnet.

Die Ergebnisse dieses Vergleichs sind in Bild 4.16 dargestellt. Als Vergleichsgröße wurde die tangentiale Relativgeschwindigkeit am Ende des Stoßes γ_{TE} herausgegriffen, weil sie das gesamte Verhalten des Stoßes in tangentialer Richtung gut zusammenfaßt und die Beschreibung dieser Phänomene letztlich Ziel dieser Arbeit ist.

Die Matrix \mathbf{G} ist für beide Fälle identisch. Die Kontaktparameter lauten $\mu = 0.8$, $\varepsilon_N = 0.85$ und $\varepsilon_T = 0.8$, was den Eigenschaften des Gummwurfkörpers entspricht. Die Steifigkeits- und Dämpfungswerte für das Hybridmodell betragen $c_N = 200000$ N/mm, $c_T = 60000$ N/mm, $d_N = 10$ Ns/mm und $d_T = 20$ Ns/mm.

Das Dämpfungsgesetz ist so modifiziert, daß der Dämpfungskoeffizient bis zu einem Mindesteindringen linear ansteigt und erst dann den vorgegebenen Wert erreicht. Die Steifigkeiten wurden aus den Stoßmessungen der Gummiwurfkörper identifiziert.

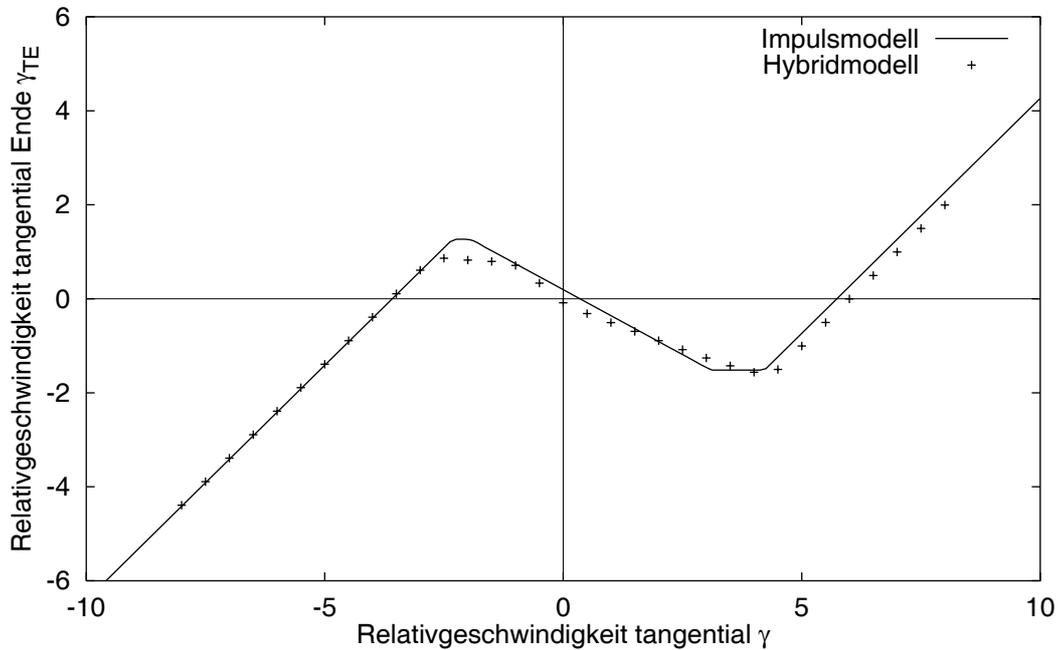


Bild 4.16: Vergleich des Hybridmodells mit dem Impulsmodell

Man erkennt eine weitgehende Übereinstimmung der Ergebnisse des hybriden Modells mit dem Impulsmodell. Die tangentiale Reversibilität wird von beiden Modellen quasi identisch vorhergesagt. Auch das Einmünden in die Geraden, die kontinuierliches Durchrutschen während des Stoßes vorhersagen, ist richtig getroffen. Die kleinen Unterschiede resultieren aus der Tatsache, daß durch das Abspalten einer Teilmasse immer ein kleiner Modellfehler gemacht wird.

4.3 Unterschied zwischen einem tangentialplastischem und reinem Reibstoß

Wie schon in Abschnitt 3.7 angedeutet, kann bei exzentrischen Stößen ein Unterschied zwischen dem tangentialplastischen Stoß mit $\varepsilon_T = 0$ und dem reinen Reibstoß ohne jegliche Berücksichtigung tangentialreversibler Effekte auftreten. In diesem Abschnitt soll anhand eines einfachen Beispiels beide Fälle dargestellt werden. Am Ende steht dann eine Bewertung, ob und wann dieser Unterschied wichtig sein kann.

Betrachtet werden soll eine senkrecht nach unten fallende homogene massenbehaltete Scheibe (Masse M , Radius R), an der am äußeren Rand eine punktförmige Zusatzmasse m angebracht ist. Die Scheibe fällt ohne Rotation senkrecht nach unten und hat im Moment des Stoßes die Geschwindigkeit v_0 in negative y -Richtung.

Die Zusatzmasse steht dabei in der äußersten rechten Position. Um übersichtlichere Ergebnisse zu erhalten, gelte $m = M/2$. Im Stoßpunkt soll ausreichend Reibung herrschen, um Haften zu gewährleisten. Der Stoßkoeffizient in Normalenrichtung sei ε_N . Die Gesamtkonfiguration ist in Bild 4.17 dargestellt.

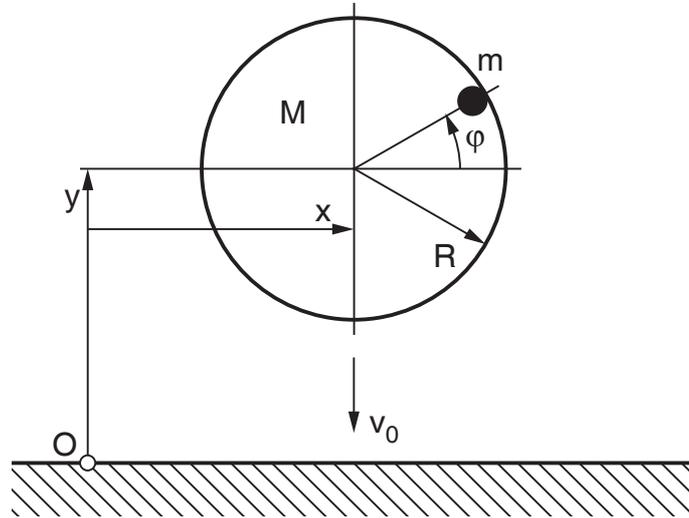


Bild 4.17: Konfiguration des Stoßes

Die generalisierten Koordinaten sind die Bewegung des Scheibenschwerpunktes in x und y - Richtung, sowie die Verdrehung der Scheibe um diesen Punkt mit dem Winkel φ , die im Vektor $\mathbf{q} = (x, y, \varphi)^T$ zusammengefaßt sind. Zu Beginn des Stoßes (Index A) gelte $\mathbf{q}_A = (0, R, 0)^T$ und $\dot{\mathbf{q}}_A = (0, -v_0, 0)^T$.

Die Massenmatrix \mathbf{M} hängt von φ ab und lautet für die angegebene Stoßkonfiguration

$$\mathbf{M} = M \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}R \\ 0 & \frac{1}{2}R & \frac{1}{2}R^2 \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

Mit der Jacobimatrix \mathbf{W} kann die Massenwirkungsmatrix \mathbf{G} berechnet werden:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{W}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{W} = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{11}{3} \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

Die Relativgeschwindigkeiten beim Stoßbeginn lassen sich mit

$$\mathbf{g}_A = \mathbf{W}^T \dot{\mathbf{q}}_A = \begin{pmatrix} -v_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

berechnen.

Kompressionsphase: Am Ende der Kompressionsphase soll Haften herrschen. Die dazu notwendigen Impulse \mathbf{A}_C lassen sich mit

$$\mathbf{A}_C = -\mathbf{G}^{-1}\mathbf{g}_A = v_0 M \begin{pmatrix} \frac{11}{8} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

berechnen. Damit dieser Zustand erreichbar ist, muß ein Reibkoeffizient $\mu > 3/8$ im Kontakt herrschen, was auch gegeben sein soll. Die Relativgeschwindigkeit am Ende der Kompressionsphase lautet dann $\dot{\mathbf{g}}_C = (0, 0)^T$.

Expansionsphase, tangentialplastisch: In diesem Fall gilt $\varepsilon_T = 0$. Die Geschwindigkeit \dot{g}_{TE0} ergibt sich mit Gleichung (3.26) zu $-11/8\varepsilon_N v_0$. Der tangentielle Expansionsimpuls verschwindet und der Normalimpuls ergibt sich aus dem Poisson'schen Gesetz zu:

$$\mathbf{A}_E = \varepsilon_N M v_0 \begin{pmatrix} \frac{11}{8} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

Die daraus resultierende Relativgeschwindigkeit am Ende des Stoßes

$$\dot{\mathbf{g}}_E = \mathbf{G}\mathbf{A}_E = \varepsilon_N v_0 \begin{pmatrix} \frac{11}{8} \\ -\frac{11}{8} \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

ist mit den Komplementaritätsbedingungen kompatibel und damit korrekt. Die generalisierten Geschwindigkeiten am Ende des Stoßes lauten dann

$$\dot{\mathbf{q}}_E = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{W}(\mathbf{A}_C + \mathbf{A}_E) + \dot{\mathbf{q}}_A = v_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{11}{8}\varepsilon_N \\ -\frac{2+11\varepsilon_N}{8R} \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

Expansionsphase, reiner Reibstoß: In diesem Fall gilt gemäß dem Poisson'schen Stoßgesetz für den normalen tangentialen Expansionsimpuls $\Lambda_{NE} = \varepsilon\Lambda_{NC}$. Der Tangentialimpuls ergibt sich aus der Forderung, daß auch in der Expansionsphase Haften herrschen soll. Der Expansionsimpuls lautet damit

$$\mathbf{A}_E = \varepsilon_N M v_0 \begin{pmatrix} \frac{11}{8} \\ \frac{11}{8} \end{pmatrix}, \quad (4.42)$$

wobei auch hier $\mu > 3/8$ gelten muß, was bereits in der Kompressionsphase Voraussetzung war. Für die Relativgeschwindigkeit am Stoßende gilt:

$$\dot{\mathbf{g}}_E = \mathbf{G}\mathbf{A}_E = \varepsilon_N v_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

Die generalisierten Geschwindigkeiten am Ende des Stoßes lauten dann

$$\dot{\mathbf{q}}_E = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{W}(\mathbf{A}_C + \mathbf{A}_E) + \dot{\mathbf{q}}_A = v_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(1 + \varepsilon_N) \\ \varepsilon_N \\ -\frac{1+\varepsilon_N}{4R} \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

Vergleich: Bei diesem Beispiel zeigt sich tatsächlich beim Vergleich der Endgeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}_E$ ein Unterschied zwischen dem tangentialplastischen und dem reinen Reibstoß. Beim tangentialplastischen Stoß herrscht am Stoßende eine tangentielle Relativgeschwindigkeit im Kontaktpunkt, was auch der Vorstellung eines nachgiebigen aber dissipativen Elements entspricht. Beim reinen Reibstoß herrscht Haften und somit auch keine Relativgeschwindigkeit. Diese Unterschiede erscheinen bei diesem idealisierten Beispiel größer, als sie in Realität ausgeprägt sind. Folgende Bedingungen müssen möglichst gut erfüllt sein, um den Unterschied deutlich hervortreten zu lassen:

- Die Reibung muß ausreichend groß sein. Die Differenz wird umso deutlicher, je größer der Tangentialimpuls werden kann.
- Die Exzentrizität des Stoßes muß möglichst groß sein. Bei einem zentralen Stoß tritt dieser Unterschied überhaupt nicht auf.
- Die Differenz zwischen ε_N und ε_T muß groß sein. Wird der Stoß sowohl in Normal- als auch in Tangentialrichtung plastisch, verschwinden die Unterschiede beider Modelle.

Treten in einem System bei Stößen tangentialreversible Effekte auf, was bei den Experimenten (dargestellt in Abschnitt 6.2.4) sogar bei Stahl-Stahl Kontakt der Fall war, muß immer die tangentialreversible Formulierung gewählt werden. Weiß man nicht, ob solche Effekte auftreten, ist es zunächst sinnvoller, die tangentialreversible Formulierung zu verwenden und den tangentialen Stoßkoeffizienten $\varepsilon_T = 0$ zu setzen und damit einen tangentialplastischen Stoß zu berechnen. Nur in Ausnahmefällen, in denen die obengenannten Bedingungen in besonderen Kombinationen auftreten (ob es derartige Materialpaarungen überhaupt gibt sei dahingestellt), sollte man mit einem reinen Reibstoß rechnen.

4.4 Anmerkung zum Energieerhalt

In den Arbeiten [22] und [61] wird ein Beweis vorgestellt, in dem gezeigt wird, daß ein Stoß, der nach den auch hier in dieser Arbeit vorgestellten Gesetzen abläuft, immer dissipativ oder maximal konservativ ist. Dies ist eine unbedingte Voraussetzung für die Sinnhaftigkeit des Stoßgesetzes. In [17] wird erstmals ein wesentlicher Fehler im Beweis aufgedeckt. Hier soll an einem einfachen System gezeigt werden, daß der Fehler im Beweis nicht zwangsläufig bedeutet, daß ein Stoß tatsächlich mit Energieerhöhung verbunden ist.

Als Beispielsystem werden zwei senkrecht übereinander stoßende Bälle gewählt, die in [61] im Abschnitt 8.12, wenn auch nicht unter Energieaspekten, bereits diskutiert werden. Das System hat zwei Freiheitsgrade $\mathbf{q} = (y_1, y_2)^T$, die die vertikale Bewegung der beiden Bälle mit der identischen Masse m beschreiben. Zwischen den zwei Körpern sei die Stoßbindung 2, zwischen Masse 1 und Boden die Bindung 1 (siehe

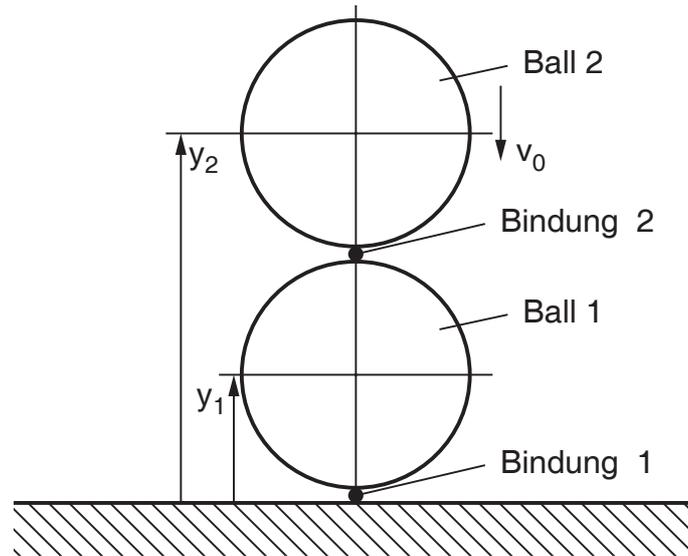


Bild 4.18: Normaler Mehrfachstoß von zwei Bällen

Bild 4.18). Massenmatrix \mathbf{M} , Bindungsmatrix \mathbf{W}_N und die projizierte Massenwirkungsmatrix \mathbf{G} haben damit folgende Gestalt:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}; \quad \mathbf{W}_N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{G} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

Betrachtet wird nun der Fall, bei dem der obere Ball mit der Geschwindigkeit $\dot{q}_2 = -v_0$ auf den am Boden liegenden unteren auftrifft. Die kinetische Energie vor dem Stoß beträgt $T_A = \frac{1}{2}mv_0^2$.

Die Kompressionsphase ist ohne Fallunterscheidungen zu berechnen. Es gilt:

$$\dot{\mathbf{g}}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_C = \begin{pmatrix} mv_0 \\ mv_0 \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

In der Expansionsphase sind in Abhängigkeit von den Stoßzahlen ε_1 und ε_2 in den beiden Kontakten drei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ und $2\varepsilon_2 > \varepsilon_1$:
Beide Bälle separieren voneinander und vom Boden
Expansionsimpuls:

$$\mathbf{A}_E = mv_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

Relativgeschwindigkeiten nach dem Stoß (zugleich Bedingung für die Grenzen):

$$\dot{\mathbf{g}}_E = v_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ 2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

Generalisierte Geschwindigkeiten nach dem Stoß:

$$\dot{\mathbf{q}}_E = v_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

Kinetische Energie nach dem Stoß:

$$T_E = mv_0^2 \left(\frac{1}{2} \varepsilon_1^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 \right) \quad (4.50)$$

Die normierte Energiedifferenz

$$\frac{T_A - T_E}{T_A} = 1 - \varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 - 2\varepsilon_2^2 = (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(2\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \quad (4.51)$$

kann nicht kleiner null werden, da der erste Klammerausdruck immer positiv ist und beide Klammern des zweiten Summanden genau die Grenzbedingungen darstellen und auch immer größer oder gleich null sind.

2. Fall $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$: Der untere Ball bleibt am Boden liegen
Expansionsimpuls:

$$\mathbf{A}_E = mv_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

Relativgeschwindigkeiten nach dem Stoß:

$$\dot{\mathbf{g}}_E = v_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

Generalisierte Geschwindigkeiten nach dem Stoß:

$$\dot{\mathbf{q}}_E = v_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

Kinetische Energie nach dem Stoß:

$$T_E = \frac{1}{2} mv_0^2 \varepsilon_2^2 \quad (4.55)$$

Die normierte Energiedifferenz

$$\frac{T_A - T_E}{T_A} = 1 - \varepsilon_2^2 \quad (4.56)$$

ist offensichtlich immer größer als null.

3. Fall $2\varepsilon_2 < \varepsilon_1$: Beide Bälle heben gemeinsam ab:
Expansionsimpuls:

$$\mathbf{A}_E = \frac{1}{2}mv_0 \begin{pmatrix} 2\varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

Relativgeschwindigkeiten nach dem Stoß:

$$\dot{\mathbf{g}}_E = \frac{1}{2}v_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

Generalisierte Geschwindigkeiten nach dem Stoß:

$$\dot{\mathbf{q}}_E = \frac{1}{2}v_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

Kinetische Energie nach dem Stoß:

$$T_E = \frac{1}{4}mv_0^2\varepsilon_2^1 \quad (4.60)$$

Die normierte Energiedifferenz

$$\frac{T_A - T_E}{T_A} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon_1^2 \quad (4.61)$$

ist auch hier offensichtlich immer größer als null.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß bei keiner denkbaren Stoßzahlkombination eine Energieerhöhung erreicht wird. In Bild 4.19 ist die normierte Energiedifferenz über ε_1 und ε_2 für alle möglichen Kombinationen der Stoßkoeffizienten aufgetragen.

Der „kritische“ Punkt im oben angesprochenen Beweis ist die Matrix $\mathbf{G} - \varepsilon\mathbf{G}\varepsilon$, für die gezeigt werden muß, daß sie positiv definit ist. Für das vorliegende Beispiel lautet diese Matrix:

$$\mathbf{G} - \varepsilon\mathbf{G}\varepsilon = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon_1^2 & \varepsilon_1\varepsilon_2 - 1 \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 - 1 & 2 - 2\varepsilon_2^2 \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

Die Hauptdiagonalelemente dieser Matrix sind immer positiv, die Determinante lautet $(1 - 2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) + \varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2)/m$ und kann zum Beispiel für $\varepsilon_1 = 1$ und $\varepsilon_2 = 0$ negativ werden. Damit ist die geforderte Eigenschaft „Matrix positiv definit“ nicht mehr erfüllt. Die Determinante ist in Bild 4.20 über ε_1 und ε_2 aufgetragen und zeigt in zwei Ecken ausgeprägte Bereiche mit negativen Werten.

Zusammenfassend läßt sich sagen: Ein Stoß, für den der Dissipationsbeweis aufgrund seiner Lücke nicht gilt, verletzt deshalb nicht zwangsläufig die Bedingung, daß ein Stoß dissipativ sein muß. Zwischen dem Ende des Beweises und tatsächlicher Energiezunahme gibt es offensichtlich noch einen Bereich, in dem sich Stöße ereignen können, die zwar dissipativ sind, dies mit dem Beweis allerdings nicht zu zeigen ist.

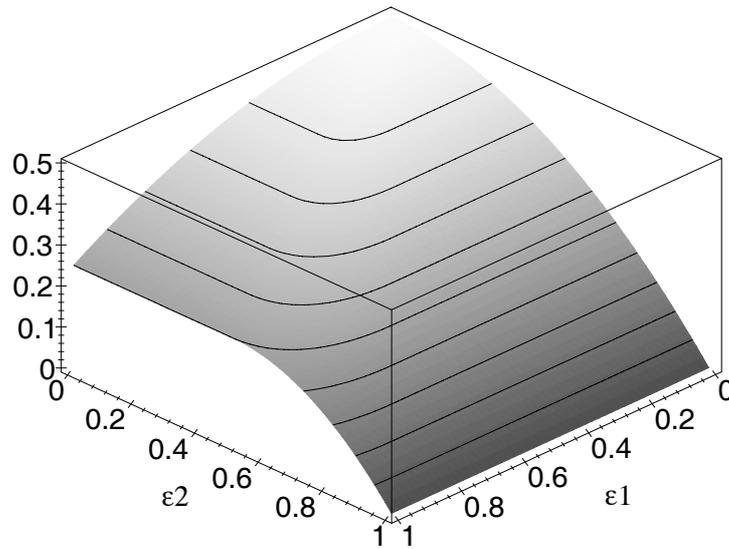


Bild 4.19: Energiebilanz des Stoßes. Aufgetragen ist das Verhältnis der dissipierten Gesamtenergie über den Stoßkoeffizienten ε_1 und ε_2

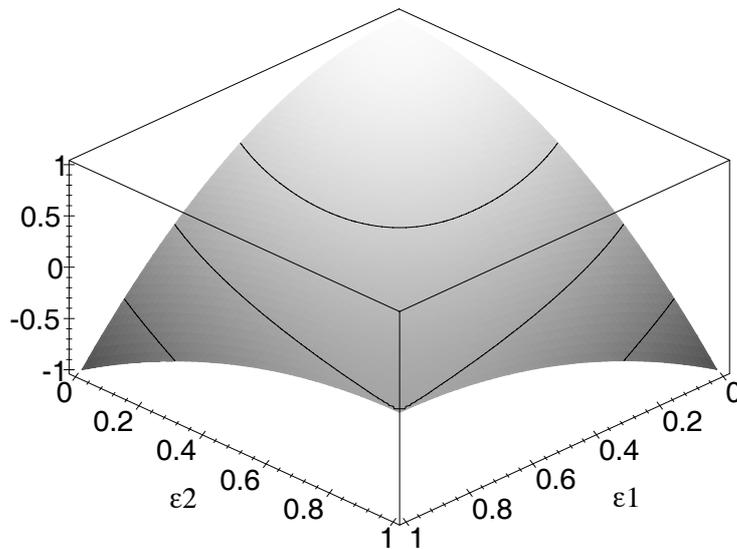


Bild 4.20: Determinante der Matrix \mathbf{G} , aufgetragen über den Stoßkoeffizienten ε_1 und ε_2

4.5 Der Einfluß großer Kräfte

In diesem Abschnitt soll ein Sonderfall vorgestellt werden, der eine Grenze des Impulsstoßgesetzes aufzeigt und unterstreicht, daß bei der Auswahl des Stoßmodells die in Kapitel 2 jeweils dargestellten Grenzen immer zu beachten sind. Konkret ist die Bedingung 2 auf Seite 17 gemeint, die besagt, daß die sonstigen Kräfte im System

gegenüber den Stoßkräften vernachlässigbar sind.

Das Testbeispiel besteht aus zwei Massen, die sich auf einer horizontalen Unterlage bewegen können (Bild 4.21). Die rechte Masse m bewege sich, wie es durch die Rollen angedeutet ist, reibungsfrei und stoße mit v_0 gegen die linke Masse M die mit dem Reibkoeffizienten μ auf der Unterlage rutschen kann. Diese Masse werde durch eine hinreichend große Kraft F auf die Unterlage gedrückt. Im System sind zwei einseitige Bindungen vorhanden: Die Bindung 1 sei der Stoßkontakt zwischen beiden Körpern und die Bindung 2 der Normalkontakt zwischen Masse M und der Unterlage. Die Tangentialeffekte in Bindung 1 können vernachlässigt werden. Das System hat drei Freiheitsgrade: die Verschiebungen der Massen auf der Unterlage x_1 und x_2 , sowie das Abheben der Masse M (Koordinate y). Der dritte Freiheitsgrad wird benötigt, um die Kontaktnormalkraft in der Bindung 2 zur aktiven Kraft zu machen.

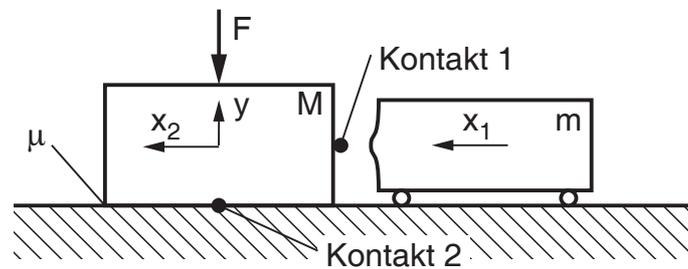


Bild 4.21: Stoßproblem mit großen nicht-Stoßkräften

4.5.1 Behandlung mit dem Impulsstoßgesetz

Zunächst soll versucht werden, den Stoß mit Hilfe des Impulsstoßgesetzes zu beschreiben. Dazu werden zunächst die kinematischen Größen benötigt. Die Bindungsmatrizen \mathbf{W}_N , \mathbf{W}_T und \mathbf{W} lauten:

$$\mathbf{W}_N^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_T^T = (0 \quad 1 \quad 0), \quad \mathbf{W}^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

Mit $\mathbf{M} = \text{diag}(m, M, M)$ ergibt sich

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} + \frac{1}{M} & 0 & \frac{1}{M} \\ 0 & \frac{1}{M} & 0 \\ \frac{1}{M} & 0 & \frac{1}{M} \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

Wendet man die Stoßklassifikation aus Abschnitt 3.8 auf diese Matrix an, ist das Stoßproblem mehrfach, unabhängig, mischgekoppelt und exzentrisch.

Die Anfangsgeschwindigkeit sei $\dot{\mathbf{q}}_A = (v_0, 0, 0)^T$, die Relativgeschwindigkeiten betragen dann $\dot{\mathbf{g}}_{NA} = (-v_0, 0)^T$ und $\dot{\mathbf{g}}_{TA} = 0$. Die Impulsbilanz für die Kompressionsphase lautet:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{g}}_{NC,1} \\ \dot{\mathbf{g}}_{NC,2} \\ \dot{\mathbf{g}}_{TC,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} + \frac{1}{M} & 0 & \frac{1}{M} \\ 0 & \frac{1}{M} & 0 \\ \frac{1}{M} & 0 & \frac{1}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{NC,1} \\ \Lambda_{NC,2} \\ \Lambda_{TC,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.65)$$

Unter Berücksichtigung der normalen und tangentialen Stoßgesetze ergibt sich folgende Lösung für die Relativgeschwindigkeiten und Kompressionsimpulse:

$$\dot{\mathbf{g}}_C = \left(0, 0, \frac{m}{M+m}v_0 \right)^T, \quad (4.66)$$

$$\mathbf{A}_C = \left(\frac{mM}{M+m}v_0, 0, 0 \right)^T. \quad (4.67)$$

Zu beachten ist hierbei, daß in der Bindung 2 *kein* Normalimpuls wirkt, und die Reibung durch die Normalkraft F somit ohne Einfluß ist. Der Bewegungszustand am Ende der Kompressionsphase besteht darin, daß die beiden Massen sich mit einer gemeinsamen Geschwindigkeit im Kontakt bewegen.

Für die Expansionsphase gilt die gleiche Impulsgleichung wie für die Kompressionsphase. Auch hier soll die Lösung sofort angegeben werden:

$$\dot{\mathbf{g}}_E = \left(\varepsilon_{N,1}v_0, 0, (1 + \varepsilon_{N,1})\frac{m}{M+m}v_0 \right)^T, \quad (4.68)$$

$$\mathbf{A}_E = \left(\varepsilon_{N,1}\frac{mM}{M+m}v_0, 0, 0 \right)^T \quad (4.69)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_E = \frac{v_0}{m+M} \begin{pmatrix} m - \varepsilon_{N,1}M \\ (1 + \varepsilon_{N,1})m \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.70)$$

Das Ergebnis kann wie folgt interpretiert werden: Die beiden Körper bewegen sich so voneinander weg, wie wenn ein zentraler Stoß ohne Reibung stattgefunden hätte. Die Normalkraft F taucht in keinem Term des Ergebnisses auf! Wenn diese Kraft aber so groß wäre, daß der Körper M infolge der Reibungskräfte auch während des Stoßes nicht wegrutschen kann, würde ein völlig anderes Ergebnis entstehen.

Dieses Problem kann ohne eine Abschätzung der Kräfte, die im Stoßkontakt auftreten, nicht präzisiert werden. Dazu eignet sich zum Beispiel Gleichung (2.17). Dabei sind drei Fälle denkbar:

1. Ist die maximale Kontaktkraft deutlich größer, als die maximal mögliche Reibkraft μF , läuft der Stoß zunächst wie durch das Impulsstoßgesetz beschrieben ab und die Geschwindigkeit \dot{x}_2 verschwindet bei der weiteren Systemberechnung infolge der großen Reibkraft. Der stoßende Körper bewegt sich so, wie oben berechnet.

2. Ist die maximal auftretende Stoßkraft geringer als die Haftkraft des gestoßenen Körpers, bleibt dieser liegen und der Stoß läuft ab, wie wenn der stoßende Körper gegen die starre Umgebung stoßen würde.
3. Die Stoßkraft ist ungefähr so groß wie die Reibkraft, kommt es zu mehreren Haft-Gleit-Übergängen.

Dieser unter Umständen eklatante Unterschied soll mit folgendem Parametersatz verdeutlicht werden: Beide Körper sollen die Masse m haben und für die Stoßzahl gelte $\varepsilon_{N,1} = 1$. Bei der Berechnung mit dem Impulsstoßmodell gilt, daß unmittelbar nach dem Stoß der stoßende Körper ruht und sich der gestoßene mit v_0 bewegt. Infolge der Reibung kommt er nach einem Weg $x = mv_0^2/2\mu F$ ebenfalls zur Ruhe. Die kinetische Energie ist vollständig dissipiert. Makroskopisch betrachtet ist ein Vorgang abgelaufen, der einem plastischen Stoß sehr ähnlich ist.

Reicht die Haftkraft dazu aus, den gestoßenen Körper am Losrutschen während des Stoßes zu hindern, läuft der Stoß ab, wie wenn der stoßende Körper mit einer inertialen Wand kollidieren würde. Er wird sich nach dem Stoß mit der Geschwindigkeit $-v_0$ wieder weg bewegen. Es findet ein komplett elastischer Stoß statt.

Da die Kontaktkraft während des Stoßes zwischen null und der Maximalkraft variiert, wird die Haftkraft möglicherweise nur während Teilphasen des Stoßes ausreichen um Losrutschen zu verhindern. Dadurch wird es zu einer Mischform der beiden oben beschriebenen Extreme kommen, die durch Haft-Gleit-Übergänge gekennzeichnet ist. Derartige Vorgänge können mit dem hybriden Stoßmodell erfaßt werden.

4.5.2 Behandlung mit dem hybriden Stoßgesetz

Es wird das im vorigen Abschnitt vorgestellte System mit dem in Abschnitt 2.6 vorgestellten hybriden Stoßmodell behandelt. Dabei soll die prinzipielle Eignung dieses Verfahrens dargestellt werden, ohne auf eine spezielle Lösung einzugehen. Das System ist in Bild 4.22 dargestellt. An den Kontakten ist jeweils eine Zusatzmasse m_z angebracht, die auf einer Seite mit je einer normal und tangential wirkenden Feder mit einem Körper verbunden ist und an ihrer anderen Seite einen Reibkontakt mit dem anderen Körper beziehungsweise der Umgebung hat. Beide Körper sollen die Masse m haben.

Das System hat zunächst die gleichen Freiheitsgrade und Anfangsbedingungen, wie in Abschnitt 4.5.1: $\mathbf{q} = (x_1, x_2, y)^T$, $\mathbf{q}_A = (0, 0, 0)^T$ und $\dot{\mathbf{q}}_A = (v_0, 0, 0)^T$. Beide Bindungen haben eine Normal- und eine Tangentialkomponente. Die Bindungsmatrizen lauten:

$$\mathbf{W}_N^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_T^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.71)$$

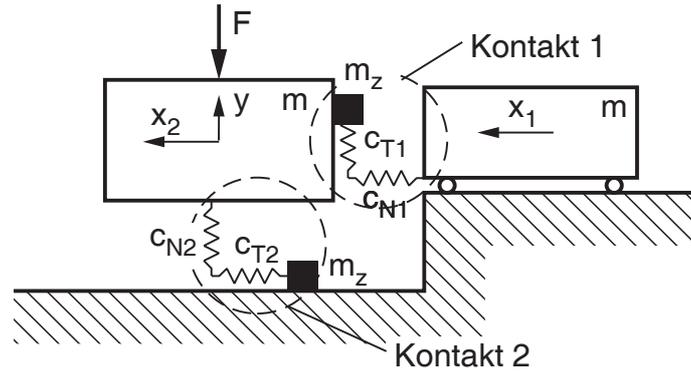


Bild 4.22: Stoßproblem, behandelt mit dem Hybridmodell

Die Massenmatrix ist $m\mathbf{E}$. Damit lassen sich die Massenwirkungsmatrix \mathbf{G} und der Relativbewegungszustand $\dot{\mathbf{g}}_A$ zu Stoßbeginn angeben:

$$\mathbf{G} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{g}}_A = \begin{pmatrix} -v_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.72)$$

Gemäß Gleichung (2.26) wird der Vektor der äußeren Kräfte zum Zeitpunkt des Stoßeintritts benötigt, der $\mathbf{h}_0 = (0, 0, -F)^T$ lautet. Der Vektor

$$\mathbf{y} = (g_{N1}, g_{N2}, g_{T1}, g_{T2}, x_{N1}, x_{N2}, x_{T1}, x_{T2})^T \quad (4.73)$$

ist der Zustandsvektor der hybriden Bewegungsgleichung, der die Relativverschiebungen in den Kontakten und die Bewegungen der Zusatzmassen enthält. Bei diesem Beispiel mag es seltsam erscheinen ein System mit drei Freiheitsgraden für die Stoßberechnung auf acht Freiheitsgrade zu erweitern. Das ist aber nur in diesem Spezialfall so: Hätte das System beliebig viele Freiheitsgrade aber nur zwei Stoßkontakte wie in Bild 4.22, wäre die Stoßmodellierung immer noch genau die gleiche und es ergäben sich sogar deutlich weniger Freiheitsgrade als es das Gesamtsystem hat.

Mit den Bewegungsgleichungen der Zusatzmassen (2.22) und (2.23) kann man die Gesamtbewegungsgleichung des Hybridmodells gemäß Gleichung (2.28) anschreiben:

$$\ddot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} \\ -\frac{1}{m_z}\mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{N1} \\ F_{N2} \\ F_{T1} \\ F_{T2} \end{pmatrix} + \left(0, -\frac{F}{m}, -\frac{F}{m}, 0, \frac{\lambda_{N1}}{m_z}, \frac{\lambda_{N2}}{m_z}, \frac{\lambda_{T1}}{m_z}, \frac{\lambda_{T2}}{m_z} \right)^T \quad (4.74)$$

Die Kraftgesetze sollen in diesem Fall rein linear-elastisch sein. Die Hinzunahme von nichtlinearen Anteilen oder Dämpfungstermen läßt die folgenden Gleichungen komplizierter werden, ohne an der prinzipiellen Aussage etwas zu ändern:

$$F_{N1} = c_{N1}(x_{N1} - g_{N1}) + F_{N01} \quad (4.75)$$

$$F_{N2} = c_{N2}(x_{N2} - g_{N2}) + F_{N02} \quad (4.76)$$

$$F_{T1} = c_{T1}(x_{T1} - g_{T1}) \quad (4.77)$$

$$F_{T2} = c_{T2}(x_{T2} - g_{T2}) \quad (4.78)$$

Man kann die Kraftgesetze in die Gleichung (4.74) einsetzen und erhält eine Gleichung vom Typ $\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$, wobei \mathbf{A} eine 8×8 -Matrix ist. Auf die Darstellung wird hier aus Platzgründen verzichtet.

Nun müssen die Anfangsbedingungen gemäß Tabelle 2.2 gefunden werden. Die Bindung 1 zwischen den Körpern ist vom Typ „neue Bindung“, somit gilt: $x_{N10} = 0$, $\dot{x}_{N10} = -v_0$, $x_{T10} = 0$, $\dot{x}_{T10} = 0$ und $F_{N10} = 0$. Die Bindung 2 zwischen dem Körper und der Unterlage ist eine „alte Bindung“, die zuvor haftete. Da die Bindung vor Stoßbeginn auch in Normalrichtung geschlossen war, gilt $\lambda_N = F$. Die Anfangsbedingungen lauten: $x_{N20} = 0$, $\dot{x}_{N20} = 0$, $x_{T20} = 0$, $\dot{x}_{T20} = 0$ und $F_{N20} = F$. Unter Berücksichtigung dieser Anfangsbedingungen stellt man fest, daß die Komponenten g_{N2} , g_{T1} , x_{N2} und g_{T1} von \mathbf{y} während des gesamten Stoßes gleich null sind und die anderen Größen nicht beeinflussen. Sie können folglich aus dem Gleichungssystem (4.74) gestrichen werden. Es verbleibt ein System mit vier Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} \ddot{g}_{N1} \\ \ddot{g}_{T2} \\ \ddot{x}_{N1} \\ \ddot{x}_{T2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\frac{c_{N1}}{m} & -\frac{c_{T2}}{m} & 2\frac{c_{N1}}{m} & -\frac{c_{T2}}{m} \\ -\frac{c_{N1}}{m} & -2\frac{c_{T2}}{m} & -\frac{c_{N1}}{m} & \frac{c_{T2}}{m} \\ \frac{c_{N1}}{m_z} & 0 & -\frac{c_{N1}}{m_z} & 0 \\ 0 & \frac{c_{T2}}{m_z} & 0 & -\frac{c_{T2}}{m_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{N1} \\ g_{T2} \\ x_{N1} \\ x_{T2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\lambda_{N1}}{m_z} \\ \frac{\lambda_{T2}}{m_z} \end{pmatrix} \quad (4.79)$$

Dieses System kann nun analytisch gelöst oder integriert werden, wobei die Haft-Gleit-Übergänge an der Bindung der Zusatzmasse 2 zum Untergrund mittels eines Standardalgorithmus für Systeme mit einseitigen Bindungen gelöst werden können. Die Größe λ_{T2} ist dann, je nach Bindungszustand, entweder Zwangskraft oder aktive Reibkraft. Die Normalkraft beträgt konstant $\lambda_{N2} = F$. Der Stoß endet nach der Zeit T , wenn $\lambda_{N1} = 0$ gilt.

Während der Simulation oder bei der analytischen Berechnung müssen die Kräfte in den Kräftelementen zwischen den Körpern und den Zusatzmassen aufsummiert werden und es müssen daraus die Stoßimpulse gewonnen werden:

$$\Lambda_{N1} = \int_0^T F_{N1} dt, \quad \Lambda_{N2} = \int_0^T F_{N2} dt = F \cdot T \quad (4.80)$$

$$\Lambda_{T1} = \int_0^T F_{T1} dt = 0, \quad \Lambda_{T2} = \int_0^T F_{T2} dt \quad (4.81)$$

Will man nun Gleichung (2.29) auswerten, benötigt man noch das Integral über \mathbf{h}_0 , das sich, da \mathbf{h}_0 während des Stoßes konstant sein soll, mit $T \cdot \mathbf{h}_0$ angeben läßt. Setzt

man nun alle Größen in die Gleichung (2.29) ein, erhält man

$$\dot{\mathbf{q}}_E = \begin{pmatrix} v_0 + \frac{\Delta_{N1}}{m} \\ \frac{-\Delta_{N1} + \Delta_{T2}}{m} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.82)$$

Diese Lösung enthält nun alle Teillösungen, die am Ende von Abschnitt 4.5.1 diskutiert wurden und kann beliebige Haft-Gleit-Übergänge während des Stoßes abbilden.

Kapitel 5

Konstruktion der Wurfmaschine

Dieses Kapitel befaßt sich mit der Beschreibung des Versuchsgertes, mit dem die Stoßexperimente durchgeführt wurden. Zunächst wird die Art der durchzuführenden Versuche definiert und ein Maschinenkonzept entwickelt, das in der Lage ist, diese auszuführen. Im zweiten Abschnitt wird auf die technische Realisierung der Maschine eingegangen. Eine große Bedeutung für die Durchführung hat die Steuerung und Regelung der Maschine, die genauso wie die Meß- und Auswertetechnik in jeweils eigenen Abschnitten beschrieben wird.

5.1 Anforderungsprofil

Ziel ist es, das theoretisch entwickelte Stoßgesetz anhand von Versuchen zu verifizieren. Dazu soll ein Stoß durchgeführt werden und mittels geeigneter Meßtechnik der Bewegungszustand der Stoßpartner unmittelbar vor und nach dem Stoß bestimmt werden.

5.1.1 Grundsätzliche Vorüberlegungen

Wie im Kapitel 3 dargestellt, bestimmen sich die im Stoßkontakt während des Stoßes wirkenden Impulse letztlich aus den Relativgeschwindigkeiten der beteiligten Körper vor dem Stoß. Für eine aussagekräftige Messung sind deshalb folgende Größen zu ermitteln:

- die Relativgeschwindigkeiten der beteiligten Körper vor dem Stoß
- die Relativgeschwindigkeiten der beteiligten Körper nach dem Stoß
- die während des Stoßes wirkenden Impulse

Die Impulse sind physikalische Größen, die nur indirekt gewonnen werden können, insbesondere da sie nur die Idealisierung eines während einer endlichen Zeit wirkenden Kraftverlaufes darstellen. Sind die Trägheitseigenschaften der Stoßpartner

bekannt, können die Impulse aus der absoluten Bewegungsänderung der Körper während des Stoßes rekonstruiert werden.

Aus diesen Gründen erscheint es sinnvoll, als einen der beiden Körper die inertialfeste Umgebung zu verwenden. Unter dieser Bedingung kann man die Messungen von Relativ- und Absolutbewegungen beider Körper auf die Absolutbewegungsmessung des bewegten Körpers reduzieren.

Somit lassen sich die wesentlichen Anforderungen an das Versuchsgerät wie folgt formulieren:

1. Das Gerät muß in der Lage sein, einen Versuchskörper in einen geeigneten Bewegungszustand zu versetzen, der zu einem kontrollierten Stoß mit der Umgebung führt.
2. Der Bewegungszustand dieses Körpers unmittelbar vor und nach dem Stoß soll meßbar sein.

Die konstruktive Lösung ist eine „Wurfmaschine“, die einen Probekörper mit definierten Anfangsbedingungen auf eine definierte Stelle der Umgebung wirft. Der dort stattfindende Stoß wird mit geeigneter Meßtechnik, die im Abschnitt 5.4 beschrieben ist, ausgewertet.

5.1.2 Wurfkörper

Ein besonderes Augenmerk dieser Arbeit liegt auf tangentialreversiblen Reibstößen. Diese sollen auch experimentell nachvollzogen werden können. Besonders deutlich treten derartige Stöße auf, wenn einer der Stoßpartner aus einem gummiartig-elastischen Material besteht, in dem auch ein erhebliches Maß an Energie in der durch die Kontaktreibung induzierten Schubverformung gespeichert werden kann. Da Gummibälle einen typischen Körper dieser Art darstellen, wurde die gesamte Wurfmaschine so konzipiert, daß sie Körper von einem Durchmesser von ca. 5 cm werfen kann.

Grundsätzlich sind alle in dieser Arbeit behandelten Stoßvorgänge eben. Aus diesem Grund ist es zweckmäßig, einen scheibenförmigen Wurfkörper zu verwenden. Dies bietet folgende Vorteile:

- Ein ebener Körper mit zwei parallelen Flächen ist in der Wurfmaschine leicht und definiert aufzunehmen.
- Auf einer ebenen, zur Wurfebene parallelen Fläche lassen sich gut geeignete Markierungen anbringen, um den Bewegungszustand des Körpers zu detektieren.
- Ein scheibenförmiger Wurfkörper läßt eine Taumel- oder Kippbewegung, was immer zu einem Fehlversuch führt, wesentlich leichter erkennen als eine Kugel.

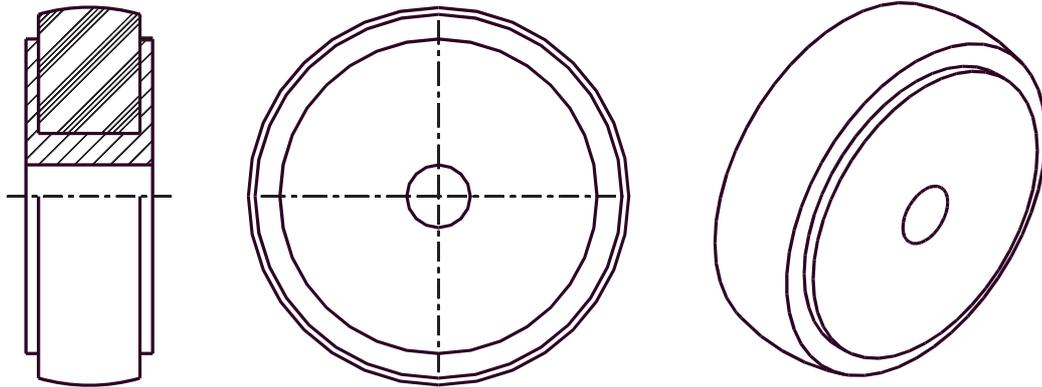


Bild 5.1: Der rotationssystemmetrische Wurfkörper

Aufgrund dieser Überlegungen wurde die Geometrie des Wurfkörpers wie auf Bild 5.1 dargestellt, festgelegt.

Es handelt sich um einen scheibenförmigen Körper, der zwei planparallele Seitenflächen besitzt. Diese Flächen haben jeweils einen Absatz, von denen einer in der Wurfmaschine formschlüssig geführt wird. Der Absatz auf der anderen Seite ist nur aus Symmetriegründen gefertigt. Zwischen diesen Seitenflächen kann der Wurfkörper eine weitgehend frei wählbare Form haben, sofern ein von der Maschine vorgegebener Maximaldurchmesser nicht überschritten wird. Bei „harten“ Materialien (PVC, Teflon) kann der gesamte Körper einschließlich der Führungsflächen aus einem Stück gefertigt werden. Bei weichen Materialien ist es erforderlich, einen spulenträgerförmigen Grundkörper zu fertigen, auf dem dann der Probekörper aufgeklebt wird. Allen Bauformen ist gemeinsam, daß die stoßende Außenfläche ballig ausgeführt ist, um ein Verkanten beim Stoß zu verhindern.

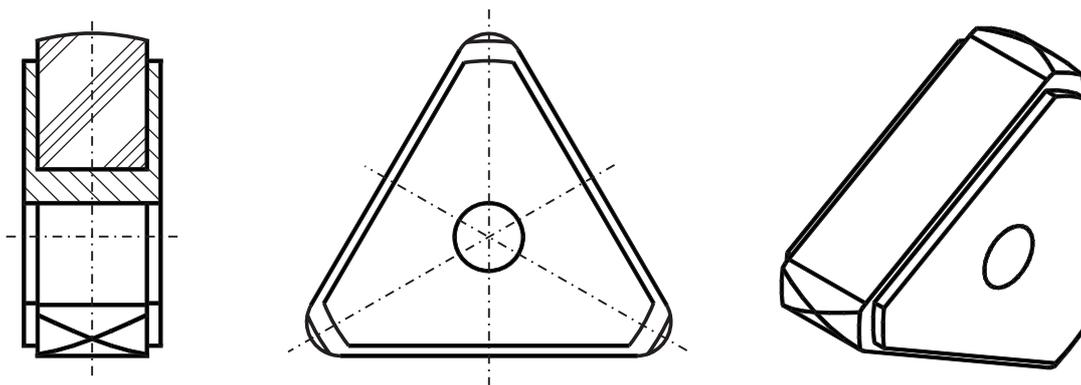


Bild 5.2: Aussehen des Wurfkörpers für exzentrische Stoßversuche

Für die Stoßversuche, bei denen ein exzentrischer Stoß durchgeführt werden soll, wurde ein Wurfkörper mit Dreiecksform entworfen (siehe Bild 5.2). Er besteht ebenfalls aus zwei planparallelen Scheiben und einem dazwischen angebrachten Stoßkör-

per. Die Scheiben sind so ausgeführt, daß sie an 3 um jeweils 120° versetzten Punkten Formschluß in der Haltevorrichtung der Wurfmaschine erreichen. Dieser Wurfkörper ist ohne Änderungen an der Wurfmaschine vornehmen zu müssen, einsetzbar.

Insgesamt wurden fünf verschiedene Wurfkörper verwendet. In Bild 5.3 sind in der oberen Reihe von links nach rechts die Körper aus Teflon und PVC zu sehen, die aus einem Stück gefertigt sind. Rechts liegt der rotationssymmetrische Gummiwurfkörper, bei dem ein Gummiring auf einem Spulenförmigen Aluminiumträger aufgeklebt ist. Dieser Körper entspricht in seiner Bauform exakt Bild 5.1. In der zweiten Reihe ist links der Stahlwurfkörper zu sehen, der aus einem Stahlring besteht, der auf einen PVC-Kern aufgeklebt ist. Rechts unten ist der exzentrische Gummiwurfkörper zu sehen, der aus einem Gummiteil und einem Aluminiumträger besteht und in seinem Aufbau genau Bild 5.2 entspricht.

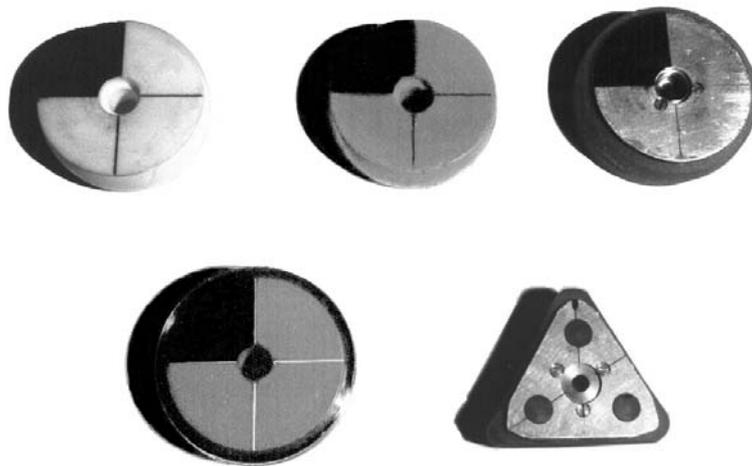


Bild 5.3: Foto aller verwendeten Wurfkörper

5.1.3 Wirkprinzip, Größe und Leistung der Maschine

In diesem Abschnitt soll mit Hilfe der bisher beschriebenen Überlegungen das Anforderungsprofil für die Wurfmaschine zusammengestellt und das Wirkprinzip erläutert werden.

Die Flugbahn des Wurfkörpers soll durch Fotografieren ausgewertet werden. Pro Flugbahnabschnitt sollen mehrere Aufnahmen gemacht werden können. Um dabei die einzelnen Phasen der Bewegung eindeutig trennen zu können, ist bei einem Wurfkörper mit ca. 5 cm Durchmesser eine Flugbahnlänge von ca. 50 cm notwendig. Auf einer Strecke dieser Länge erreicht ein frei fallender Körper aufgrund der Schwerkraft eine Geschwindigkeit von mehr als 3 m/s. Dies ist somit die Mindestgeschwindigkeit für die Stoßversuche und gibt zugleich auch einen guten Anhaltswert für den Geschwindigkeitsbereich, in dem Versuche überhaupt durchgeführt werden können. Um

eine große Variationsbreite für die Experimente zu haben, wurde deshalb der Bereich von 3 m/s – 10 m/s als Auftreffgeschwindigkeit mit beliebiger Richtung festgelegt.

Da insbesondere Reibstöße untersucht werden sollen, ist die tangentielle Relativgeschwindigkeit im Moment des Stoßes von entscheidender Bedeutung und soll beliebig eingestellt werden können. Dies läßt sich durch einen definierten Drall, den der Wurfkörper vor dem Stoß erhält, erreichen. Um zu gewährleisten, daß im Stoßmoment sogar eine der Flugrichtung entgegengesetzte Relativgeschwindigkeit im Stoßort erreicht werden kann, ist es erforderlich, den Wurfkörper auf eine möglichst große Umfangsgeschwindigkeit beschleunigen zu können. Bei einem Wurfkörperdurchmesser von ca. 5 cm wird eine Umfangsgeschwindigkeit von 5 m/s bei ca. 30 U/s erreicht. Dies entspricht zwar nicht der Forderung, die maximale Fluggeschwindigkeit ausgleichen zu können, eine Geschwindigkeit von mehr als ca. 40 U/s erwies sich jedoch als technisch nicht realisierbar. In der Tabelle 5.1 sind die wichtigen Anforderungen an die Wurfmaschine zusammengefaßt.

Tabelle 5.1: Anforderungen an die Wurfmaschine

Anforderung	Zahlenwert
Beschleunigen eines rotationssymmetrischen Körpers	
Translationsgeschwindigkeit	max. 10 m/s
Rotationsgeschwindigkeit	max. 40 U/s
Wurfgeschwindigkeit stufenlos einstellbar	
Wurfriechtung beliebig einstellbar	0° – 90°
Translations- und Rotationsgeschwindigkeit entkoppelbar	
Abmessungen des Wurfkörpers	∅ 50 × 20 mm
Gewicht des Wurfkörpers	max. 300 g
Störungsfreies Halten und Loslassen des Wurfkörpers	
Statischer und dynamischer Massenausgleich	
Elektrischer Antrieb	
Bedienung ohne Werkzeug	
Versuchsablauf fernsteuerbar	

Mit diesen Anforderungen wurde in [25] eine Konzeptstudie durchgeführt und die Maschine entworfen. Grundsätzliches arbeitet die Maschine mit dem Wirkprinzip einer Schleuder, wie es in Bild 5.4 dargestellt ist: Ein Arm hält an einem Ende in einer geeigneten Haltevorrichtung den Wurfkörper fest. Dieser Arm wird durch einen Motor auf eine Drehzahl beschleunigt, bei der die Umfangsgeschwindigkeit der gewünschten Abfluggeschwindigkeit entspricht. Bei einem geeigneten Abwurfwinkel wird der Wurfkörper ausgeklinkt und fliegt tangential weiter. Die Haltevorrichtung muß zugleich so beschaffen sein, daß der Wurfkörper mit Hilfe eines zweiten unabhängigen Antriebs auf die gewünschte Drallgeschwindigkeit gebracht werden kann.

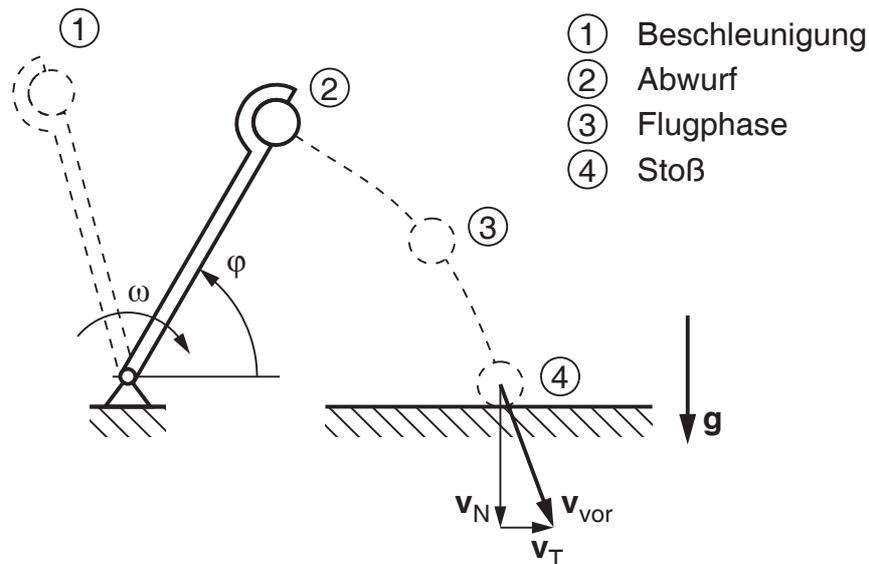


Bild 5.4: Funktionsprinzip der Wurfmaschine

Dieses Prinzip hat zahlreiche Vorteile:

- Es werden nur rotatorische Bewegungen benötigt.
- Die Beschleunigung des Körpers kann während einer längeren Phase erfolgen, die Folge ist ein geringerer Leistungsbedarf.
- Ein Massenausgleich ist möglich.
- Die gewünschte Auftreffgeschwindigkeit kann ohne Verstellung mechanischer Elemente rein durch die Steuerung erreicht werden.
- Es sind mit geringem Aufwand hohe Geschwindigkeiten erreichbar.

Ein wesentlicher Nachteil ist die Tatsache, daß die Sensorik und Aktorik des Antriebs für die Drallbewegung des Wurfkörpers und des Auslösemechanismus sich auf einem frei drehbaren Teil befinden und eine Signal- und Energieübertragung mittels eines Schleifringes erfolgen muß. Diese mitgeführte Systemeinheit hat darüberhinaus den Nachteil eines hohen Gewichtes, das zusammen mit dem entsprechenden Gegengewicht zu einem erheblichen Trägheitsmoment des Wurfarmes führt. Dies verursacht erhebliche Energieströme beim Beschleunigen und Bremsen, da im Interesse der Betriebssicherheit und einer raschen Versuchsausführung der Wurfarm nach dem Abwurf aktiv gebremst werden muß.

5.1.4 Drallantrieb und Ausklinkmechanismus

Die Beschleunigung des Wurfkörperschwerpunktes auf die gewünschte Geschwindigkeit ist durch den drehenden Hebelarm gewährleistet. Die Haltevorrichtung hat zwei

wesentliche Aufgaben zu erfüllen: Erstens muß der Wurfkörper sicher festgehalten und im exakt richtigen Moment freigegeben werden, und zweitens muß er im Auslösemoment die gewünschte Winkelgeschwindigkeit und -lage haben.

Eine grundsätzliche Anforderung an den Auslösemechanismus besteht darin, daß der Wurfkörper quasi schlagartig ohne weitere Krafteinwirkung losgelassen werden kann. Jede Kraft kann dazu führen, daß die Flugbahn von der gewünschten abweicht oder eine Taumelbewegung entsteht, die den Stoß und damit den gesamten Versuch bis zur Unbrauchbarkeit verfälscht.

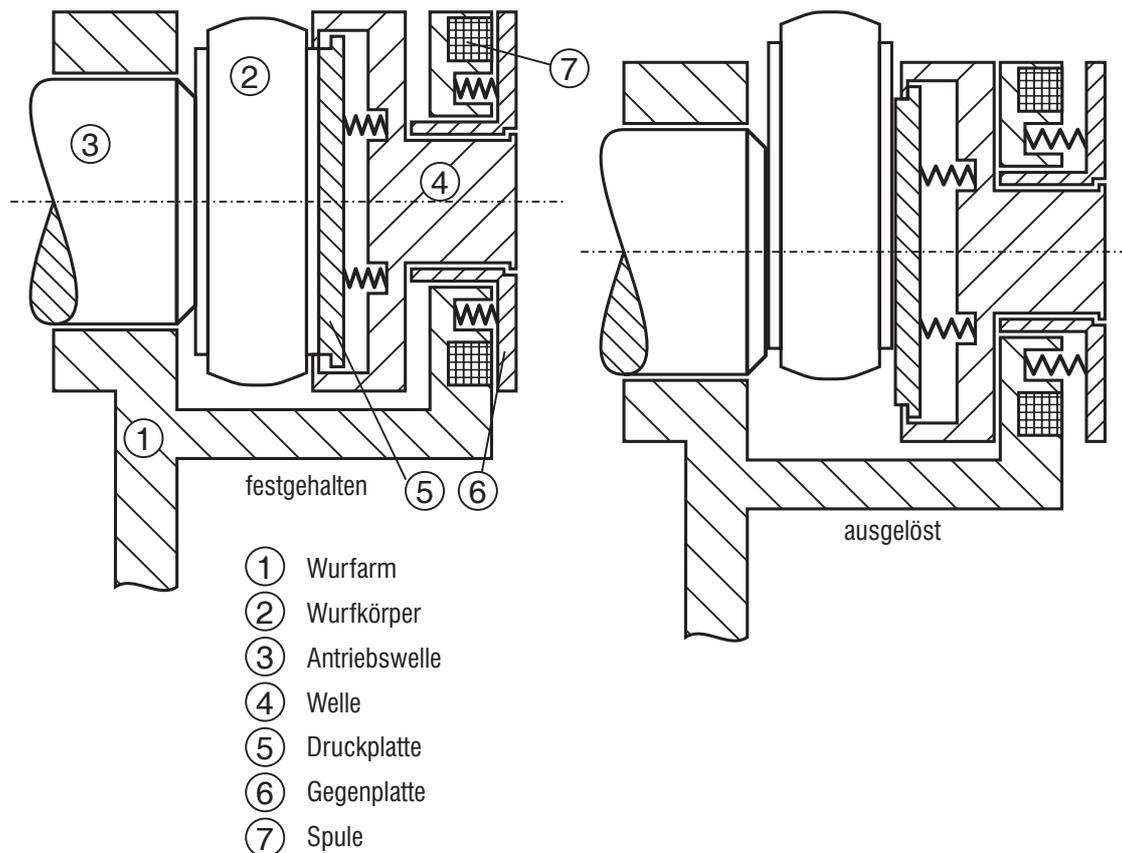


Bild 5.5: Schnitt durch die Drall- und Auslöseeinheit

Durch das rotatorische Bewegungsprinzip wirken auf den Wurfkörper erhebliche Fliehkräfte während der Beschleunigung ein. Aus diesem Grund ist ein kraftschlüssiges Festhalten ausgeschlossen. Es muß ein Formschluß herrschen, der im Moment des Auslösens sehr schnell aufgehoben werden kann. Die konstruktive Lösung ist in Bild 5.5 dargestellt. Der Körper wird zwischen zwei drehbaren Platten (Ziffern 3 und 4 in Bild 5.5) festgehalten, von denen die eine (Ziffer 4) eine kreisscheibenförmige Aussparung hat, in die eine der im Abschnitt 5.1.2 beschriebenen Seitenflächen formschlüssig hineinpaßt. Im Moment des Auslösens wird diese Platte schnell zurückgezogen. Um das Ausschleusen des Wurfkörpers aus der Vertiefung zu verbessern und

ein Kippen infolge von Reibung an der Kante zu vermeiden, ist in der Vertiefung noch eine Druckplatte (Ziffer 5) angebracht, die den Wurfkörper mit Federkraft aus der Vertiefung herausschiebt.

Für das Zurückziehen der Platte stehen mehrere Wirkprinzipien zur Verfügung. Hydraulisch und pneumatisch sollen – auch angesichts der Tatsache, daß diese Energieformen auf ein drehendes System übertragen werden müßten – von vornherein ausgeschlossen werden. Ein rein mechanisches Auslösen ist ebenfalls nicht möglich, da es die Forderung eines frei fernsteuerbaren Versuchsablaufs nicht erfüllt. Insofern verbleibt nur ein elektrisches Auslösen. Hierbei ist sicherlich eine direkte magnetische Einwirkung den indirekten Verfahren wie zum Beispiel dem Auslösen durch Motoren vorzuziehen. Bei den magnetischen Methoden stehen prinzipiell zwei Verfahren zur Auswahl:

- Der Wurfkörper wird durch Magnetkraft festgehalten und durch Abschalten des Stromes und Zurückziehen durch vorgespannte Federn ausgelöst.
- Der Wurfkörper wird durch Federkraft festgehalten und durch Magnetkraft ausgelöst

Beide Konzepte haben ihre spezifischen Vor- und Nachteile. Der wesentliche Vorteil der erstgenannten Methode besteht darin, daß die zur Durchführung der Auslösbewegung benötigte Energie bereits im System in Form von vorgespannten Federn vorhanden ist und nicht erst durch Aufbau eines Magnetfeldes eingebracht werden muß. Dem steht der Nachteil mangelnder Sicherheit gegenüber: fällt der Magnetstrom während der Beschleunigungsphase aus, löst auch der Haltemechanismus aus, und der Wurfkörper verläßt die Wurfmaschine mit unkontrollierbarer Flugrichtung.

Das wesentliche Entscheidungskriterium ergibt sich aus der Art der Aufbringung der benötigten Magnetkraft: Die Kraft einer Spule auf eine Gegenplatte nimmt bei zunehmender Luftspaltgröße stark ab. Das bedeutet, daß ein Auslösesystem, bei dem zum Auslösen die Magnetkraft aufgebaut werden muß, ein so starkes Magnetfeld benötigt, daß es über den gesamten Luftspalt hinweg wirkt. Im anderen Fall genügt es, die Gegenplatte mit dem wesentlich geringeren Magnetfeld bei einem Luftspalt mit nahezu vernachlässigbarer Breite festzuhalten, und dieses Feld einfach abzuschalten. Insofern wurde – trotz der angedeuteten Sicherheitsprobleme – die Variante „Festhalten mit Magnet- und Auslösen mit Federkraft“ gewählt. Dazu ist in den Wurfarm (Ziffer 1 in Bild 5.5) eine Ringspule (Ziffer 7) eingebaut, die die Gegenplatte (Ziffer 6) gegen die Kraft der eingezeichneten Federn festhalten kann.

Der gewünschte Drall wird dadurch erzeugt, daß sowohl die oben beschriebene Haltescheibe als auch die gegenüberliegende Scheibe drehbar gelagert sind und letztere darüberhinaus durch einen Elektromotor angetrieben wird. Der Motor ist in Bild 5.5 nicht eingezeichnet, er treibt die Welle (Ziffer 3) an. Die Drehbewegung wird reibschlüssig auf den Wurfkörper übertragen, da ein Formschluß an dieser Stelle beim Auslösen zum Verhaken führen würde.

Die Funktion des Drall- und Auswurfmechanismus läßt sich wie folgt zusammenfassen: Der Wurfkörper wird während der Beschleunigungsphase in radialer Richtung

formschlüssig festgehalten, um ein Wegfliegen infolge der hohen Fliehkräfte zu verhindern. Das Halten geschieht magnetisch. Gleichzeitig wird er durch den drehbar ausgeführten Haltemechanismus mit Hilfe eines Motors auf die gewünschte Drallgeschwindigkeit beschleunigt. Die Momentenübertragung auf den Wurfkörper erfolgt hierbei reibschlüssig. Im Moment des Auslösens wird der Magnet ausgeschaltet und eine Halteplatte durch vorgespannte Federn zurückgezogen. Der Wurfkörper kann ungehindert zwischen zwei parallelen Platten tangential wegfliegen.

5.2 Realisation

Dieser Abschnitt beinhaltet in knapper Form die Konstruktion der Wurfmaschine sowie die Beschreibung der Sensoren und Aktoren, die Erläuterung der verwendeten Elektronik-Hardware und die Steuerungsprogrammierung.

5.2.1 Gestell und Wurfarm

Der Radius von Wurfarmdrehachse zu Wurfkörpermittelpunkt wurde zu 200 mm gewählt. Damit sind die generellen Abmessungen der Maschine festgelegt. Der gesamte Wurfarm hat eine Länge von ca. 600 mm, trägt am einen Ende die Abwurfeinheit und am anderen Ende ein Gegengewicht. Die Abwurfeinheit muß aufgrund des magnetischen Auslöseprinzips zumindest teilweise aus Stahl ausgeführt sein. Dies verursacht eine große exzentrische Masse, die durch ein entsprechendes Gegengewicht ausgeglichen werden muß, um einen ruhigen und gleichmäßigen Lauf der Maschine zu gewährleisten.

Das Gegengewicht besteht aus zwei Teilgewichten, die in zueinander senkrechten Achsen unabhängig voneinander verstellbar sind. Beide Teile können zusammen in radialer Richtung verschoben werden, um den Wurfarm statisch auszuwuchten. Die zweite Teilmasse kann relativ dazu in axialer Richtung verstellt werden, um einen dynamischen Massenausgleich herzustellen.

Der Arm kann nur für den Betriebszustand vor oder nach dem Abwurf ausgewuchtet werden. Die zusätzliche Masse des Wurfkörpers, die beim Abwurf verloren geht, kann nicht kompensiert werden. Da der Hochlauf der Maschine bis zum Abwurf der Teil des Bewegungsablaufs ist, bei dem es auf höhere Präzision und Ruhe ankommt, wird die Maschine immer für den Zustand mit eingelegtem Wurfkörper ausgewuchtet. Das Bremsen nach dem Abwurf erfolgt notgedrungen etwas unwuchtig.

Um unkontrollierte Bewegungen infolge der Unwucht der Wurfmaschine zu verhindern, steht die Maschine auf einer schweren Grundplatte. Auf dieser Platte sind zwei seitliche Stützwände befestigt, die die Lager für die Hauptachse des Wurfarmes tragen. Der Antrieb erfolgt mittels eines Gleichstrommotors mit einer Nennleistung von 90 W. Um den gewünschten Drehzahlbereich zu erreichen, ist der Motor mit einem fest angeflanschten Planetengetriebe mit der Untersetzung $i=4.3$ versehen. Die Getriebewelle treibt direkt die Hauptachse an. Um die Drehgeschwindigkeit- und

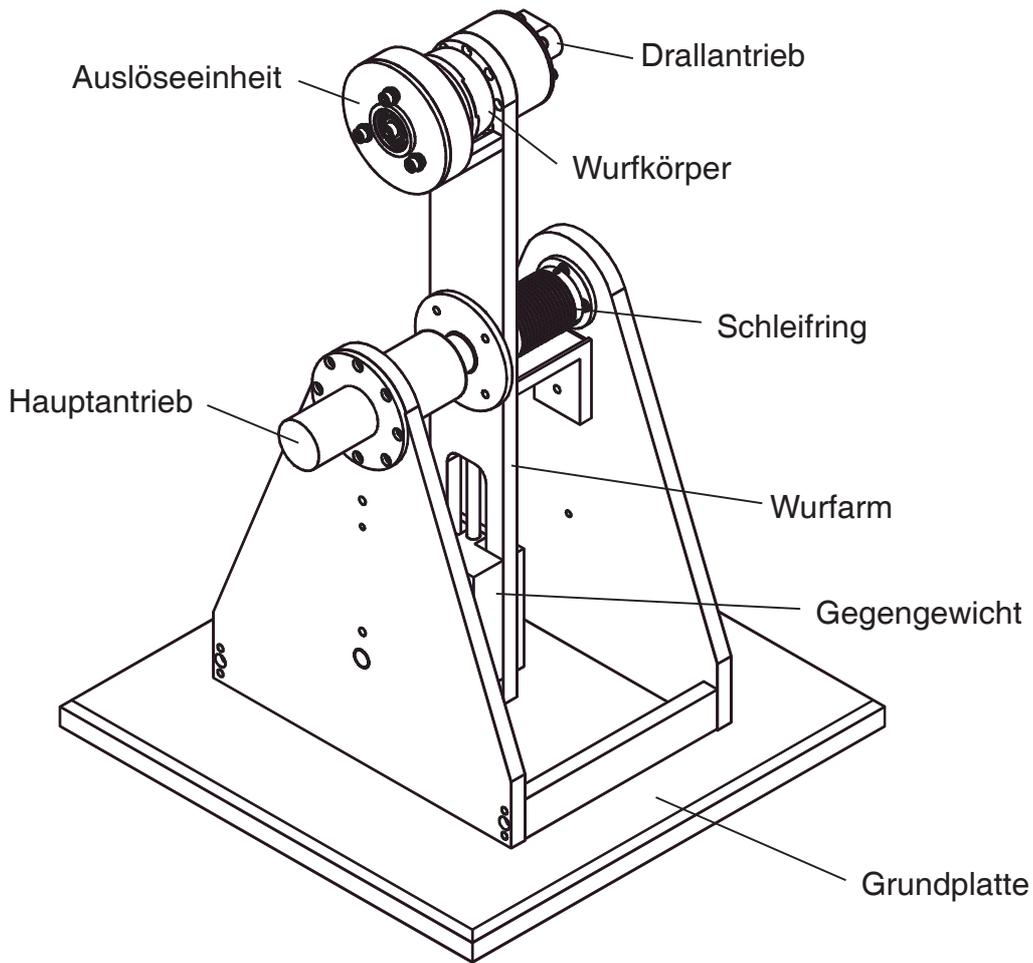


Bild 5.6: Übersichtszeichnung der gesamten Wurfmaschine

Lage des Hauptantriebs messen zu können, ist am Ende der Welle ein inkrementaler Drehgeber angebracht. In Bild 5.6 ist die Gesamtmaschine dargestellt.

5.2.2 Drallantrieb

Die Funktionsweise des Drallantriebs ist in Abschnitt 5.1.4 bereits erläutert worden. Die konstruktive Umsetzung wird durch einige Randbedingungen beeinflusst und eingeschränkt:

- Das Gewicht der Drall/Auslöseeinheit soll beschränkt bleiben, um die Anforderungen an den Hauptantrieb begrenzen zu können.
- Der Bauraum soll möglichst klein sein, um den Wurfarm kurz und den Abstand der Stützen der Wurfarmachse gering halten zu können.
- Die elektrische Leistung muß mit einem Schleifring auf den Wurfarm übertragen werden. Dieser begrenzt den maximal zur Verfügung stehenden Strom und kann die Signalqualität von Sensorsignalen negativ beeinflussen.

Die Auswahl des Motors für den Drallantrieb ist für die gesamte Gestaltung der Abwurfseinheit von wesentlicher Bedeutung. Er muß die Anforderungen hoher Leistung, geringen Gewichtes und geringen Bauraums in sich vereinigen. In Anbetracht dieser Wünsche wurde ein Gleichstrommotor ohne Getriebe zum direkten Antrieb des Wurfkörpers gewählt. Diese Maßnahme ermöglicht, den für ein Getriebe nicht mehr notwendigen Bauraum dem Motor zuzuschlagen und einen etwas größeren, leistungsstärkeren und in seinem Drehzahlbereich der Aufgabe besser angepaßten Motor zu verwenden. Um Bauraum zu sparen, ist die Antriebsplatte, die am Wurfkörper anliegt, dem Motor „übergestülpt“. Die Baulänge der Antriebsseite entspricht somit genau der Länge des Antriebsmotors.

Der Auslösemechanismus muß unter den genannten Randbedingungen möglichst schnell auslösen können. Diesem Ziel muß man sich mit zwei, sich einander zum Teil widersprechenden Maßnahmen annähern: Einerseits muß die Vorspannung der Federn möglichst hoch und andererseits das Magnetfeld in der Spule möglichst schnell abbaubar sein. In der Spule, die eine erhebliche Induktivität darstellt, wird während der Haltephase magnetische Feldenergie gespeichert. Diese muß schnellstmöglich abgeführt werden, um ein langes „Nachhalten“ der Magnetspule zu verhindern. Ein einfaches Öffnen des Stromkreises mit sofortiger Unterbrechung des Stromflusses kommt nicht in Frage, da an den offenen Enden aufgrund der Selbstinduktion der Spule Spannungen entstehen würden, die die Zerstörung der Halbleiterschalt Elemente zur Folge hätten. Daraus ergibt sich, daß eine gewisse Mindestnachhaltezeit unvermeidlich ist, die in jedem Fall mit der Größe der Spuleninduktivität ansteigt.

Andererseits hat eine Spule, die eine starke Haltekraft zwecks hoher Vorspannung der Federn haben soll, immer auch eine größere Induktivität. Weitere Grenzen dieser Auslegung sind der Bauraum für die Spule, die Versorgungsspannung, der über den Schleifring übertragbare Strom und die zulässige Stromdichte im Spulendraht.

Der magnetische Kreis der Spule muß mit ferromagnetischen Stahlteilen geschlossen werden. Diese müssen einen Mindestquerschnitt haben, um den magnetischen Fluß der Spule in entsprechende Haltekraft umsetzen zu können, was jedoch das Gewicht der Abwurfseinheit erhöht und den Spulenbauraum verringert.

Nachdem mittels einer Abschätzung die groben Baumaße der Magneteinheit festgelegt wurden, wurde eine zweistufige Optimierung durchgeführt:

1. Unter der Randbedingung eines vorgegebenen Bauraumes wurde das Verhältnis von Spulenquerschnittsfläche zu durchflutetem Stahl mit dem Gütefunktional der maximalen Haltekraft optimiert.
2. Drahtstärke, Windungszahl und verwendeter Vorwiderstand wurden mit dem Ziel des schnellstmöglichen Auslösens optimiert.

Die Einführung eines kleinen Luftspaltes im geschlossenen Zustand konnte ebenfalls dazu beitragen, die Auslösezeit weiter zu vermindern. Der erste Optimierungsschritt wurde in der Entwurfsphase der Maschine durchgeführt. Der zweite Schritt und die Einführung des Luftspaltes wurden erst nach der Fertigstellung der Maschine durchgeführt und brachten Verbesserungen, die in Tabelle 5.2 aufgelistet sind.

Tabelle 5.2: Verbesserung der Auslösezeit

Zustand	Auslösezeit
vor Optimierung	156 ms
mit Luftspalt	58 ms
nach Spulenoptimierung	10 ms

Die in Tabelle 5.2 dargestellten Auslöseverzögerungen stellen nur Mittelwerte dar. Die Streuung dieser Werte, die die Ursache für falsche Wurfbahnen darstellt, ließ sich durch die Reduktion der absoluten Verzögerung ebenfalls drastisch reduzieren. Sie liegt nach Abschluß aller Optimierungen bei ca. ± 1 ms und damit in der Größenordnung des Reglertaktes des Steurrechners des Versuchs (siehe Abschnitt 5.2.4).

Die Messung von Drehgeschwindigkeit und Lage wird beim Drallantrieb durch einen inkrementalen Drehgeber realisiert, der direkt an den Antriebsmotor angeflanscht ist.

Zur Signal- und Leistungsübertragung vom Gestell auf den Wurfarm steht ein 16-poliger Schleifring zur Verfügung, an dem die folgenden Signale anliegen:

- Motorstrom (2 Leiterbahnen)
- Magnetstrom (2×2 Bahnen, Gefahr der Überlastung einer Schleifbahn)
- Drehgebersignale (4×2 Bahnen, zur sicheren Signalübertragung)

5.2.3 Elektronische Komponenten

Um einen frei programmierbaren Versuchsablauf zu gewährleisten, wurde die Steuerung des gesamten Versuchs auf Basis eines Standard-PC realisiert. Dieser ist jedoch weder in der Lage, die Signale der inkrementalen Drehgeber unmittelbar zu verwenden, noch Leistungssignale, wie sie zur Ansteuerung der Motoren und des Magnets erforderlich sind, zu liefern. Deshalb war es erforderlich, elektronische Komponenten zu entwerfen, die zwischen Maschine und PC angeordnet werden. Die Aufgaben dieses „Interface“ sind in der Tabelle 5.3 zusammengefaßt.

Die Sensoren sind handelsübliche inkrementale Drehgeber. Die Elektronik hat die Aufgabe, die rohen Sensorsignale einzulesen und sowohl die Drehlage als auch die Geschwindigkeit in computerlesbare Daten umzuwandeln. Die Vierfachauswertung der Drehgeber führt zu einer Winkelinformation mit 400 Schritten der Drallachse und mit 1600 Schritten der Hauptachse. Um diese Information zum Rechner zu übertragen, werden diese Werte in die unteren 12 Bit eines 16-Bit Registers gespeichert. In den verbleibenden 4 Bit wird die Drehrichtungsinformation abgelegt.

Die Geschwindigkeitsmessung geschieht dergestalt, daß die Impulse eines hochfrequenten Oszillators gezählt werden, die in der Zeit zwischen der Passage zweier

Tabelle 5.3: Anforderungen an die elektronischen Komponenten

Anforderung	Zahlenwert
Sensorik	
Einlesen Encoder Hauptantrieb	400 Striche
Einlesen Encoder Drallantrieb	100 Striche
Aktoren	
Strom Hauptantrieb	24 V, 3 A, PWM mit ± 250 Schritten
Strom Drallantrieb	12 V, 1 A, PWM mit ± 250 Schritten
Strom Magnet	12 V, 0.5 A, an-aus mit schneller Entregung
Kameraverschluß	Öffnen/Schließen mit Relais
Stroboskopauslösung	
Versorgung des Blitzsensors	

Encoderstriche stattfinden. Der Kehrwert dieses Zählergebnisses ist das Maß für die Drehgeschwindigkeit. Da der Zähler durch ein 16-Bit Register realisiert ist, tritt bei sehr langsamen Drehgeschwindigkeiten ein Überlauf des Zählers ein, und eine Messung ist nicht mehr möglich. Bei hohen Drehgeschwindigkeiten ist die Anzahl der Pulse zwischen zwei Strichpassagen nur noch gering, was die Ergebnisgenauigkeit zunehmend schmälert. Diese beiden Grenzen können jedoch mit der Wahl der Zählfrequenz so eingestellt werden, daß im relevanten Drehzahlbereich immer sinnvolle Messungen möglich sind. Das Zählergebnis im Register kann der Steuerrechner in ein 16-Bit Register einlesen. Die Umrechnung von Zählstrichen in die tatsächliche Winkelstellung und die Berechnung der Geschwindigkeit aus dem Zählerstand geschieht durch die Steuerungssoftware.

Die Leistungssteuerung der Motoren wird mittels der Pulsweitenmodulation (PWM) durchgeführt. Diese hat neben der vollen Linearität und der verlustfreien Leistungs dosierung den Vorteil, daß Logiksignale bis an die Gates der Leistungstransistoren geführt werden können. Jeder Puls kann dabei in der Breite von 0 (Stillstand) bis 250 (Vollast) vom Steuerrechner eingestellt werden. Die Umsetzung dieses 8-Bit Signals in den entsprechenden Spannungspuls geschieht ebenfalls in der Leistungselektronik.

Die sonstigen Steuerungssignale sind reine ja/nein-Informationen, die als einzelne Bits in einem 8-Bit Register vom Steuerrechner an die Elektronik gesendet werden. Dort geschieht für den Magneten die Umsetzung in ein Leistungssignal. Zur Auslösung des Stroboskopblitzes wird ein mit dem Triggereingang des Gerätes kompatibles Logiksignal erzeugt, und der Kameraverschluß wird mittels eines Relais, das den Auslöseschalter eines modifizierten Fernauslösers überbrückt, geöffnet und geschlossen.

Eine Sonderstellung nimmt der Blitzsensor ein, mit dem überwacht werden soll, ob die ausgelösten Stroboskopblitze tatsächlich stattgefunden haben. Ziel ist es, Wurfversuche, deren spätere Auswertung durch fehlende Blitze unmöglich ist, sofort

wiederholen zu können. Der Sensor wird von der Elektronik mit Strom versorgt und erhält die Blitzauslösesignale. Mißt der Blitzsensor mit seinem Fototransistor einen darauffolgenden Blitz, wird eine LED eingeschaltet. Leuchten nach Wurfende alle LEDs, haben alle ausgelösten Blitze ohne Zeitverzögerung tatsächlich stattgefunden.

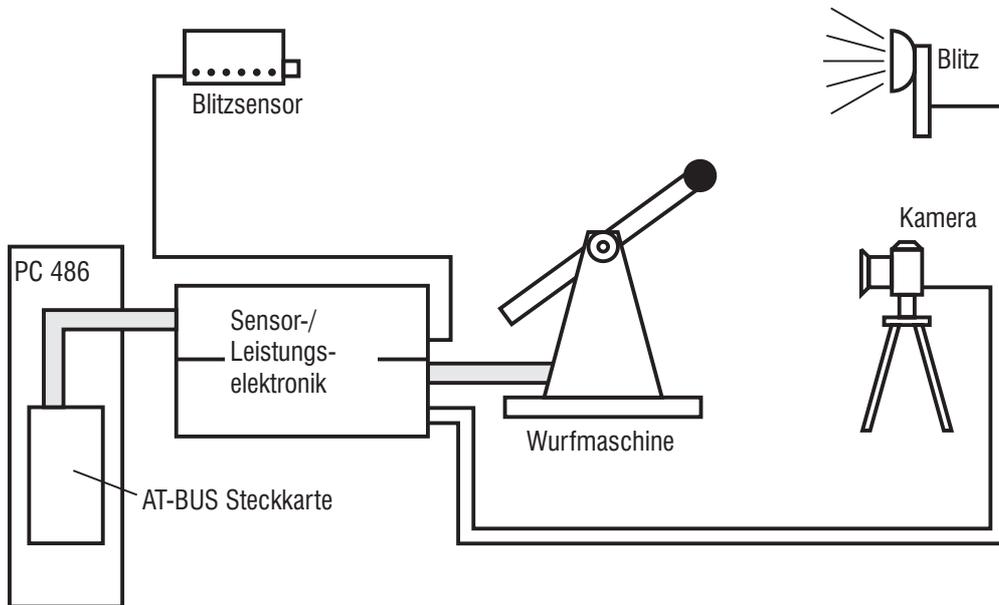


Bild 5.7: Signal- und Leistungsfluß der Wurfmaschine

Die Gesamtkonfiguration ist in Bild 5.7 dargestellt. Der Steuerrechner (PC-486) enthält eine speziell angefertigte Einsteckkarte, über die die Kommunikation mit der Elektronik erfolgt. Der Signalfluß läßt sich in den Sendezweig für die Aktoren und den Empfangszweig für das Auslesen der Drehgeber aufteilen. Von der Elektronik fließen Leistungsströme und Logiksignale zur Wurfmaschine, und die rohen Sensorsignale werden eingelesen.

In Bild 5.8 ist eine Übersicht aller Komponenten der Versuchseinrichtung gezeigt. Zentrales Element ist die Wurfmaschine (Ziffer 4). Auf dem Tisch vor der Maschine steht vor einem schwarzen Vorhang der Datenbildschirm mit schwarzem Gehäuse, der bei jedem Versuch mitfotografiert wird (Ziffer 5). Auf dem Tisch vor der Maschine liegen einige Wurfkörper. Der Steuerrechner ist bei Ziffer 2 zu sehen. Die in diesem Abschnitt erklärten Elektronik-Komponenten stehen in der Mitte zwischen Steuerrechner und Wurfmaschine bei Ziffer 3. Ganz links im Bild ist die Stroboskoplampe zu sehen, dahinter ihre elektronische Versorgungseinheit (Ziffer 1). Die Kamera, mit der die Versuche aufgenommen wurden, stand noch weiter links hinter dem Stroboskop und ist auf diesem Foto nicht zu sehen. Während der Versuche war der Raum völlig abgedunkelt, der Standardbildschirm des Steuerrechners war ebenfalls abgeschaltet. Einzige Lichtquelle war der ebenfalls stark abgedunkelte Datenbildschirm.

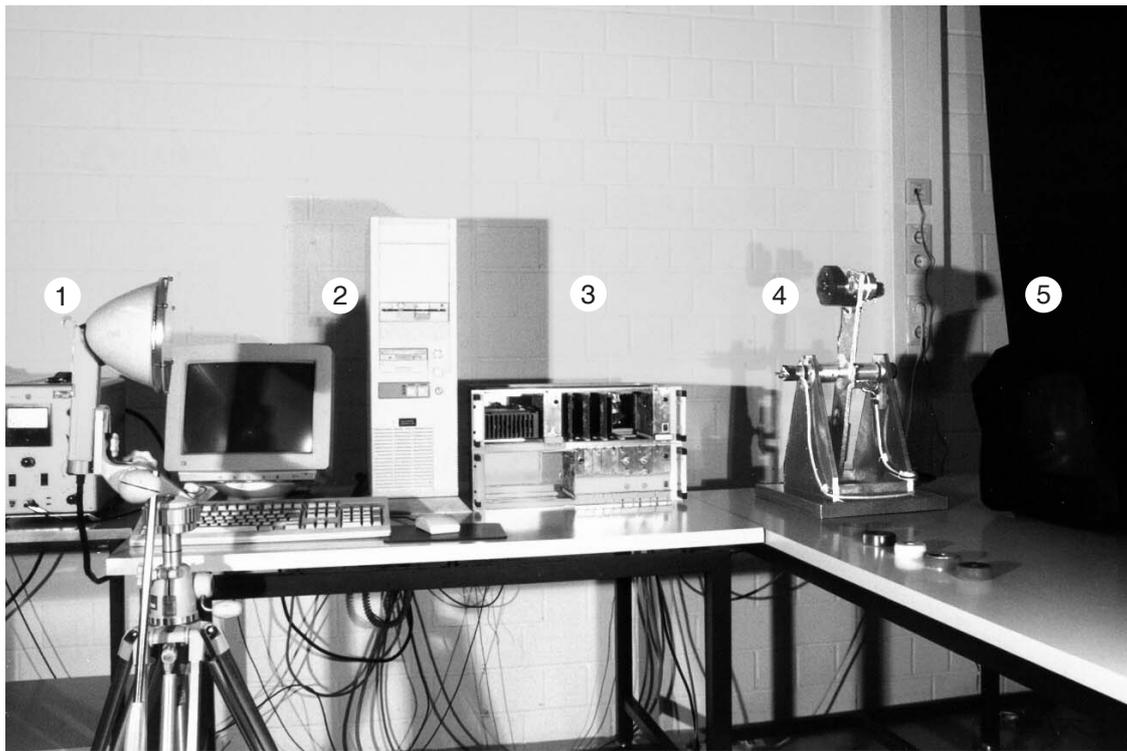


Bild 5.8: Foto der Versuchseinrichtung

5.2.4 Software

Als Steuerrechner wird ein Standard-PC eingesetzt. Dieser hat den Vorteil, daß er mit verschiedenen Sprachen frei und vor allem komfortabel programmierbar ist, jedoch den Nachteil, daß die Echtzeitfähigkeit, die zur Realisation einer Regleranwendung erforderlich ist, nicht ohne weiteres vorhanden ist.

Das Rechenprogramm hat die Aufgabe die Versuche zu „verwalten“, das heißt Versuchsparameter zu speichern und für eine Auswertung vorzubereiten, die Bahn zu planen und dann in einem Reglermodus den Ablauf eines Versuches in Echtzeit zu steuern.

Der Ablauf des Programms ist in Bild 5.9 dargestellt. Der Rechner befindet sich zunächst im „PC-Modus“. Die gewünschten Wurfparameter werden eingegeben, die komplette Wurfbahn sowie der Hochlauf vorausberechnet. Danach wird der Rechner in einen Prozeßrechenmodus umgeschaltet: Es wird nur noch ein Steuer- und Regelunterprogramm mit einem festen Takt von 2500 Hz abgearbeitet. Dazu wird der „Timer-Interrupt“ des Rechners auf den Regeltakt umprogrammiert und der Interrupt-Vektor, der sonst auf eine Betriebssystemroutine zeigt, auf das Reglerunterprogramm verlegt. In diesem Zustand führt der Rechner nur noch die gewünschte Steuerung durch. Die Antriebe werden geregelt, der Abwurf und die Blitze ausgelöst und der Kameraverschluß gesteuert. Nach Ablauf des Versuches wird der Rechner wieder in den PC-Modus zurückgesetzt, und abschließende Berechnungen und die Archivierung von Daten werden durchgeführt.

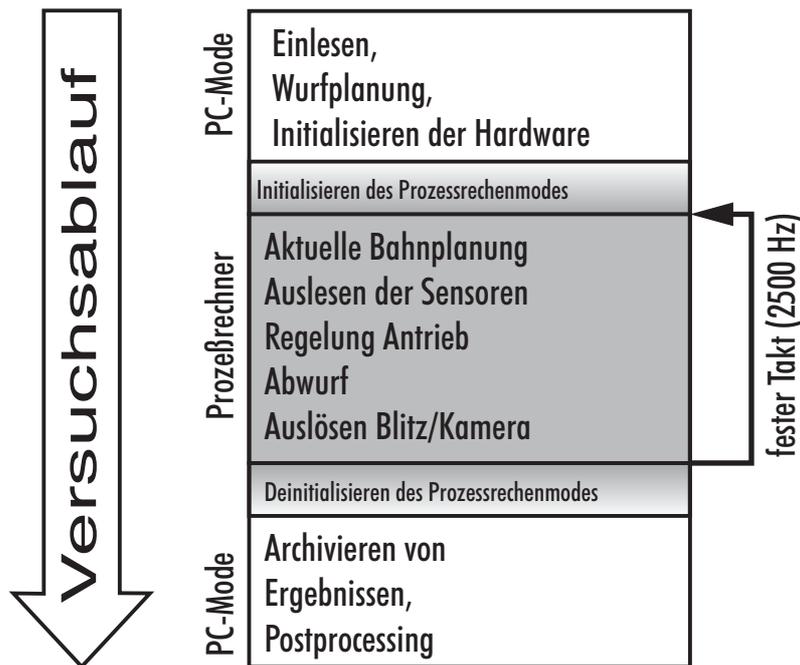


Bild 5.9: Programmablauf eines Wurfversuchs

Das gesamte Programm wurde in der Programmiersprache C++ realisiert. Da das Programm immer einen nicht zeitkritischen Prolog und Epilog durchläuft, treten die Probleme, die C++ in Echtzeitanwendungen verursachen kann, bei dieser Maschinensteuerung nicht auf.

5.3 Steuerung und Regelung

In diesem Abschnitt wird die Bewegungssteuerung der Wurfmaschine erläutert. Ausgangspunkt ist eine Wunschlage und -geschwindigkeit, die der Wurfkörper im Moment des Stoßes an einem definierten Ort haben soll. Daraus resultiert eine Wurftrajektorie, für welche die Wurfmaschine die geeigneten Anfangsbedingungen einstellen muß. Aus diesen Anfangsbedingungen kann eine Hochlaufabfolge der einzelnen Antriebe berechnet werden, die dann durch eine geeignete Steuerung und Regelung auch gewährleistet werden muß.

5.3.1 Wurfbahnplanung

Das Versuchsziel besteht jeweils darin, einen Stoß des Wurfkörpers mit gewünschten Stoßgeschwindigkeiten durchzuführen. Zusätzlich soll sich der Körper dabei in einer gewünschten Winkellage befinden. Die vier Zielgrößen sind in Bild 5.10 dargestellt: Die Schwerpunktgeschwindigkeit in x - und y -Richtung unmittelbar vor dem Stoß ($v_{x,S}$ und $v_{y,S}$) sowie Winkellage φ_S und -geschwindigkeit ω_S . Die Winkellage ist nur

bei einem nicht rotationssymmetrischen Körper von Bedeutung und wird bezüglich eines geeigneten Körpermerkmals gemessen.

Diese Zielgrößen sind bei der Wurfmaschine nur indirekt einstellbar. Es ist möglich, die Abwurfgeschwindigkeit und -winkel des Wurfarms (im folgenden immer „Hauptantrieb“ genannt) $\omega_{H,ab}$ und $\varphi_{H,ab}$ vorzugeben. Ebenso können für den zusätzlichen Antrieb des Wurfkörpers („Drallantrieb“) die Lage und Geschwindigkeit $\omega_{D,ab}$ und $\varphi_{D,ab}$ vorgegeben werden. Als zusätzliche Größen gehen in die Wurfbahnplanung der Radius des Wurfarms R , der des Wurfkörpers r und die Höhe h des Wurfarmdrehpunktes über der Stoßfläche ein. Grundsätzlich werden alle Stöße auf einer horizontalen Ebene durchgeführt. Die letzte für die Bahnberechnung wichtige Größe ist die Erdbeschleunigung g .

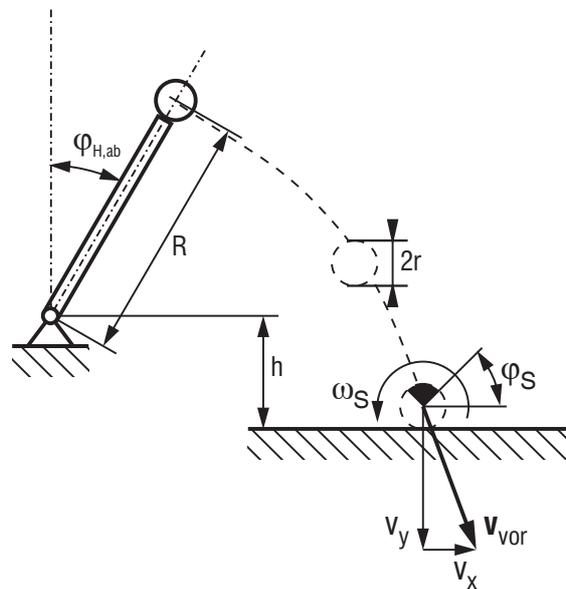


Bild 5.10: Geometrie der Wurfbahn

Der Zusammenhang zwischen Abwurfparametern und Auftreffgeschwindigkeiten läßt sich als

$$v_{x,S} = \omega_{H,ab} \cdot \cos \varphi_{H,ab} \quad (5.1)$$

$$v_{y,S} = -\sqrt{(\omega_{H,ab} \cdot \sin \varphi_{H,ab})^2 + 2g(h - r + R \cos \varphi_{H,ab})} \quad (5.2)$$

darstellen. Die Geschwindigkeit in y -Richtung ist im verwendeten Koordinatensystem unmittelbar vor dem Stoß negativ. Diese Gleichungen müssen nun nach $\omega_{H,ab}$ und $\varphi_{H,ab}$ aufgelöst werden, da diese Parameter in die Steuerung der Wurfmaschine eingehen. Das ist jedoch nicht analytisch möglich. Aus diesem Grund werden in der Steuerungssoftware der Wurfmaschine diese Parameter mit Hilfe eines numerischen Gleichungslösers vor Beginn des Versuches berechnet. Ist die Wurfbahn vollständig ermittelt, lassen sich nun auch der Auftreffpunkt und die Flugzeit angeben. Der Auftreffpunkt ist nicht wählbar. Er ergibt sich zwangsläufig aus den vorgegebenen

Geschwindigkeiten. Dieses Problem ist aber dadurch zu lösen, daß man sowohl die Auswertetechnik als auch spezielle Stoßpartner am bekannten Stoßpunkt plazieren kann.

Die Flugzeit t_F wird unter Verwendung der Beziehung für den freien Fall berechnet, die einen Zusammenhang zwischen der Fallhöhe einerseits und der Fallzeit mit Erdbeschleunigung und Anfangsgeschwindigkeit andererseits herstellt:

$$(h - r) + R \cos \varphi_{H,ab} = \frac{1}{2} g t_F^2 + |\omega_{H,ab} \cdot \sin \varphi_{H,ab}| t_F. \quad (5.3)$$

Diese Gleichung kann nach t_F aufgelöst werden. Der Ort des Stoßpunktes x_S läßt sich ebenfalls über die Flugzeit mit

$$x_S = \omega_{H,ab} \cdot \cos \varphi_{H,ab} \cdot t_F + R \sin \varphi_{H,ab} \quad (5.4)$$

berechnen.

Die Berechnung der Abwurfgrößen für den Drallantrieb ist einfacher. Für die Stoßgeschwindigkeit und den Winkel gelten:

$$\omega_S = \omega_{D,ab} + \omega_{H,ab} \quad (5.5)$$

$$\varphi_S = \varphi_{D,ab} + (\omega_{D,ab} + \omega_{H,ab}) \cdot t_F + \varphi_{H,ab} \quad (5.6)$$

Da es sich bei den Größen, die den Drall beschreiben, um Relativgrößen bezüglich des Wurfarmes handelt, gehen in die Berechnung der absoluten Stoßwerte die Abwurfparameter des Hauptarmes mit ein. Die Gleichungen können direkt nach den für die Maschinensteuerung wesentlichen Größen $\omega_{D,ab}$ und $\varphi_{D,ab}$ aufgelöst werden. In Gleichung 5.6 ist darauf zu achten daß sich bei Berechnungen von Winkeln unter Umständen Werte ergeben können, die auf einen sinnvollen Bereich (zum Beispiel $0^\circ - 360^\circ$) normiert werden müssen.

5.3.2 Ablaufplanung

Im vorangegangenen Abschnitt wurde berechnet, in welchem Zustand der Wurfkörper freigegeben werden muß, um den gewünschten Stoß durchführen zu können. Die Beschleunigung des Hauptarmes auf die gewünschte Drehzahl und das Ausklinken des Wurfkörpers ist weder theoretisch noch praktisch ein Problem. Auch eine zusätzliche Winkelgeschwindigkeit ist ohne Schwierigkeiten realisierbar. Kommt noch die Forderung dazu, daß sich der Wurfkörper im Moment des Loslassens in einer bestimmten Winkelposition befinden soll, sind diese Forderungen nicht mehr ohne weiteres zu erfüllen. Ein Steuerungskonzept, das zunächst beide Antriebe auf die gewünschte Geschwindigkeit beschleunigt und dann im „richtigen“ Moment ausklinkt, ist nicht ausreichend, da dann die korrekte Winkelstellung des Wurfkörpers nicht gewährleistet ist.

Um das Ziel des lage- und geschwindigkeitsgenauen Abwurfes zu erreichen, wird folgendes Konzept verwirklicht: Die Hochlaufbahn (Bahn als abstrakte Trajektorie im

Phasenraum) muß exakt vorausgeplant und die Startwinkel vor Beginn des Hochlaufes so eingestellt werden, daß im Moment des Auslösen auch der Wurfkörper in der richtigen Position ist. Der Ablauf des Versuchs ist in Bild 5.11 dargestellt.

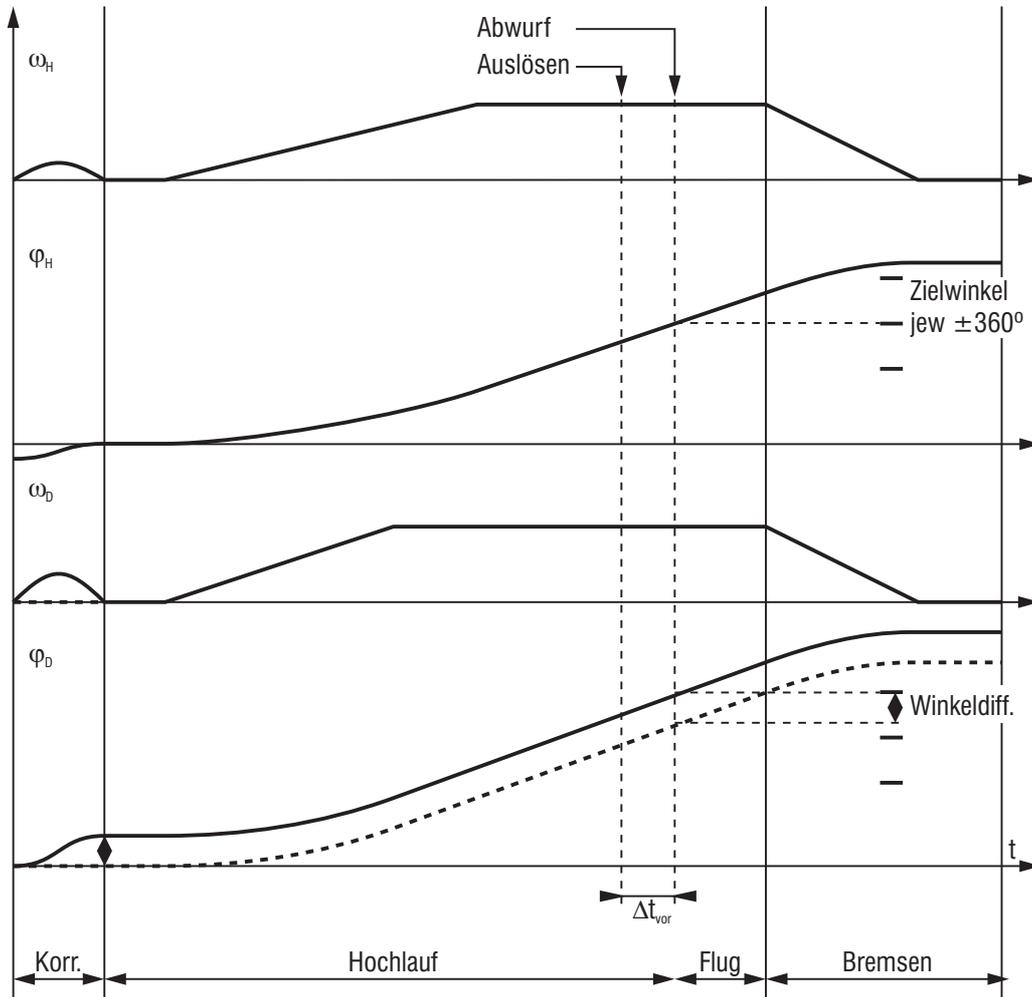


Bild 5.11: Planung des Bewegungsablaufes vor dem Wurf

Der Versuchsablauf läßt sich in vier Phasen untergliedern. Zunächst werden die Stellungen beider Antriebe in der Korrekturphase in die gewünschte Startposition gedreht. Der Wurfarm wird dabei aus einer beliebigen Stellung in die senkrechte Position gefahren. Der Drallantrieb wird ebenfalls in die benötigte Startposition gebracht, die im folgenden erklärt wird.

In der darauffolgenden Hochlaufphase werden beide Antriebe mit einem rampenförmigen Geschwindigkeitsverlauf beschleunigt, bis die jeweilige Wunschdrehzahl erreicht ist. Nach einer Beruhigungszeit, bei der beide Antriebe sich mit konstanter Drehzahl drehen, wird der Abwurfmechanismus ausgelöst. Dies geschieht um das Intervall Δt_{vor} vor dem eigentlichen Abwurfzeitpunkt, da der Auslösemechanismus eine kurze aber reproduzierbare Auslöseverzögerung hat. Der Zeitpunkt der Auslösung ist so berechnet, daß der Wurfarm im Moment der Freigabe des Wurfkörpers

in der gewünschten Position ist. Der Drallantrieb hat zu diesem Zeitpunkt auch die erforderliche Drehgeschwindigkeit. Die richtige Winkellage des Drallantriebs wird durch die Winkelkorrektur am Anfang erreicht. Die gestrichelte Linie in Bild 5.11 stellt den Hochlauf ohne vorherige Winkelkorrektur dar. Nach der Verdrehung wird auf der durchgezogenen Linie einer der gewünschten Abwurfwinkel erreicht. Da sich die Winkelstellung nach jeweils 360° wiederholt, ist eine Korrektur um maximal $\pm 180^\circ$ erforderlich.

Nach dem Abwurf werden die Stroboskopblitze ausgelöst, die zur Versuchsbeobachtung und -auswertung dienen. Dieser Sachverhalt wird in Abschnitt 5.4 erläutert. In der Bremsphase werden Haupt- und Drallantrieb wieder zum Stillstand gebracht. Der Versuch ist damit abgeschlossen.

Diese Bahnplanung ist nur sinnvoll, wenn die Wurfmaschine auch tatsächlich die Bewegungen ausführt, die vorgesehen sind. Insbesondere ist hier eine hohe Präzision erforderlich. Bereits ein Fehler im Abwurfwinkel von 1° kann den Versuch völlig verfälschen. Deswegen muß die Steuerung der Maschine so präzise gestaltet sein, daß die Abweichung von Soll- zu Istbewegung zumindest in der Nähe des Abwurfmomentes geringer als 1° ist. Diese Forderung ist nur mit Hilfe eines geeigneten Reglers zu realisieren.

5.3.3 Antriebsregelung

Der Regler hat die Aufgabe, die Wurfmaschine dazu zu zwingen, den Bewegungsvorgaben der Versuchssteuerung möglichst genau zu folgen. Bei der Auswahl des Reglerkonzeptes spielen folgende Punkte eine wesentliche Rolle:

- Die beiden Antriebe sind vollständig entkoppelt.
- Das mechanische Modell beider Antriebe ist sehr einfach.
- Die „Bahn“ ist im Phasenraum vorher genau bekannt.

Die beiden letztgenannten Punkte ermöglichen es, einen Regler mit ausgefeilter Vorsteuerung zu verwenden, welche die gesamte inverse Dynamik aufschaltet. Der Regler muß dann nur noch kleine Abweichungen um die sich verändernde Sollvorgabe korrigieren. Da beide Achsen entkoppelt sind, kann jeweils ein einfacher linearer Regler verwendet werden. Gewichtet werden müssen auf jeden Fall die Winkel- und die Geschwindigkeitsabweichung. Da es auf besondere Präzision in der Nachführung des Winkels ankommt, ist auch der I-Anteil der Winkelabweichung erforderlich, der eine bleibende Regeldifferenz beseitigt.

Die Bewegungsgleichung für die beiden Antriebe lautet jeweils:

$$J\dot{\omega} + C \cdot \omega + M_{Reib}(\omega) = K \cdot u, \quad (5.7)$$

wobei ω die Winkelgeschwindigkeit, J das Trägheitsmoment, C und K Motorkonstanten und u der Stelleingriff sind. In die Konstanten C und K geht neben den

technischen Motordaten auch die im Antriebsstrang enthaltene Getriebeübersetzung ein. K wird darüberhinaus durch die Dimension des Stelleingriffs beeinflusst. Hier sind entweder die Motorspannung oder eine prozentuale oder absolute Pulsbreite denkbar. Das Gesamtträgheitsmoment enthält alle rotierenden Teile der jeweiligen Antriebe. Beim Hauptantrieb ist der dominierende Trägheitsanteil der Wurfarm, obwohl der Motor mit einer Übersetzung den Arm antreibt. Der Drallantrieb verfügt über einen Direktantrieb, bei dem die Motorträgheit klein im Verhältnis zur Drehmasse der Halteplatten und des Wurfkörpers ist.

Das Reibmoment ist eine Funktion der Drehgeschwindigkeit und entzieht sich einer genauen Berechnung. Der Hauptantrieb wird durch Reibung nur geringfügig beeinflusst. Beim Drallantrieb stellt die Reibung jedoch einen wesentlichen Systemparameter dar.

Die inverse Dynamik besteht aus zwei Anteilen: Einerseits aus der „statischen“ Vorsteuerung, die dem Motor ein Stellsignal aufschaltet, das benötigt wird, um die zu erreichende Geschwindigkeit im Gleichgewichtszustand zu halten, andererseits dem „dynamischen“ Anteil, der den zusätzlichen Energiebedarf der Beschleunigung kompensiert. Der statische Anteil soll auch den nicht berechenbaren Reibanteil kompensieren, weshalb hier zum Mittel der Messung gegriffen wurde. Der Stelleingriff u wird schrittweise erhöht und die erreichte Drehgeschwindigkeit ω ermittelt. Hierbei muß jeweils gewartet werden, bis die Drehgeschwindigkeit gegen die Grenzdrehzahl hinreichend konvergiert ist. Der Zusammenhang wird durch die Funktion

$$\omega = f(u) \quad \Longrightarrow \quad u = f^{-1}(\omega) \quad (5.8)$$

mit der Umkehrfunktion f^{-1} beschrieben. Um diese Umkehrung durchführen zu können, ist es erforderlich, die gemessenen Datenpunkte durch eine globale oder mehrere abschnittsweise umkehrbare Funktionen zu approximieren.

Die dynamische Vorsteuerung wird aufgrund der einfachen Systemdynamik als Konstante angesetzt, die sich zu K/J berechnet. Das gesamte Vorsteuersignal u_V ergibt sich damit zu:

$$u_V = f^{-1}(\omega) + \frac{K}{J} \cdot \dot{\omega} \quad (5.9)$$

Die sinnvolle Anwendung dieser Vorsteuerung setzt voraus, daß die Sollbeschleunigung bekannt ist. Da der gesamte Versuchsablauf von einem Rechner gesteuert wird, in dem Sollbahnen, Vorsteuerung und Regler digital vorausberechnet werden, ist dies problemlos möglich. Die gesamte Struktur eines Antriebes mit Regler ist in Bild 5.12 dargestellt.

Der Sollbahngenerator stellt die Sollage, die -geschwindigkeit sowie die -beschleunigung zur Verfügung. Diese Größen werden zeitdiskret berechnet. Die Sollbeschleunigung $\dot{\omega}_S$ wird nur der Vorsteuerung zur Verfügung gestellt. Die Sollgeschwindigkeit ω_S wird einerseits von der Vorsteuerung benötigt und andererseits zum Soll-Istvergleich an den Reglereingang weitergegeben. Die Sollage φ_S wird nur mit dem entsprechenden Ist-Signal verglichen.

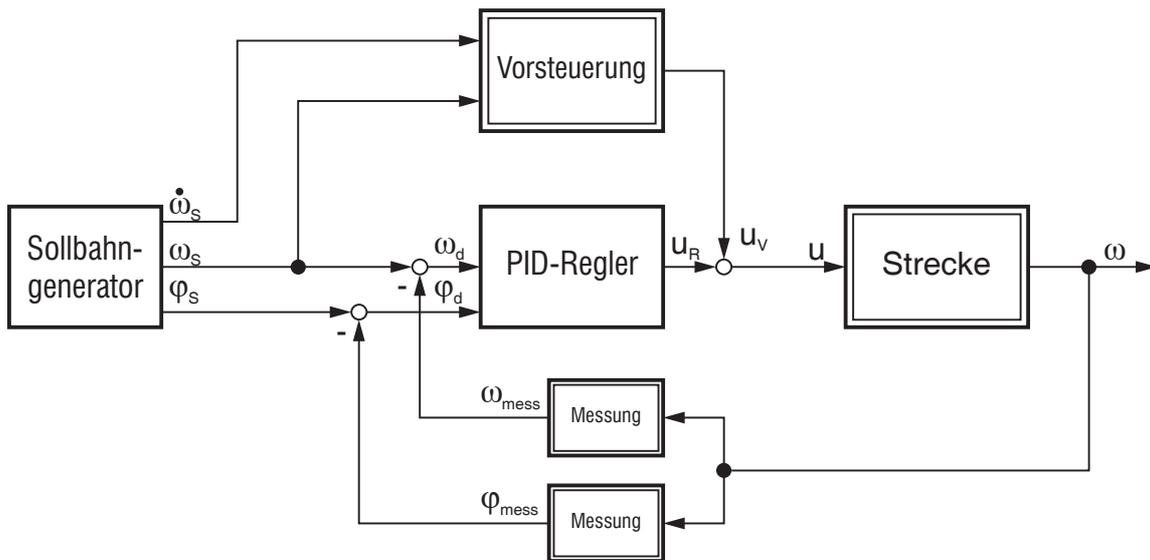


Bild 5.12: Signalflußplan eines Antriebs

Der lineare Regler gewichtet die Abweichungen auf Geschwindigkeits-, Lage- und integrierter Lageebene mit den Reglerkoeffizienten und bildet den Reglerausgang u_R , der mit dem Ausgang u_V der Vorsteuerung zum Stellsignal u verknüpft wird. Dieses Signal wird in ± 250 Stufen diskretisiert und limitiert und über die Leistungselektronik auf die Antriebsmotoren aufgeschaltet.

Der Rückführzweig spaltet sich in eine Lage- und eine Geschwindigkeitsmessung auf, da beide Größen unabhängig voneinander ausgewertet und dem Steuerrechner als zwei digitale Werte zur Verfügung gestellt werden. Aus der Perspektive der Reglerauslegung ist das wichtig, da die verwendeten Meßverfahren für beide Größen mit unterschiedlichen Fehlern und Meßrauschen behaftet sind.

Die Reglerauslegung erfolgt nach dem Kriterium des minimalen Abstandsquadrats zwischen Soll- und Istlage in der Nähe des Abwurfmomentes. Dieses Verfahren bietet die Möglichkeit, die optimalen Reglerkoeffizienten im Frequenzbereich direkt zu bestimmen. Beim vorliegenden System führt das jedoch zu unbefriedigenden Resultaten: Der D-Anteil des Reglers wird bei dieser analytischen Optimierung zu hoch bewertet. Die Messung der Geschwindigkeit ist jedoch mit einem verhältnismäßig hohen Meßrauschen belastet, das dadurch erheblich verstärkt wird und zu einem sehr unruhigen Lauf des Antriebs führt. Aus diesem Grund wurde zur Auslegung des Reglers eine „Hardware-in-the-Loop“ Optimierung durchgeführt.

Bei diesem Verfahren wird ein numerischer Optimierungsalgorithmus im Steuerrechner gestartet. Zur Ermittlung des Gütefunktional für eine Parameterkombination wird eine Sollbahn mit bestimmten Reglerkoeffizienten tatsächlich nachgefahren und die Abweichung Soll-Ist aus automatischen Messungen des Versuchs bestimmt (Bild 5.13). Dieses Verfahren ist zwar einerseits zeitaufwendig, da die Bahnfahrten tatsächlich in „Echtzeit“ durchgeführt werden müssen, hat aber andererseits den Vorteil, daß alle nichtlinearen Effekte, die in einer Modellierung nur aufwendig nachzubilden

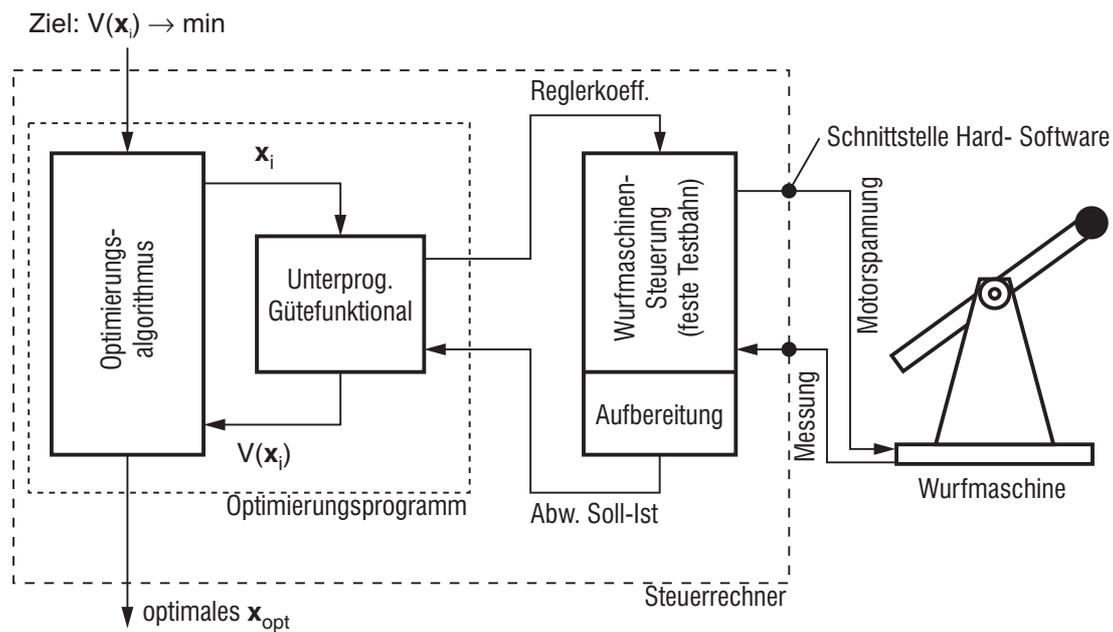


Bild 5.13: Signalfluß und Ablaufstrategie der „Hardware-in-the-Loop“ Optimierung

wären, immer richtig enthalten sind.

5.4 Geräte zur Messung der Versuche

Bei der Beobachtung eines Stoßvorganges sind die Geschwindigkeiten der Stoßkörper unmittelbar vor und nach dem Stoß von Interesse. Dies sind jedoch Größen, die einer direkten Beobachtung nicht zugänglich sind. Man kann allenfalls die Geschwindigkeiten eine gewisse Zeit vor und nach dem Stoß messen und daraus auf die unmittelbaren Stoßgeschwindigkeiten zurückschließen. Ein wichtiger Aspekt bei der Auswahl des Meßkonzeptes besteht darin, daß die Bewegung des Körpers nach dem Stoß unbekannt ist. Die Messung dieser Bewegung ist das eigentliche Erkenntnisziel des Versuchs. Die verwendete Meßeinrichtung muß deshalb in der Lage sein, einen großen Bereich messend abzudecken. Zudem sollen nicht nur die translatorische Geschwindigkeit nach Größe und Richtung bestimmt, sondern auch die Rotationsgeschwindigkeit und die Winkellage gemessen werden.

Um alle diese Forderungen zu erfüllen, wurde folgendes Meßkonzept entwickelt: Der Versuch findet in einem völlig abgedunkelten Raum vor dunklem Hintergrund statt. Während der Flugphase des Körpers werden zu definierten periodischen Zeitpunkten Stroboskopblitze ausgelöst, die den fliegenden Wurfkörper momentan beleuchten. Eine Fotokamera, deren Verschluss während des gesamten Versuchsablaufes geöffnet ist, nimmt den Versuch auf. Als Ergebnis zeigt sich auf dem belichteten Film pro Blitz eine Aufnahme des Wurfkörpers. Zudem wird ein Maßstab und der Computerbildschirm des Steuerrechners, auf dem alle wichtigen Versuchsdaten eingeblendet

werden, mitfotografiert. Über die so in das Foto eingebblendete Blitzfrequenz läßt sich durch Vermessung der Aufnahmen die Flugbahn des Wurfkörpers genau rekonstruieren. Der Körper ist mit einer Winkelmarkierung versehen, die es ermöglicht, die Drehlage der Aufnahmen und damit auch die Drehgeschwindigkeit genau zu bestimmen. Dem Nachteil, daß die Versuchsergebnisse erst nach Entwicklung und Auswertung der Fotos vorhanden sind, stehen folgende Vorteile gegenüber:

- Das Bild beinhaltet die volle Versuchsinformation. Im Versuchsmoment treten nur systematische Fehler auf, die nach deren Erkennen sogar noch korrigiert werden können (Verzerrungen o.ä.).
- Statistische Auswertefehler, die zu unplausiblen Versuchsergebnissen führen, sind durch erneute Betrachtung der Bilder meist korrigierbar.
- Die Ergebnisse sind handlich dokumentiert und archiviert.
- Durch Einblendung von Maßstab und Versuchsparametern ist jedes Foto für sich ohne weitere Information aussagekräftig.
- Nimmt man auch die Flugphase vor dem Wurf auf, werden Fehler beim Abwurf unwichtig, da die tatsächliche Anfluggeschwindigkeit gemessen wird.



Bild 5.14: Beispiel eines Dias eines Wurfversuchs (Negativ)

Um die Auswertung zu vereinfachen, werden Dias verwendet, die danach in einer günstigen Auswertegröße auf ein gerastertes Papier projiziert werden. Dort werden dann die Schwerpunktlage und der Winkel der Markierung jeder Momentaufnahme gemessen. Für die Rekonstruktion der kompletten Flugbahn reichen zwei Belichtungen pro Flugbahnabschnitt (vor und nach dem Stoß) aus. Um die Sicherheit der

Auswertung zu verbessern und eine Eingangsgröße für die Fehlerrechnung zu erhalten, werden drei Belichtungen pro Flugbahnabschnitt vorgenommen. Das negativ eines repräsentativen Dias ist in Bild 5.14 gezeigt.

Insgesamt sind sechs Belichtungen des Wurfkörpers zu sehen: Die Flugrichtung ist von links nach rechts. Die linken drei Bilder sind vor dem Stoß, die rechten nach dem Stoß aufgenommen. Deutlich ist auf dem Wurfkörper die dreieckige Winkelmarkierung zu erkennen, die zur Bestimmung der Drehlage dient. Im unteren Bildbereich ist die Stoßfläche und im linken Bereich des Dias ist ein mitfotografierter Computerbildschirm zu sehen. Auf diesen blendet der Steuerrechner während des Fluges alle wichtigen Versuchsdaten, wie Datum, Uhrzeit, Blitzfrequenz, Abwurfgeschwindigkeiten und -winkellagen, Flugzeit, Auftreffpunkt und eine laufende Nummer ein. Unter dieser Nummer werden alle Versuchsdaten in einer Datei gespeichert.

Kapitel 6

Auswertung der Stoßversuche

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der Stoßversuche dargestellt. Dazu werden zunächst die Rechenschritte erläutert, die benötigt werden, um aus den Fotoauswertungen die physikalischen Größen zu gewinnen und die statistischen Methoden, um diese Ergebnisse zu verbessern und zu bewerten. In einem weiteren Abschnitt werden dann die Darstellungsarten der Ergebnisse erläutert.

Den Kern dieses Kapitels stellt die Vorstellung der Versuchsergebnisse der durchgeführten zentralen und exzentrischen Stoßexperimente und der Vergleich mit den theoretischen Berechnungen dar.

6.1 Auswertemethodik

In diesem Abschnitt soll die Aufbereitung der Informationen, die bei der Auswertung eines Dias gewonnen werden, dargestellt werden. Ziel ist es, im ersten Schritt die Geschwindigkeiten des Wurfkörpers unmittelbar vor und nach dem Stoß zu berechnen. Daraus können dann im weiteren die Impulse und mehrere dimensionslose Stoßmaße abgeleitet werden.

6.1.1 Rekonstruktion der Flugbahn

Pro Flugbahnabschnitt werden durch drei Stroboskopblitze drei Aufnahmen gemacht, wobei theoretisch zwei Aufnahmen genügen würden, um die Flugbahn exakt rekonstruieren zu können. Die Redundanz in den Aufnahmen dient einerseits dazu, die Aussagekraft des Ergebnisses durch Mittelwertbildung zu verbessern, und andererseits mit Hilfe von statistischen Methoden die Messungsqualität abschätzen zu können. Dieses Vorgehen wird in Abschnitt 6.1.2 beschrieben.

Zur Beschreibung der Flugbahn wird, wie in Bild 6.1 dargestellt, ein x - y -Koordinatensystem verwendet, in welchem die y -Achse senkrecht nach oben und die x -Achse in horizontale Richtung zeigt. Der Wurf erfolgt immer so, daß in der Anflugphase eine Geschwindigkeit in positiver x - und negativer y -Richtung vorhanden ist. Bei

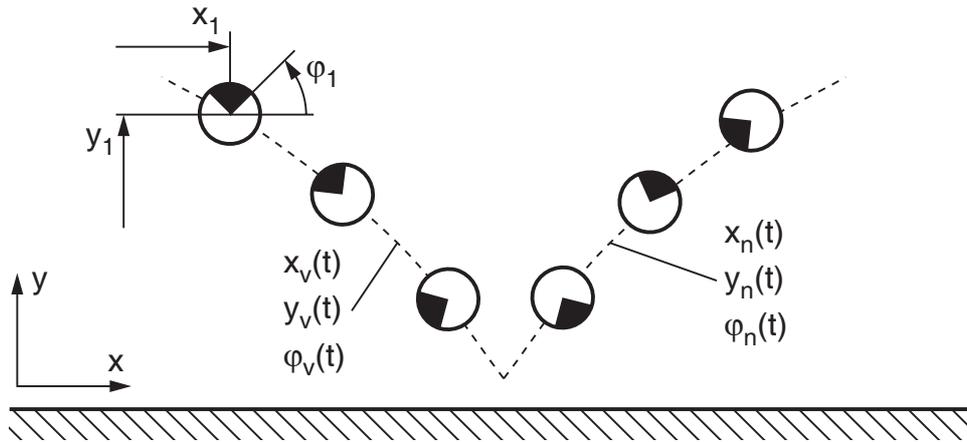


Bild 6.1: Auswertungsschema

der Berechnung der Flugbahn wird von einer idealen widerstandsfreien Wurfparabel ausgegangen, was sich bei der Auswertung der Wurfversuche bestätigt hat. Im Moment des Stoßes findet eine un stetige Umlenkung statt. Deshalb werden zwei Interpolationsfunktionen verwendet, die eine vor dem Stoß (Index v) und eine nach dem Stoß (Index n). Beschrieben werden die Bewegungen in x - und y -Richtung sowie der Drehwinkel φ . Die Modellfunktionen sind bei Gleichungsnummer (6.1) zusammengefaßt:

$$\begin{aligned} x_v(t) &= x_{v0} + v_{xv}t & x_n(t) &= x_{n0} + v_{xn}t \\ y_v(t) &= y_{v0} + v_{yv}t - \frac{1}{2}gt^2 & y_n(t) &= y_{n0} + v_{yn}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ \varphi_v(t) &= \varphi_{v0} + \omega_v t & \varphi_n(t) &= \varphi_{n0} + \omega_n t \end{aligned} \quad (6.1)$$

Diese Modellfunktionen können nun nach einem Minimierungskriterium an die Meßpunkte angepaßt werden. Die zwölf hierbei zu bestimmenden Größen sind x_{v0} , y_{v0} , φ_{v0} , x_{n0} , y_{n0} , φ_{n0} , v_{xv} , v_{yv} , ω_v , v_{xn} , v_{yn} und ω_n (siehe Abschnitt 6.1.2).

Sind diese Größen bestimmt, kann nun über den „Schnitt“ der beiden Wurfbahnanteile der Stoßzeitpunkt t_S bestimmt werden:

$$y_{v0} + v_{yv}t_S = y_{n0} + v_{yn}t_S \quad \Longrightarrow \quad t_S = \frac{y_{n0} - y_{v0}}{v_{yv} - v_{yn}} \quad (6.2)$$

Der Stoßzeitpunkt könnte auch über den Schnitt der beiden Anteile der x - oder φ -Bewegung bestimmt werden. Nachteilig ist hierbei, daß sich bei gewissen Stoßkonfigurationen die Geschwindigkeit in x - bzw. φ -Richtung nicht ändert und somit die Berechnung von t_S nicht gelingt. Aufgrund des Stoßes ist eine deutliche Änderung der Geschwindigkeiten in y -Richtung immer gewährleistet.

Auf dem Auswertefoto ist der exakte Auftreffpunkt des Wurfkörpers nicht zu erkennen. Die Wahl des Koordinatenursprungs ist deshalb auch willkürlich. Mit der Kenntnis des Stoßzeitpunktes kann die Auftreffhöhe

$$h = y_{v0} + v_{yv}t_S - \frac{1}{2}gt_S^2 \quad (6.3)$$

berechnet werden.

Wesentlich für die Auswertung der Stöße sind die Geschwindigkeiten unmittelbar vor (Index A) und nach (Index E) dem Stoß. Zusätzlich ist bei exzentrischen Stößen noch die Kenntnis des Verdrehwinkels des Wurfkörpers im Stoßmoment wichtig. Für die Bewegung in x -Richtung und die Drehgeschwindigkeit ist dies einfach, da sich die Geschwindigkeiten annahmegemäß während der Flugphasen nicht ändern. Somit gilt:

$$\begin{aligned} v_{xA} &= v_{xv} & \omega_A &= \omega_v \\ v_{xE} &= v_{xn} & \omega_E &= \omega_n \end{aligned} \quad (6.4)$$

Für die Geschwindigkeit in y -Richtung und den Körperbezugswinkel unmittelbar vor dem Stoß muß die Stoßzeit in die Gleichungen (6.1) eingesetzt werden. Die Winkel φ_A und φ_E müssen nach der Stoßannahme identisch sein. Dies bietet eine zusätzliche Kontrolle für die Richtigkeit der Messungsauswertung:

$$\begin{aligned} v_{yA} &= v_{yv} - gt_S & \varphi_A &= \varphi_{v0} + \omega_v t_S \\ v_{yE} &= v_{yn} - gt_S & \varphi_E &= \varphi_{n0} + \omega_n t_S \end{aligned} \quad (6.5)$$

Diese Geschwindigkeiten und Lagen beinhalten die gesamte Information, die bei einem Stoßversuch gemessen werden kann. Daraus können in weiteren Schritten die Relativgeschwindigkeitsänderungen, die Stoßkoeffizienten und – mit Kenntnis der Trägheitsparameter des Wurfkörpers – auch die übertragenen Impulse berechnet werden.

6.1.2 Statistische Bearbeitung und Fehlerrechnung

Generell soll zur statistischen Auswertung der Messungen ein Interpolationsverfahren auf Minimierungsbasis verwendet werden. Ziel ist einerseits eine Verbesserung des Ergebnisses durch Mittelwertbildung und andererseits die Abschätzung der Ergebnisqualität durch einen geeigneten Vergleich der Meßpunkte mit der interpolierten Funktion.

Zur Auswertung stehen 6 Messungsquadrupel $(t_i, x_i, y_i, \varphi_i)$ zur Verfügung, an die die Modellfunktionen (Gleichungen 6.1) angepaßt werden sollen. Besonders zu beachten ist hierbei:

- Die beiden Abschnitte der Funktionen müssen für alle Koordinaten aneinander passen.
- Auch die Zeitpunkte t_i können fehlerbehaftet sein.

Die Berücksichtigung dieser beiden Punkte würde die statistische Auswertung erheblich erschweren, da beide Bedingungen die lineare Ausgleichsrechnung in ein nichtlineares Ausgleichsproblem verwandeln würden.

Die Verknüpfungsbedingung wurde fallengelassen, da die Berechnung des Schnittpunktes der beiden Achsen (wie in Abschnitt 6.1.1) für die Koordinate y gut, für x und φ jedoch sehr schlecht konditioniert sein kann. Eine Verbesserung des Ergebnisses ist deshalb mit Hilfe dieser Zusatzbedingung nicht zu erwarten.

Bei der statistischen Behandlung von Meßwerten sind in der Regel die Funktionswerte über bestimmten Stützwerten aufgetragen. Im vorliegenden Fall sind es Lagen und Winkel über der Zeit. Hierbei ist grundsätzlich zu klären, ob nur die Funktionswerte oder auch die Lage der Stützstellen fehlerbehaftet sind. Das Meßprinzip, das für die Wurfmessungen verwendet wird, kann grundsätzlich auch Fehler in den Stützstellen enthalten. Dieses Phänomen tritt ein, wenn die Blitze nicht zum exakt gewünschten Zeitpunkt stattfinden. Die Formulierung der Ausgleichsrechnung ist auch für Meßreihen mit gestreuten Stützwerten durchführbar, jedoch entstehen keine linearen Gleichungen mehr, und die Berechnung von Fehlerschranken ist wesentlich aufwendiger.

Ein fehlerhafter Blitz in einem Wurfbahnabschnitt würde zu statistischen Fehlern in allen drei Interpolationskurven für x , y und φ führen. Bei den durchgeführten 600 Experimenten wurden insgesamt 2 Versuche identifiziert, bei denen offensichtlich ein Blitz zum falschen Zeitpunkt auftrat. Diese Versuche wurden ausgesondert. Auf eine statistische Berücksichtigung von Blitzfehlern wurde angesichts der scheinbar hohen Zuverlässigkeit der Blitzzeitpunkte verzichtet.

Somit sind für jeden Stoß sechs unabhängige Interpolationsaufgaben zu lösen: Die Ausgleichsgeraden für x , y und φ , jeweils vor und nach dem Stoß. Jede Ausgleichsgerade wird durch den Achsenabschnitt und die Steigung charakterisiert. Da die Zeitpunkte als genau angenommen werden können, wird die Bahnkrümmung infolge der Erdbeschleunigung durch die Transformation

$$y_i^* = y_i + \frac{1}{2}g((i-1)T_B)^2 \quad (6.6)$$

mit der Erdbeschleunigung g und der Blitzfolgezeit T_B herausgerechnet.

Die Interpolationsaufgabe ist am Beispiel der y -Werte in Bild 6.2 dargestellt, gilt aber genauso für x und φ .

Die Werte y_1 bis y_3 wurden vor dem Stoß aufgenommen, die Werte y_4 bis y_6 danach. Die Achsenabschnitte der beiden Interpolationsgeraden werden mit a_v (vorher) und a_n (nachher) bezeichnet, die Steigungen mit b_v und b_n . Diese Größen entsprechen, im Fall der y -Werte den Parametern y_{v0} etc. in Gleichung (6.1). Die Interpolationsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} a_v &= \frac{1}{6}(5y_1 + 2y_2 - y_3) & a_n &= \frac{1}{3}(7y_4 + y_5 - 5y_6) \\ b_v &= \frac{1}{2T_B}(y_3 - y_1) & b_n &= \frac{1}{2T_B}(y_6 - y_4) \end{aligned} \quad (6.7)$$

In Bild 6.2 ist angedeutet, daß die Werte vor dem Stoß in diesem fiktiven Beispiel wesentlich stärker streuen als nach dem Stoß. Es müssen folglich Meß- oder Auswer-

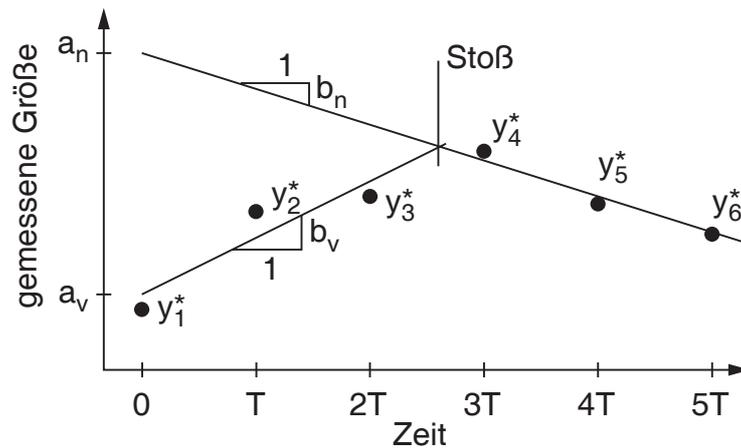


Bild 6.2: Interpolation und Ausgleich der Messungen

tefehler passiert sein. Diese Tatsache kann man bei redundanten Messungen dadurch erfassen, daß man die Streuung der Interpolationswerte berechnet [65].

$$\begin{aligned} \sigma_{a_v}^2 &= \frac{5}{36}(y_1 - 2y_2 + y_3)^2 & \sigma_{a_n}^2 &= \frac{25}{18}(y_4 - 2y_5 + y_6)^2 \\ \sigma_{b_v}^2 &= \frac{1}{12T_B^2}(y_1 - 2y_2 + y_3)^2 & \sigma_{b_n}^2 &= \frac{1}{12T_B^2}(y_4 - 2y_5 + y_6)^2 \end{aligned} \quad (6.8)$$

Diese Größen bedürfen einer gewissen Interpretation. Es wird davon ausgegangen, daß die Meßfehler normalverteilt sind. Das heißt, die Wahrscheinlichkeit, daß ein Meßwert um einen gewissen Betrag von der „physikalischen Realität“ abweicht, wird durch die Normalverteilung beschrieben. Dies ist eine – wenn auch weit verbreitete – Annahme, die auf einfache Gleichungen führt. Wichtige Größe in diesem Zusammenhang ist die Streuung σ . Sind Messungen „schlecht“ zeigen sie eine große Streuung. Es ist davon auszugehen, daß auch aus ihnen abgeleitete Größen keine hohe Qualität haben, was sich seinerseits in einer großen Streuung dieser Größen ausdrückt.

Die Streuung der Messung einer Belichtung bei den in dieser Arbeit durchgeführten Versuchen ist unbekannt. Da aber in der Regel drei Bilder pro Wurfbahnabschnitt gemacht wurden, kann nach der Interpolation über die Abweichung der Meßpunkte von der Interpolationsgeraden eine Qualitätsaussage gemacht werden. Die Meßwerte y_1 bis y_3 in Bild 6.2 zeigen eine deutliche Abweichung von der Geraden. Das Vertrauen in die ermittelten Werte von a_v und b_v ist demnach viel geringer, als in a_n und b_n , die in diesem Beispiel offensichtlich mit besseren Messungen bestimmt wurden.

Die mathematische Formulierung dieser Erfahrungsaussage steckt in den Gleichungen (6.8). Liegen die Meßwerte auf einer Geraden, verschwindet im Grenzfalle der Klammerausdruck in jedem Term, und die Ergebnisse haben keine Streuung. Weichen sie stärker davon ab, wird auch die Streuung größer.

Mit der Streuung kann man folgende Aussage machen: Die Wahrscheinlichkeit, daß der „physikalisch echte“ Wert im Bereich $\pm\sigma$ um den gemessenen oder abgeleiteten Wert liegt, beträgt 67%, im Bereich $\pm 2\sigma$ 95%.

Die Fortpflanzung der Streuung auf einen abgeleiteten Wert geschieht wie folgt: Ist $c = f(a_1, \dots, a_n)$ eine von n a_i mit bekannten σ_{a_i} abhängige Größe, gilt

$$\sigma_c = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial a_i}\right)^2 \sigma_{a_i}^2}. \quad (6.9)$$

Auch dieser Beziehung liegt die Annahme normalverteilter Fehler zugrunde. Führt man diese Streuungsfortpflanzung mehrfach hintereinander aus, liegen aber nur wenige Basisgrößen zugrunde, so kann es passieren, daß die Streuung zu hoch geschätzt wird, da sich die Fehler ein und derselben Größe in fortgesetzter Verknüpfung eliminieren können, die Streuungsberechnung diese Auslöschungseffekte jedoch nicht berücksichtigt und das Ergebnis schlechter bewertet wird, als es tatsächlich ist. Dies wird hier in Kauf genommen. Dementsprechend sind die weiter abgeleiteten Größen wie Impulse und Reibwerte auch mit größeren Streuungen behaftet.

In allen Ergebnisdiagrammen in den Abschnitten 6.2 und 6.3 sind zu allen Meßergebnissen Streuungsbalken mit dem Bereich $\pm\sigma$ eingetragen.

Zusätzlich zu den im Abschnitt 6.1.1 bereits dargestellten Größen wurden die folgenden weiteren Auswerteschritte durchgeführt (Die Streuungsfortpflanzung gemäß Gleichung (6.9) ist hier aus Platzgründen nicht dargestellt):

Dimensionslose Geschwindigkeiten:

$$\gamma = -\frac{v_{xA}}{v_{yA}} \quad \gamma_{TE} = -\frac{v_{xE}}{v_{yA}} \quad (6.10)$$

Normaler Stoßkoeffizient:

$$\varepsilon_N = -\frac{v_{yE}}{v_{yA}} \quad (6.11)$$

Tangentialimpuls (Mittelwertbildung):

$$\Lambda_T = \frac{1}{2} \left(m(v_{xE} - v_{xA}) + \frac{J}{r}(\omega_E - \omega_A) \right) \quad (6.12)$$

Dimensionslose Impulse:

$$\Lambda_N^* = 1 + \varepsilon_N \quad \Lambda_T^* = -\frac{\Lambda_T}{mv_{yA}} \quad (6.13)$$

Mittlere Tangentialgeschwindigkeit:

$$v_{mitt} = \frac{1}{2}(v_{xE} + v_{xA}) \quad (6.14)$$

Mittlerer Reibwert:

$$\mu^* = \frac{\Lambda_T^*}{\Lambda_N^*} \quad (6.15)$$

6.2 Zentrale Stöße

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der zentralen Stoßversuche dargestellt. Es wurden insgesamt vier verschiedene Wurfkörper verwendet, die mit unterschiedlichen Kontaktpartnern in Kollision gebracht wurden. In Tabelle 6.1 sind die Wurfkörper mit ihren wichtigsten Eigenschaften zusammengestellt.

Tabelle 6.1: Eigenschaften der verwendeten rotationssymmetrischen Wurfkörper

Material	Radius [mm]	Masse [g]	Trägheit [kgmm ²]	Partner
PVC	27	58	20	Melamin
Teflon	27	90	30	Melamin
Gummi ^a	30	66	25	Melamin
Stahl ^b	30	142	85.7	Stahl, Alu

^a Scheibe, aus einem Gummiball herausgeschnitten

^b Stahlring auf einem PVC-Grundkörper

Die Ergebnisse werden für alle Kontaktpartner getrennt, aber in gleicher Form dargestellt. Abgesehen von Sonderdarstellungen, die an der Stelle ihres Auftretens erläutert werden, werden folgende Darstellungsweisen gewählt:

1. Die ermittelte Stoßzahl ε_N als Betrag des Verhältnis von \dot{g}_{NE} zu \dot{g}_{NA} wird dargestellt über der Normalgeschwindigkeit \dot{g}_{NA} vor dem Stoß. Ziel dieser Darstellung ist es, eine gegebenenfalls vorhandene Abhängigkeit der Stoßzahl von der Stoßgeschwindigkeit zu erkennen. Es ist jeweils eine Trendlinie eingezeichnet, die mit einer Fehlerbetrags-Minimierung gebildet wurde (Bilder A.1, A.6, A.7 und A.9).
2. Die dimensionslose tangential Relativgeschwindigkeit γ_{TE} nach dem Stoß wird über der tangentialen Relativgeschwindigkeit γ vor dem Stoß aufgetragen. Prototyp dieser Diagramme ist Bild 4.4. Es ist ein Schlüsseldiagramm, mit dem die Vorhersagbarkeit der Stoßexperimente durch das Impulsstoßmodell gezeigt werden kann (Bilder 6.3, A.3, 6.5, A.8, 6.9, A.10 und 6.12). Mit der Kenntnis der Stoßzahl ε_N kann man aus diesem Diagramm auch μ und ε_T identifizieren. Die daraus resultierenden Vergleichskennlinien sind ebenfalls eingezeichnet.
3. Der dimensionslose tangential Gesamtimpuls Λ_N^* wird aufgetragen über der tangential Relativgeschwindigkeit γ . Auch dieses Diagramm eignet sich gut, die Gültigkeit des Stoßgesetzes zu verifizieren. Prototyp ist das Diagramm in Bild 4.5 (Bilder A.2, A.4, 6.6, 6.10 und A.11).
4. Das Verhältnis von Tangentialimpuls zu Normalimpuls ist ein Maß für die Reibungsverhältnisse während des Stoßes. Es wird über der mittleren Tangentialgeschwindigkeit (v_{mitt}) aufgetragen (Bilder 6.4, A.5, 6.7, 6.11 und A.12).

Da die Darstellung aller Bilder im Text zuviel Platz benötigen würde und dabei die flüssige Lesbarkeit des Textes verloren ginge, sind nur die wichtigsten Diagramme im Text dargestellt. Die weiteren befinden sich im Anhang A.

Im Anschluß an die Darstellung der Ergebnisse wird noch das Phänomen von Reibwerten größer als eins diskutiert.

6.2.1 Stoßversuche mit dem PVC-Wurfkörper

Die Abhängigkeit der Stoßzahl ε_N von der Stoßgeschwindigkeit ist beim Stoßpaar PVC-Melamin nur gering ausgeprägt (Bild A.1).

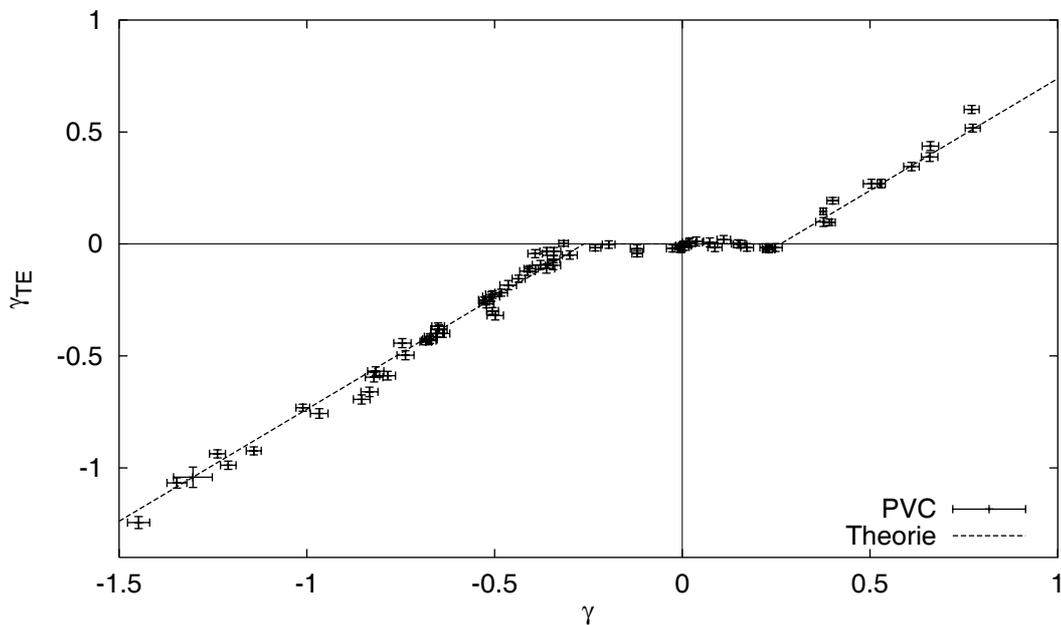


Bild 6.3: Tangentiale Relativgeschwindigkeit PVC

Die Tangentialgeschwindigkeiten im Bild 6.3 zeigen in ausgeprägter Weise das Verhalten eines tangentialplastischen Stoßes mit $\varepsilon_T = 0$. Der zweite und der vierte Quadrant sind leer, es findet keine Umkehrung der tangentialen Relativgeschwindigkeit statt. Im Bereich um $\gamma = 0$ befindet sich der Haftbereich. Bei Stößen in diesem Anfangsgeschwindigkeitsbereich reicht die Reibkraft aus, um den Körper im Stoßkontakt so abzubremesen, daß am Stoßende im Kontaktpunkt die Rollbedingung gilt. Ist die Relativgeschwindigkeit vor dem Stoß groß genug, wird diese nur verringert und der Körper verläßt den Kontakt gleitend. Die Ergebnisse der Versuche, bei denen dieses Phänomen auftrat, liegen auf den Geraden, die mit der Steigung eins durch den ersten und dritten Quadranten verlaufen. Die Vergleichskurve wurde mit den Stoßparametern $\varepsilon_N = 0.68$, $\varepsilon_T = 0.0$ und $\mu = 0.05$ berechnet. Diesen Vergleichsgeraden liegt die Annahme zugrunde, daß für alle Stöße die gleichen Stoßparameter gelten.

Den normalen Stoßkoeffizienten kann man aus Bild A.1 gewinnen. Daß $\varepsilon_T = 0$ gilt, erkennt man daran, daß die Punkte im Haftbereich auf der γ -Achse in Bild 6.3 liegen.

Man weiß nun, daß die Stöße mit ständigem Gleiten immer auf Geraden mit der Steigung eins liegen müssen. Legt man durch diese Punkte eine Ausgleichsgerade, kann man deren Schnittpunkt mit der γ -Achse bestimmen und dort γ_{grenz} ablesen, das für den positiven und den negativen Ast den gleichen Betrag haben sollte. Aus Tabelle 4.1 entnimmt man $\gamma_{grenz} = -\mu\Gamma(1 + \varepsilon_N)$. ε_N ist bereits bekannt, Γ eine reine Massen- und Geometriegröße, die für den Wurfkörper feststeht. Somit läßt sich aus der Bedingung für γ_{grenz} der Reibwert μ bestimmen. Für den PVC-Wurfkörper gilt $\Gamma = 3.11$. Mit den Ausgleichsgeraden wurde $\gamma_{grenz} \approx 0.26$ bestimmt, daraus folgt $\mu = 0.05$. Inwieweit ein nicht für alle Versuche gleiches μ diese Identifikation verfälschen kann wird im Abschnitt 6.2.4 gezeigt.

In Bild A.2 sind die tangentialen Stoßimpulse Λ_T^* über der Relativgeschwindigkeit γ aufgetragen. Da der dimensionslose Normalimpuls immer $\Lambda_N^* = 1 + \varepsilon_N$ beträgt, stellen der linke und der rechte horizontale Ast den Tangentialimpuls an der Haftgrenze dar. Im Übergangsbereich wird nur der Teil des übertragbaren Impulses ausgeschöpft, der tatsächlich benötigt wird um Haften zu erreichen.

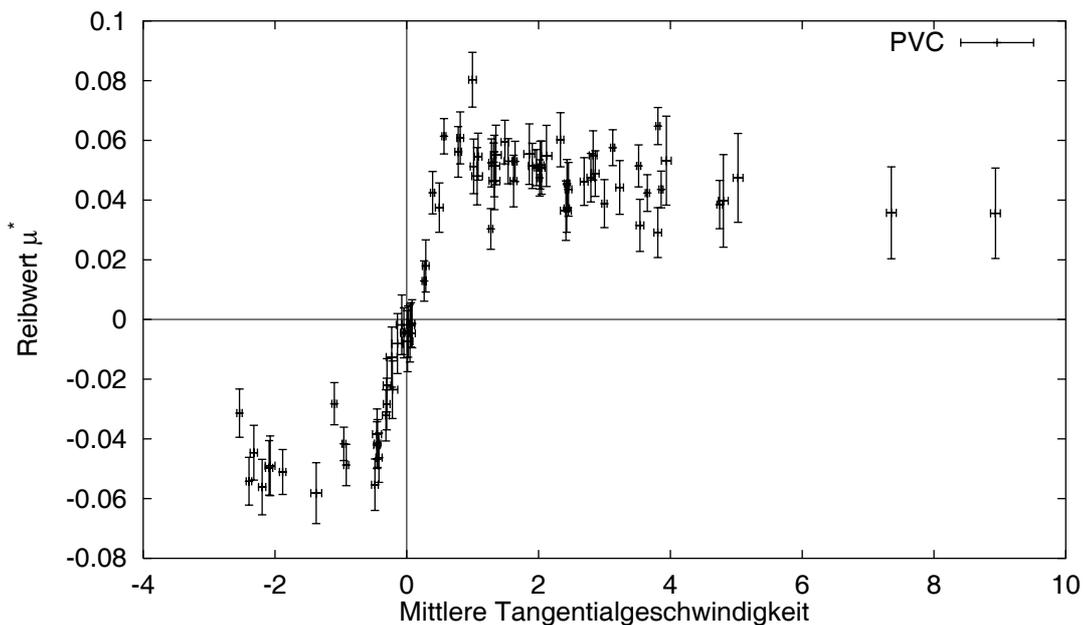


Bild 6.4: Reibverhältnisse PVC

Der Grund für die zunehmende Abweichung der gemessenen Impulse von den theoretisch berechneten für größere Geschwindigkeiten γ wird beim Blick auf Bild 6.4 erklärbar: Dort ist das Verhältnis des Tangential- zum Normalimpuls aufgetragen. Dieses Verhältnis ist ein Maß für die Reibverhältnisse, die während des Stoßes herrschen und wird mit μ^* bezeichnet. Aufgetragen ist μ^* über der mittleren tangential-

len Relativgeschwindigkeit. Bei geringen Geschwindigkeiten, die zu Haften führen, schwankt μ^* zwischen einem Minimal- und einem Maximalwert, der dem Haftreibungwert entspricht. Im Bereich des Gleitens ist zu beobachten, daß μ^* bei zunehmender mittlerer Relativgeschwindigkeit kleiner wird. Hier spiegelt sich eine klassische Reibkennlinie wider, die bei zunehmender Reibgeschwindigkeit einen zunächst abfallenden Reibkoeffizienten zeigt.

Zusammenfassend kann man folgendes feststellen:

- Der Kontakt PVC-Melamin zeigt nur eine geringe Abhängigkeit der normalen Stoßzahl ε_N von der Kollisionsgeschwindigkeit.
- Es treten keine tangentialreversiblen Effekte auf.
- Der Haftreibungkoeffizient liegt bei ca. 0.05, bei höheren Geschwindigkeiten sinkt er bis auf 0.04 ab.
- Die Stöße lassen sich mit dem Impulsstoßgesetz gut vorhersagen.

6.2.2 Stoßversuche mit dem Teflon-Wurfkörper

Mit dem Teflon-Wurfkörper wurden alle Stöße mit der gleichen normalen Kollisionsgeschwindigkeit durchgeführt. Deshalb ist das Stoßzahl-Diagramm nicht aussagekräftig und es wird auf die Darstellung verzichtet. Der Stoßkoeffizient ergibt sich zu $\varepsilon_N = 0.68$. Aus dem Relativgeschwindigkeits-Diagramm (Bild A.3) läßt sich, analog zum Verhalten von PVC ein komplett tangentialirreversibler Stoß mit $\mu = 0.06$ ablesen, wobei aufgrund der geringen Zahl von Messungen hier eine große Unsicherheit verbleibt. Die Tangentialimpulse verhalten sich ebenfalls so, wie es bei den identifizierten Stoßkoeffizienten zu erwarten ist (Bild A.4). Wie man in Bild A.5 erkennen kann, hat auch die Paarung Teflon-Melamin eine fallende Reibkennlinie.

Zusammenfassend kann man feststellen, daß sich die Wurfkörper aus PVC und Teflon bis auf kleine Schwankungen in den Stoßkoeffizienten identisch verhalten. Es findet bei diesen Paarungen ein tangentialplastischer Stoß statt. Dieser ist hier auch identisch zum reinen Reibstoß.

6.2.3 Stoßversuche mit dem Gummi-Wurfkörper

Wie auch schon im Kapitel 5 beschrieben, war eines der Hauptziele dieser Arbeit, tangentialreversible Stöße zu untersuchen. Von vornherein war bekannt, daß diese Art von Stößen bei Gummikörpern auftreten kann.

Zunächst ist in Bild A.6 die Abhängigkeit des Stoßkoeffizienten ε_N von der normalen Stoßgeschwindigkeit dargestellt. Hier ist ein deutlicher Trend zu erkennen: Die Stoßzahl verringert sich von 0.8 bei geringen bis zu 0.6 bei großen Stoßgeschwindigkeiten. Die Ursache dafür ist, daß der Gummi des Wurfkörpers bei schnellen

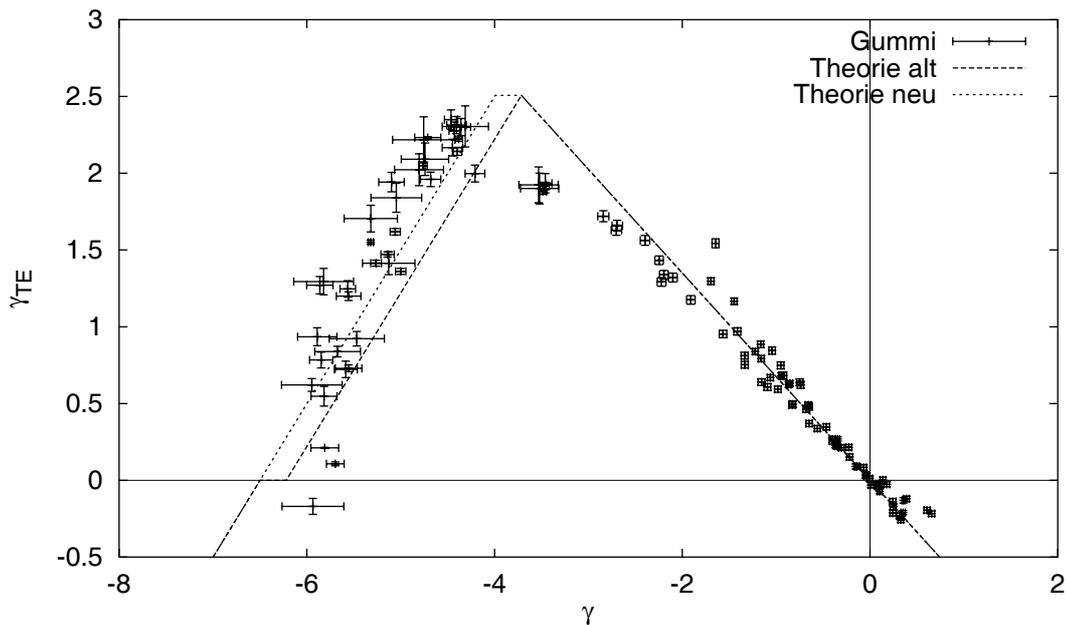


Bild 6.5: Tangentiale Relativgeschwindigkeit Gummi

Kollisionen stärker zusammengedrückt wird und dadurch eine größere Abplattungsfläche entsteht. Dadurch kann mehr Energie in innerer Reibung dissipiert werden. Als Wert zur Berechnung der Vergleichskurven in den weiteren Diagrammen wird $\varepsilon_N = 0.75$ gewählt.

In Bild 6.5 ist die tangentielle Reversibilität deutlich erkennbar. Von wenigen Ausnahmen abgesehen, wurden nur Stöße mit negativer Relativgeschwindigkeit vor dem Stoß durchgeführt. Die tangentielle Expansionsgeschwindigkeit zeigt immer einen Vorzeichenwechsel. Den Stoßkoeffizienten ε_T kann man in der Umgebung des Ursprungs bestimmen, dort befindet sich der Bereich A gemäß Tabelle 4.1. Man legt eine Ausgleichsgerade durch die Meßpunkte und bestimmt deren Steigung, die gemäß Stoßmodell $-\varepsilon_N \varepsilon_T$ betragen muß. Da ε_N bereits bekannt ist, kann $\varepsilon_T = 0.9$ bestimmt werden. Zur Identifikation von μ eignet sich der Schnittpunkt $\gamma_{Schnitt}$ einer Ausgleichsgeraden für die weiter links liegenden Punkte mit der γ -Achse. Dieser liegt immer im Bereich des Falls B2. Aus der Gleichung für γ_{TE} in diesem Bereich ergibt sich $\mu = \gamma_{Schnitt}/(\Gamma(1 + \varepsilon_N))$. Für $\gamma_{Schnitt} = 6.5$ kann man mit $\Gamma = 3.376$ für den Gummwürfelkörper $\mu \approx 1.1$ berechnen.

Der auffällige Unterschied in der Größe der Fehlerbalken für verschiedene Werte von γ läßt sich wie folgt erklären: Die Würfel mit besonders großer Relativgeschwindigkeit (weit links in Bild 6.5) wurden mit sehr geringer Anfluggeschwindigkeit auf kurzem Anflugweg mit hoher Blitzfrequenz aufgenommen. Dadurch erhöhen sich die statistischen Fehler.

Im Bild 6.5, wie auch im Bild 6.6 sind jeweils zwei Vergleichskurven zu theoretischen Modellen eingetragen. Die mit „Theorie alt“ bezeichneten Kurven entstehen, wenn man das Stoßmodell aus [22] verwendet. Die Kurven „Theorie neu“ entstehen, wenn

man das Stoßgesetz aus Abschnitt 3.6 verwendet, das in Gleichung (3.26) die Größe \dot{g}_{TE0} einführt. Dadurch verschwindet der kurze horizontale Abschnitt in der Vergleichskurve bei $\gamma_{TE} = 0$. Bei einem ε_T von ungefähr eins fällt dieser Unterschied kaum auf, in den Abschnitten, in denen die Ergebnisse für den Stahlwurfkörper vorgestellt werden (6.2.4 und 6.2.5), ist er deutlicher.

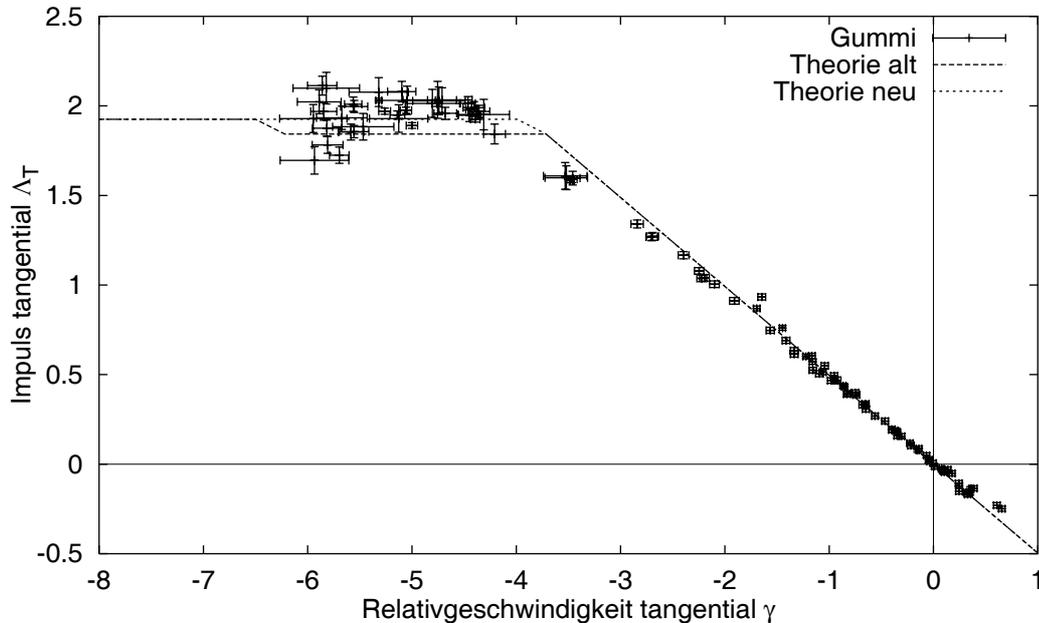


Bild 6.6: Tangentialimpuls Gummi

Die Tangentialimpulse (Bild 6.6) zeigen ebenfalls eine gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung. Auch hier scheint die „Theorie neu“ die Versuchsergebnisse besser erklären zu können.

Ein besonders beachtenswertes Ergebnis ist in Bild 6.7 dargestellt: Der Reibkoeffizient μ^* erreicht Werte, die größer als eins, bis hin zu 1.2 sein können. Die Oberfläche des Stoßkörpers ist so rau, daß derartige Werte auch plausibel erscheinen. Der Beweis in Abschnitt 6.2.6 zeigt, daß damit auch während des Stoßes ein aktueller Reibwert dieser Größe geherrscht haben muß.

Zusammenfassend kann zu den Stoßversuchen mit dem Gummiwurfkörper folgendes gesagt werden:

- Die Stoßzahl in Normalenrichtung hängt in stärkerem Maß von der Kollisionsgeschwindigkeit ab, als es bei starren Wurfkörpern der Fall ist.
- Es zeigt sich ein ausgeprägtes tangentialreversibles Verhalten mit $\varepsilon_T = 0.9$.
- Es treten bei dem verwendeten Stoßmaterial Reibkoeffizienten von $\mu > 1$ auf.
- Das Impulsstoßgesetz kann den Stoß gut nachbilden. Die bessere Übereinstimmung durch die Modifikation mit \dot{g}_{TE0} ist hier erkennbar.

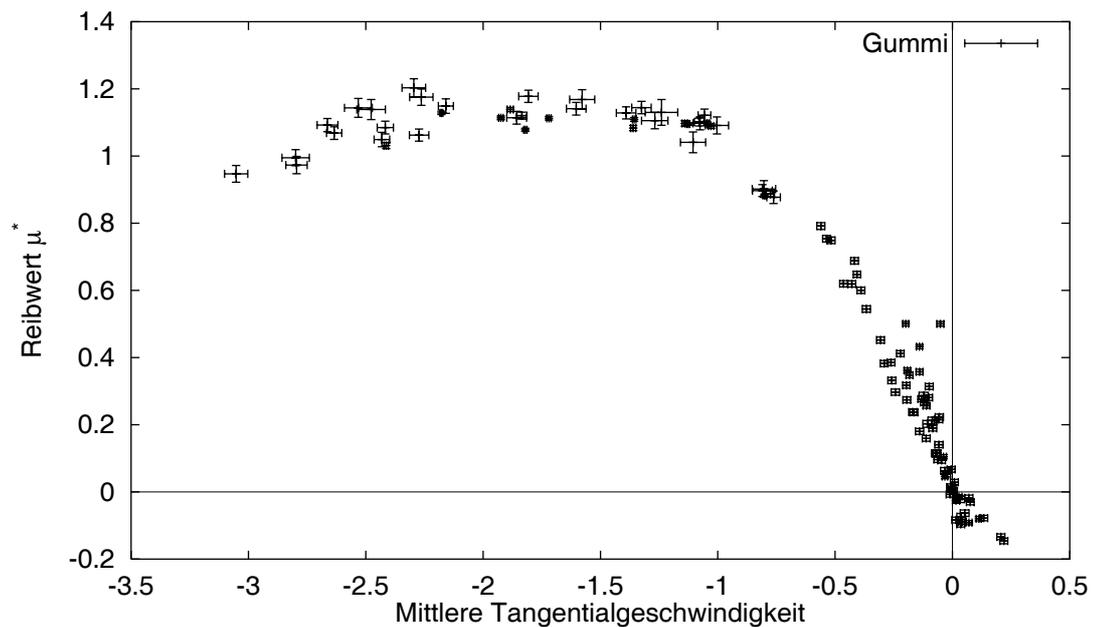


Bild 6.7: Reibverhältnisse Gummi

Zum Abschluß dieses Abschnitts soll noch ein Beispiel dafür gezeigt werden, welche eigenartigen Flugbahnen auftreten können, wenn Gummikörper Stöße mit starken tangentialreversiblen Effekten durchführen. Ein spektakuläres Beispiel ist in Bild 6.8 (Negativ) dargestellt.

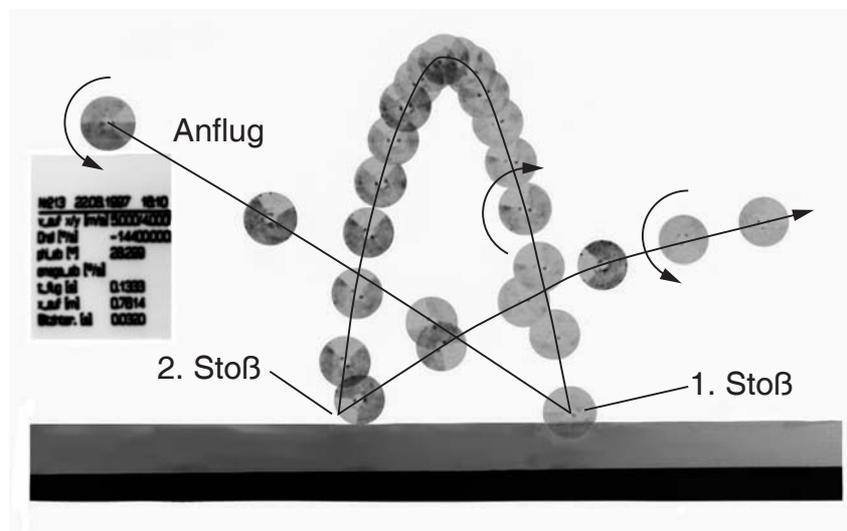


Bild 6.8: Flugbahn des Gummikörpers bei extremer negativer Relativgeschwindigkeit vor dem Stoß.

Der Wurfkörper fliegt von links heran und hat im Stoßmoment eine Schwerpunktschwindigkeit von 5 m/s horizontal und 4 m/s senkrecht nach unten. Die Winkel-

geschwindigkeit des Körpers beträgt 40 U/s im Gegenuhrzeigersinn. Damit ergibt sich eine tangentiale Relativgeschwindigkeit im Kontakt von ca. 12.5 m/s.

Diese Ausgangskonfiguration führt im ersten Stoß zu zwei Konsequenzen: Erstens kehrt sich die Richtung der Schwerpunktsbewegung um, der Körper fliegt in Wurfrichtung zurück und zweitens rotiert der Körper – bedingt durch den tangentialreversiblen Stoß – danach in entgegengesetzte Richtung.

Im zweiten Stoß kehren sich die Verhältnisse erneut um: Bedingt durch den großen Drall fliegt der Körper wieder in die ursprüngliche horizontale Flugrichtung und auch die Rotation findet wieder im Uhrzeigersinn statt. Nach einer langgestreckten Parabelflugbahn könnte erneut ein derartiges Stoßpaar auftreten.

6.2.4 Stoßversuche Stahlwurfkörper auf Stahl

Nach den etwas „exotischen“ Materialpaarungen in den Abschnitten 6.2.1, 6.2.2 und 6.2.3 sollen zwei technisch relevante Stoßpartner untersucht werden: Im folgenden der Stoß eines Stahlwurfkörpers auf eine Stahlplatte und im Abschnitt 6.2.5 der Stoß desselben Körpers auf eine Aluminiumplatte.

Auch beim Kontakt Stahl-Stahl zeigt sich eine Abhängigkeit der Stoßzahl ε_N von der Kollisionsgeschwindigkeit; sie schwankt zwischen 0.7 und 0.8 (Bild A.7). Für die Vergleichsrechnungen wird $\varepsilon_N = 0.75$ verwendet.

Die tangentiale Relativgeschwindigkeit ist in zwei Diagrammen dargestellt: In Bild A.8 ist der gesamte Verlauf zu sehen und in Bild 6.9 eine Ausschnittvergrößerung.

Aus der Steigung in der Nähe des Ursprungs kann man $\varepsilon_T = 0.25$ identifizieren. Der Schnittpunkt der Geraden für kleine Gleitgeschwindigkeiten ermöglicht mit $\Gamma = 2.49$ für den Stahlwurfkörper die Bestimmung von $\mu = 0.14$.

In Bild 6.9 ist im Bereich $-0.6 < \gamma < -0.4$ erkennbar, daß sich das modifizierte Modell mit \dot{g}_{TE0} dem Modell ohne diese Verschiebung der Kennlinie als überlegen zeigt. Ein Bereich der tangentialen Relativgeschwindigkeit vor dem Stoß, bei dem reines Haften herrscht, eingeschlossen von einem tangentialreversiblen und einem reinen Reibbereich, ist auch physikalisch unanschaulich.

Die Darstellung der Tangentialimpulse, dargestellt in Bild 6.10, zeigt im Bereich A (vgl. Tabelle 4.1) eine gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung.

Im Bereich des reinen Gleitens wird die Übereinstimmung bei zunehmender Relativgeschwindigkeit schlechter. Die Ursache wird bei der Betrachtung von Bild 6.11 deutlich: Hier wird eine Reibkurve $\mu^*(v_{rel})$ sichtbar. Der Reibwert schwankt im Gleitbereich zwischen 0.14 für kleine und 0.08 für große Relativgeschwindigkeiten. Da die Vergleichskurven immer mit einem konstanten $\mu = 0.14$ berechnet wurden, ist die hiermit Diskrepanz leicht zu erklären.

Zusammenfassend kann zu den Stößen Stahl-Stahl gesagt werden:

- Es ist eine geringe Abhängigkeit der Stoßzahl ε_N von der Kollisionsgeschwindigkeit gegeben.

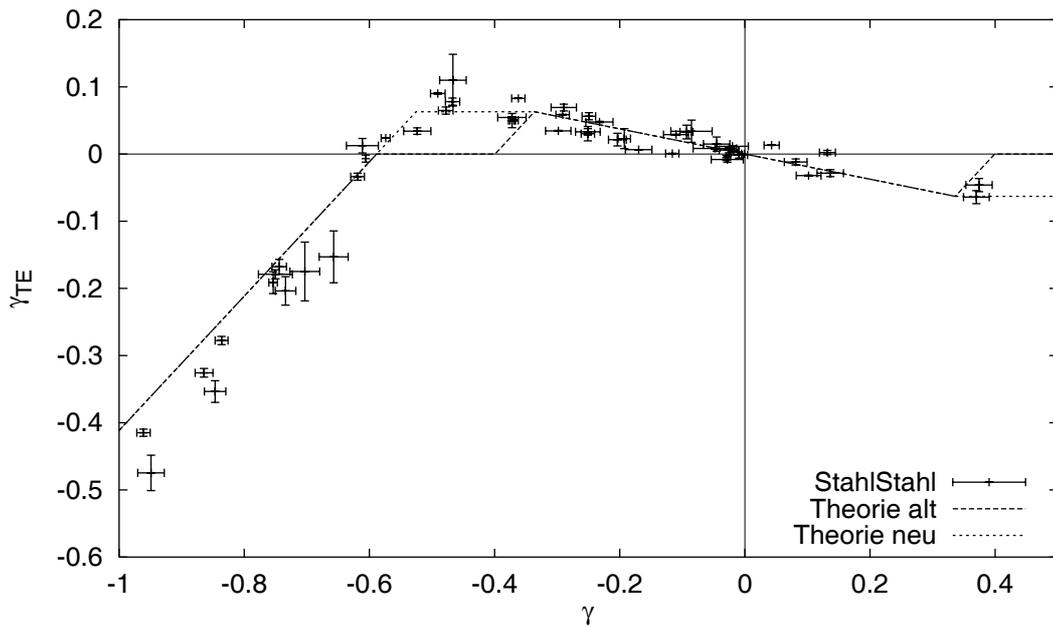


Bild 6.9: Tangentiale Relativgeschwindigkeit Stahl-Stahl, Teilansicht

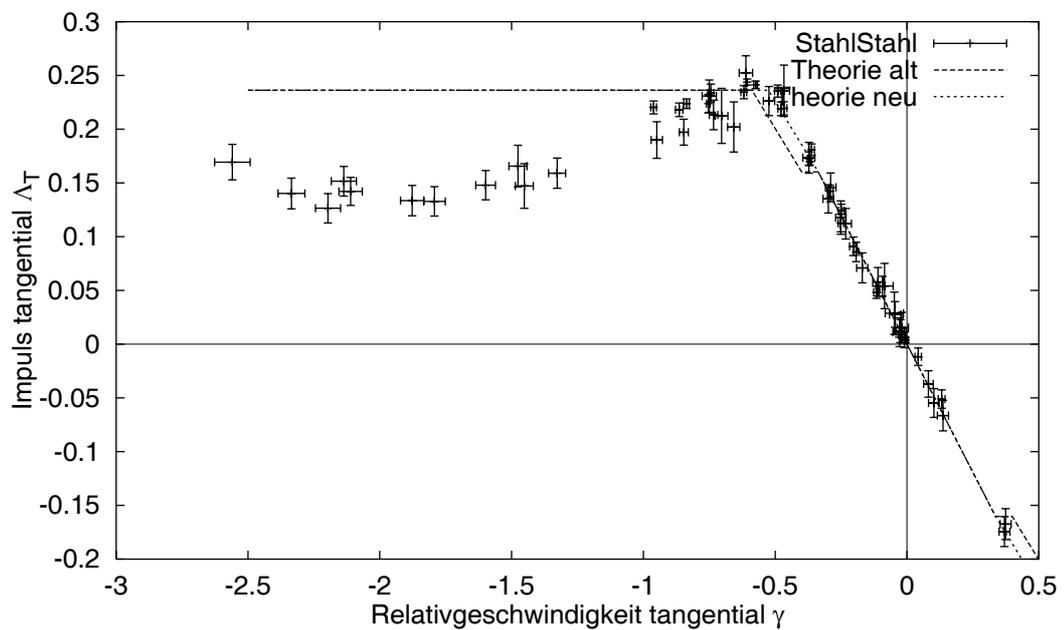


Bild 6.10: Tangentialimpuls Stahl-Stahl

- Auch beim Kontakt Stahl-Stahl treten tangentialreversible Effekte auf!
- Bei diesem Stoß muß die starke Abhängigkeit des Reibwertes μ von der tangentialen Relativgeschwindigkeit berücksichtigt werden.

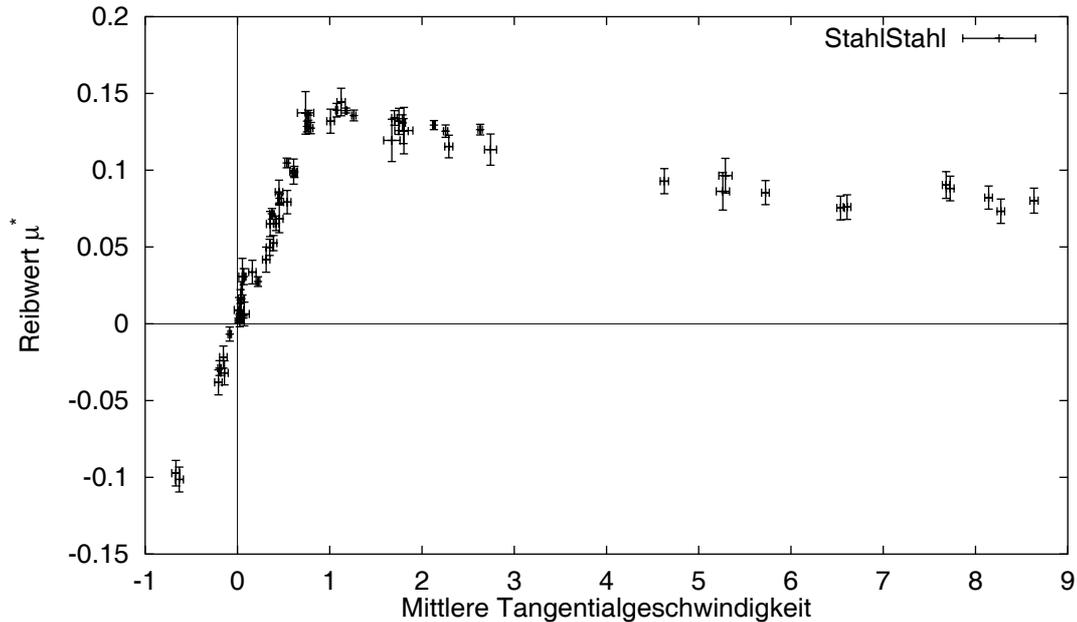


Bild 6.11: Reibverhältnisse Stahl-Stahl

6.2.5 Stoßversuche Stahlwurfkörper auf Aluminium

Der Stoß Stahl-Aluminium stellt ebenfalls eine technisch relevante Materialpaarung dar. Zur Durchführung dieser Stöße wurde der Stahlwurfkörper auf eine Aluminiumplatte geworfen.

Die Abhängigkeit von ε_N von der Kollisionsgeschwindigkeit ist nur gering ausgeprägt (Bild A.9). Als Mittelwert zur Erzeugung der Vergleichskurven wurde $\varepsilon_N = 0.75$ gewählt.

Die tangentielle Relativgeschwindigkeit γ_{TE} ist in zwei Bildern dargestellt: in einer Ausschnittvergrößerung (Bild 6.12) und einer Gesamtansicht (Bild A.10). Aus der Steigung der γ_{TE} -Kurve identifiziert man $\varepsilon_T = 0.25$ und $\mu = 0.18$. In Bild 6.12 ist deutlich zu erkennen, daß das in dieser Arbeit vorgestellte Impulsstoßgesetz auch den Übergangsbereich vom reversiblen Stoß zu reinem Gleiten $-0.8 < \gamma < -0.4$ gut beschreiben kann.

Die zunehmende Diskrepanz zwischen Rechnung und Messung für größere Relativgeschwindigkeiten γ in den Bildern A.10 und A.11 liegt auch bei dieser Materialpaarung in der fallenden Reibkennlinie begründet. In Bild A.12 zeigt sich, daß μ^* zwischen 0.2 an der Haftgrenze und 0.1 bei großen Gleitgeschwindigkeiten schwanken kann.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß sich die Stöße des Stahlwurfkörpers auf eine Aluminiumplatte ähnlich verhalten wie die auf eine Stahlplatte. Die normalen und tangentialen Stoßkoeffizienten sind gleich, der Reibwert um ca. 30% höher. Die Übereinstimmung Rechnung-Messung ist gut und kann durch Einführung eines geschwindigkeitsabhängigen μ noch verbessert werden.

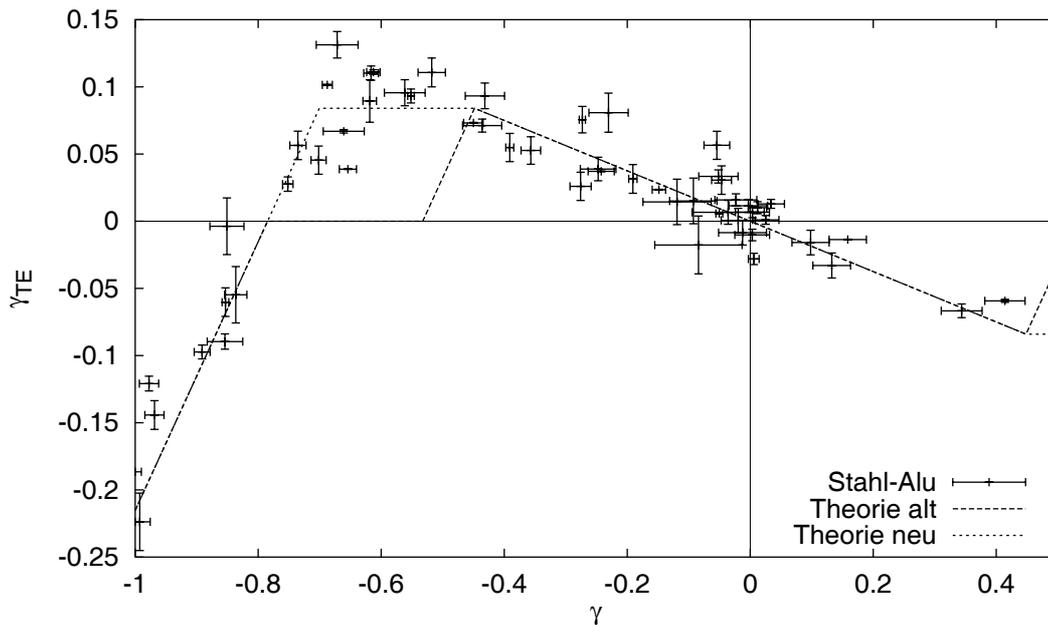


Bild 6.12: Tangentiale Relativgeschwindigkeit Stahl-Aluminium, Teilansicht

6.2.6 Der Reibwert

Bei den Versuchen mit dem Gummiwurfkörper wurden Impulsverhältnisse

$$\left| \frac{\Lambda_T^*}{\Lambda_N^*} \right| = |\mu^*| > 1 \quad (6.16)$$

gemessen. An dieser Stelle soll geklärt werden, welche Rückschlüsse damit auf den Reibkoeffizienten μ während des Stoßes gezogen werden können. Dazu wird die Reibfunktion $\mu_T(t) = \lambda_T(t)/\lambda_N(t)$ definiert, die den aktuellen Reibbeiwert während des Stoßes beschreibt. Herrscht zu einem Zeitpunkt t Gleiten, ist $\mu_T(t) = \pm\mu(v_{rel})$. Während Haftphasen wird $-\mu_0 < \mu_t(t) < \mu_0$ gelten, je nach der Größe der Zwangskraft $\lambda_T(t)$.

Die Stoßimpulse Λ^* stellen die Integrale der Kräfte $\lambda(t)$ über der Stoßzeit t dar. Somit gilt:

$$\int_T \mu_T(t) \lambda_N(t) dt = \int_T \lambda_T(t) dt = \Lambda_T = \mu^* \Lambda_N = \mu^* \int_T \lambda_N(t) dt \quad (6.17)$$

Wichtig sind das erste und das letzte Glied dieser Gleichungskette. Da bei einem sinnvollen Stoß immer $\lambda_N(t) > 0$ gilt, kann man mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung folgende Aussage treffen (siehe [46], S. 165): Die Reibfunktion $\mu_T(t)$ erreicht zu mindestens einem Zeitpunkt während des Stoßes den Wert μ^* . Ist dieser Wert größer als 1, heißt das, daß während des Stoßes tatsächlich auch ein Reibwert größer als 1 aufgetreten ist.

6.3 Exzentrische Stöße

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Stoßversuche mit dem exzentrischen Wurfkörper dargestellt. Es wurden nur Versuche mit dem in Bild 5.2 dargestellten Gummiwurfkörper durchgeführt. Gründe dafür waren:

- Die Untersuchung tangentialreversibler Effekte ist Schwerpunkt dieser Arbeit, sie treten bevorzugt bei Gummiwurfkörpern auf.
- Gummi hat einen besonders großen Reibkoeffizienten. Dieser ist Voraussetzung dafür, daß die Reibeffekte bei dieser Stoßart gut hervortreten.
- Rutscht ein exzentrischer Wurfkörper beim Stoß weg, wird in der Regel kein richtiges Abheben mehr stattfinden können. Er bleibt gegebenenfalls liegen oder wird erneute Stöße an anderen Stellen des Körpers ausführen. Diese Fälle sind mit dem verwendeten Meßverfahren nicht auswertbar.

Exzentrische Stöße lassen sich, im Gegensatz zu zentralen Stößen, nicht durch eine Variation einer einzigen Größe wie γ beschreiben. Deshalb wird bei der Versuchsplanung wie auch bei der Auswertung ein anderer Weg beschritten: Es wird eine Serie von Würfen mit folgenden Anfangswerten durchgeführt: Die Schwerpunkts- geschwindigkeit des Wurfkörpers beträgt in Tangentialrichtung $\dot{x}_A = 3 \text{ m/s}$ und in Normalrichtung $\dot{y}_A = -3.5 \text{ m/s}$. Die Winkelgeschwindigkeit wird so eingestellt, daß bei senkrechtem Auftreffen mit $\alpha = 0$ $\dot{y}_{TA} = 0$ gilt (keine tangentiale Relativgeschwindigkeit im Stoßkontakt). Dies wird mit $\omega_A = -\dot{x}_A(R + r_{SM})$ erreicht (Rollbedingung).

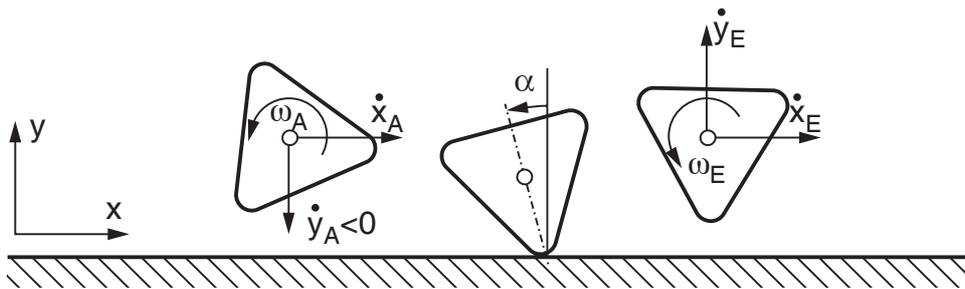


Bild 6.13: Geometrie- und Kinematikgrößen zur Auswertung des exzentrischen Stoßes

Bei der durchgeführten Versuchsreihe wird der Auftreffwinkel α (siehe auch Bild 6.13) von ca. -20° bis 35° variiert. Größere Winkel führen dazu, daß nach diesem ersten Stoß ein weiterer Stoß an der benachbarten „Ecke“ des Wurfkörpers auftrat. Mit dem verwendeten Meßverfahren sind derartige Versuche nicht auswertbar.

Der verwendete Wurfkörper hat folgende Massen- und Geometrieigenschaften (zur Bedeutung siehe Abschnitt 4.2.2): Masse $m = 40 \text{ g}$, Trägheitsmoment

$J = 9600 \text{ gmm}^2$, Rundungsradius $R = 5 \text{ mm}$ und Abstand des Rundungsmittelpunktes zum Schwerpunkt $r_{SM} = 25 \text{ mm}$. Die Kennzahlen des Stoßes wurden in guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen für den zentralen Stoß mit $\mu = 1.1$, $\varepsilon_N = 0.8$ und $\varepsilon_T = 0.8$ identifiziert. Die Wahl des Reibwertes erweist sich hier als nebensächlich, da bei allen hier vorgestellten exzentrischen Stößen Haften vorliegt und μ nur groß genug sein muß, um dies zu gewährleisten.

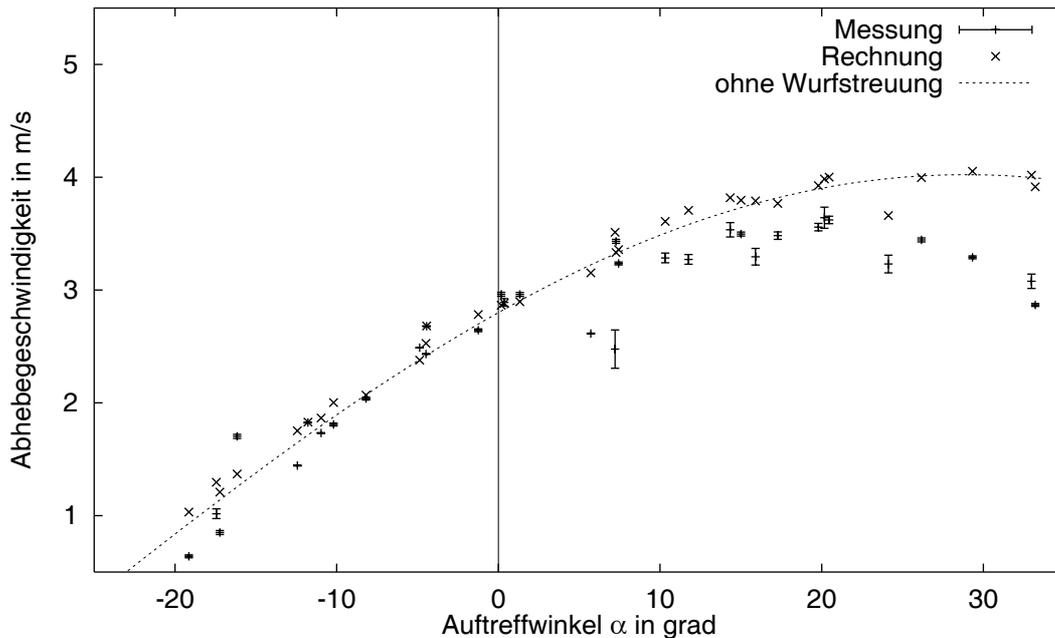


Bild 6.14: Normale Schwerpunktschwindigkeit nach dem Stoß

In Bild 6.14 sind die normalen Abhebegeschwindigkeiten \dot{y}_E dargestellt. Über dem Auftreffwinkel α sind die Ergebnisse der Wurfversuche dargestellt. Die Markierungen in Form eines $+$ mit den Fehlerbalken stellen die Meßergebnisse der einzelnen Versuche dar wobei als Bandbreite die $\pm 1\sigma$ -Streuung eingetragen ist. Die Kreuze in Form eines \times stellen die Vorhersage mit dem Impulsstoßgesetz dar. Eingangsgröße für die Berechnung waren die Größen \dot{x}_A , \dot{y}_A , ω_A und α aus der Messung der Flugbahn vor dem Stoß. Bei jedem Winkel α sind demnach je ein Meßwert und ein berechneter Wert eingetragen.

Mit einer gestrichelten Linie ist in den Bildern die Kurve eingetragen, die entstehen würde, wenn die Anfangsbedingungen der Stöße genau den Vorgaben entsprochen hätten. Da die Wurfmaschine jedoch eine gewisse Streuung bei der Verwirklichung der geforderten Anfangsbedingungen aufweist, liegen die Meßwerte und die jeweils zugehörigen berechneten Werte etwas abseits dieser Kurve. Wichtig zur Bewertung der Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung ist nur der Vergleich der jeweiligen $+$ mit dem zugehörigen \times , die Abweichung von der Kurve macht letztlich eine Aussage über die Funktionsqualität der Wurfmaschine.

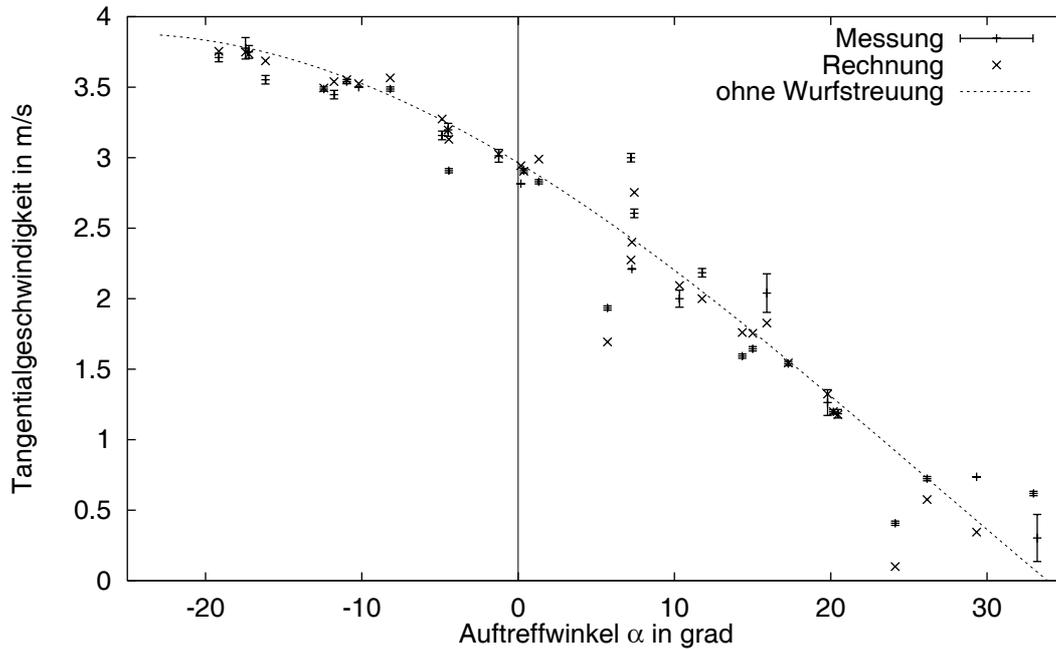


Bild 6.15: Tangentiale Schwerpunktschwindigkeit nach dem Stoß

Beim Winkel $\alpha = 0^\circ$, was einem zentralen Stoß entspricht, ist die Abhebegeschwindigkeit 2.8 m/s , was bei der Anfluggeschwindigkeit von -3.5 m/s die normale Stoßzahl $\varepsilon_N = 0.8$ bestätigt. Bei Anflugwinkeln $\alpha < 0^\circ$ springt der Körper deutlich flacher ab. Dieser Effekt spiegelt sich auch in den Bildern wieder, die die Geschwindigkeit in x -Richtung und die Winkelgeschwindigkeit zeigen (Bilder 6.15 und 6.16). Bei $\alpha = 0^\circ$ ändern sich die Bewegungszustände nicht: Der Körper fliegt mit erfüllter Rollbedingung an, stößt ohne die Einwirkung eines Tangentialimpulses (Bild A.13) und fliegt mit erfüllter Rollbedingung ($\dot{y}_E = 3 \text{ m/s}$ und $\omega_E = -100 \text{ rad/s}$) weiter. Springt bei negativen Werten von α der Körper flacher ab, geht dies mit einer deutlichen Beschleunigung der Tangentialgeschwindigkeit und auch der Winkelgeschwindigkeit einher. Bei Winkeln $\alpha < 20^\circ$ kommt es zu gar keinem Abheben des Körpers mehr. Insgesamt zeigt sich für den Bereich $\alpha < 0$ eine gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung.

Im Bereich $\alpha > 0$ spielen sich im wesentlichen die gegenteiligen Effekte ab wie im zuvor beschriebenen Bereich. Die Normalgeschwindigkeit nimmt zu und die Tangentialgeschwindigkeit ab. Im Grenzfall bei $\alpha \approx 35^\circ$ verschwindet die tangentielle Schwerpunktschwindigkeit und der Wurfkörper fliegt, bereits mit einem Gegen-drall versehen, senkrecht nach oben weg.

In Bild 6.16 kann man den Einfluß der tangentialen Reversibilität erkennen: Hier sind zusätzlich noch Vergleichsrechnungen mit einem * eingezeichnet, bei denen mit $\varepsilon_T = 0$ ohne tangentiale Reversibilität gerechnet wurde. Man kann erkennen, daß sich die Messungen damit nicht richtig nachbilden lassen. Die tangentialreversiblen Effekte spielen somit auch bei diesem Stoßtyp eine wichtige Rolle.

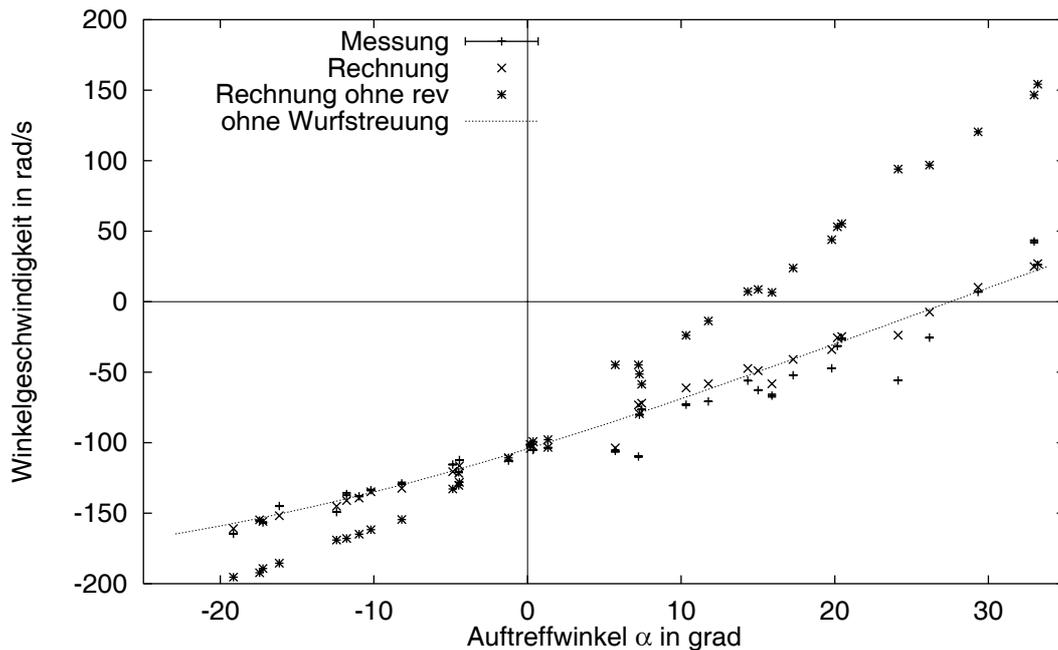


Bild 6.16: Winkelgeschwindigkeit nach dem Stoß

Die Bilder A.14 und A.13 zeigen die Impulse in normaler und tangentialer Richtung während des Stoßes. Der Verlauf des Normalimpulses ist genau korreliert zur Abhebegeschwindigkeit \dot{y}_E . Der Tangentialimpuls verschwindet, wenn $\alpha = 0$ gilt.

Auffällig bei allen Ergebnisbildern ist die zunehmend schlechte Übereinstimmung der Meßergebnisse mit den Rechnungen für große Winkel α , insbesondere bei der Abhebegeschwindigkeit \dot{y}_E , was sich auch in der Energiedifferenz in Bild A.15 widerspiegelt. Bei diesen Stößen ist der Normalimpuls besonders groß. Das hat folgende Konsequenzen:

- Der Stoß dauert länger. Es sind deutliche Änderungen des Winkels während des Stoßes denkbar, die das Ergebnis nicht mehr mit dem Impulsstoßmodell nachvollziehen lassen.
- Der Wurfkörper wird so stark elastisch verformt, daß man nicht mehr von dem gleichen ε_N ausgehen kann, wie bei anderen Stoßkonfigurationen.

Zusammenfassend läßt sich feststellen: Bei den hier durchgeführten Stößen steht die Impulsstoßhypothese bereits auf wackeligen Beinen. Bei den zentralen Stößen ist das nicht aufgefallen, da eine translatorische Verlagerung während des Stoßes zu keiner Geometrieänderung geführt hat. Zudem ist bei den Ballscheiben, die für die zentralen Stoßversuche verwendet wurden, die Kontaktsteifigkeit höher, als bei dem mit kleinerem Radius an den Ecken abgerundeten exzentrischen Wurfkörper. Die Versuche untermauern die Stoßtheorie, insbesondere die tangentialreversiblen Effekte, zeigen aber zugleich die Grenzen des Impulsstoßmodells auf.

Kapitel 7

Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit ist es, einen Beitrag zum Verständnis und zur Modellierung von Stoßprozessen in Mehrkörpersystemen zu liefern. Stöße treten immer auf, wenn Teile eines Mehrkörpersystems untereinander oder mit einer inertialfesten Umgebung in Kontakt kommen und dabei eine Relativgeschwindigkeit zwischen den Kontaktpartnern vorhanden ist. In der Mechanik ist der Begriff des Stoßes eng mit der Vorstellung einer unstetigen Geschwindigkeitsänderung verknüpft. Da in der Natur alle makroskopischen mechanischen Vorgänge stetig verlaufen, treten derartige Übergänge nur bei einer massendiskreten Modellierung der beteiligten Körper auf. Insbesondere ist dies der Fall, wenn man die Modellvorstellung „Starrkörper“ zugrunde legt.

Es gibt kein allgemeingültiges Stoßmodell, das für alle Berührungsvorgänge in Mehrkörpersystemen gleichermaßen geeignet ist. Nach dem Modellierungsgrundsatz „so einfach wie möglich, so kompliziert wie nötig“ muß je nach spezifischem Phänomen ein geeignetes Modell ausgewählt werden.

Bei sehr kurzen Stoßzeiten kann die Weiterbewegung der stoßenden Teile während der Berührzeit vernachlässigbar sein und die im Kontaktpunkt auftretenden Kraftspitzen können die Beträge aller anderen eingepprägten Kräfte im System übersteigen. Unter diesen Bedingungen ist es möglich, ein sogenanntes Impulsstoßgesetz zu verwenden. Dabei läßt man in einem Grenzprozeß die Stoßzeit verschwinden und geht von unstetigen Geschwindigkeitsänderungen aus, die durch Kraftimpulse verursacht werden. Diese Impulse entsprechen dem Integral der Kontaktkraftspitzen über die Stoßzeit.

Findet ein Stoß an mehreren Stellen im System gleichzeitig statt, was immer der Fall ist, wenn in einem System mehrere geschlossene Bindungen vorhanden sind, kann die auf einen Zeitpunkt reduzierte Impulsstoßbeschreibung nicht mehr zulässig sein. Auch komplizierte Haft-Gleit-Übergänge in einem Kontakt können bereits ein Modell, bei dem der Stoß zeitlich aufgelöst wird, notwendig machen. In dieser Arbeit wird dazu ein Hybrides Stoßmodell vorgestellt, das die Annahme konstanter Lagen der am Stoß beteiligten Körper mit der Möglichkeit beliebiger zeitlich aufgelöster Kontaktabfolgen verknüpft. Mit diesem Modell ist es auch möglich, den Einfluß eingepprägter Kräfte zu berücksichtigen, die die Größenordnung der Stoßkontaktkräfte

erreichen.

Die Stoßmodellierung von elastischen Körpern muß immer zeitkontinuierlich erfolgen, da die Speicherung und Entspeicherung von Energie nicht auf einen Punkt konzentriert werden kann, sondern der gesamte Körper zu diesem Prozeß beiträgt. Besonders aufwendig wird die Beschreibung, wenn man die Wellenausbreitung in den Körpern berücksichtigen muß, die zu völlig anderen Resultaten des Stoßvorgangs führen kann, als es mit den anderen Modellen vorhersagbar ist.

Schwerpunkt dieser Arbeit ist die Darstellung eines Impulsstoßmodells, das einen möglichst großen Bereich von denkbaren Starrkörperstößen abdecken soll. Insbesondere werden die Vorgänge in Richtung der Stoßtangente ausführlich modelliert. Dabei spielt nicht nur die Reibung eine Rolle, ohne die in Tangentialrichtung keine Kräfte auftreten können, sondern auch sogenannte tangentialreversible Effekte. Diese beschreiben, daß während eines Stoßes nicht nur in Normalenrichtung, sondern auch in tangentialer Richtung eine Umwandlung von kinetischer in potentielle Energie stattfindet, die bei ihrer Rückumwandlung die Separation der Körper beziehungsweise eine tangentiale Relativgeschwindigkeit herbeiführt.

Der Stoß teilt sich dabei – angelehnt an das Poisson'sche Stoßgesetz – in eine Kompressions- und eine Expansionsphase auf. In der Kompressionsphase werden die Kontaktpunkte so abgebremst, daß keine weitere Annäherungsgeschwindigkeit mehr vorhanden ist. Dabei können auch in der Tangentialrichtung Geschwindigkeitsübergänge mit entsprechenden Reibphänomenen stattfinden. Ein durch den Stoßkoeffizienten ε_N berechneter Anteil des Kompressionsimpulses wird in der Expansionsphase wieder verwendet, um die Separation der Körper zu erreichen oder zumindest ein weiteres Eindringen zu verhindern. Zusätzlich entspeichert sich ein Teil des Tangentialimpulses, der durch die im Kontakt übertragbare Reibung begrenzt wird. Dafür wird der tangentiale Stoßkoeffizient ε_T eingeführt. Somit ist auch in Tangentialrichtung eine Umkehrung der Relativbewegung möglich. Dieser Vorgang wird als tangentialreversibler Stoß bezeichnet.

Das Gesetz ist auch auf Mehrfachkontakte anwendbar, da die Bewegungsänderungen über Impulsbilanzen für das Gesamtsystem berechnet werden und eine Formulierung mit einseitigen Bindungen die Impenetrabilität der beteiligten Körper immer garantiert.

Mit einer Versuchseinrichtung wurde das vorgestellte Stoßgesetz mit Experimenten verglichen. Diese Anlage besteht einerseits aus einer Wurfmaschine, die scheibenförmige Probekörper aus nahezu beliebigen Materialien auf eine Unterlage fliegen und dort stoßen läßt und andererseits aus der zugehörigen Auswertetechnik. Die Bahn des Wurfkörpers wird während der gesamten Flugphase mittels einer Stroboskopbeleuchtung fotografiert. Anhand der Auswertung dieser Fotos kann die translatorische und rotatorische Geschwindigkeit des Körpers vor und nach dem Stoß bestimmt werden. Damit lassen sich die Stoßimpulse und die Reibkoeffizienten der Kontaktpartner bestimmen.

Zentrale Stoßversuche wurden mit verschiedenen Materialpaarungen durchgeführt. Die Stöße von PVC- und Teflon-Wurfkörpern auf eine Melamintischplatte zeigen das

Verhalten eines reinen Reibstoßes. Die Tangentialgeschwindigkeit im Kontakt wird entweder bis hin zur Rollbedingung abgebremst oder der Körper rutscht während des Stoßes komplett durch.

Der Wurfkörper mit dem Stoßbelag aus einem Gummiball zeigt ein ausgeprägtes tangentialreversibles Verhalten. Reicht die Reibung aus, um Haften während des Stoßes zu gewährleisten, wird die Tangentialbewegung nahezu vollständig umgekehrt. Hier zeigen sich Effekte, die von sogenannten Superbällen bekannt sind. Für den tangentialen Stoßkoeffizienten konnten aus den Messungen Werte von $\varepsilon_T \approx 0.8$ ermittelt werden; sie liegen damit in der gleichen Größenordnung wie der normale Stoßkoeffizient ε_N für diese Materialien.

Ein besonders interessantes Ergebnis dieser Arbeit ist, daß tangentialreversible Effekte auch bei den technisch relevanten Materialpaarungen Stahl-Stahl und Stahl-Aluminium auftreten. Diese Effekte sind nicht so ausgeprägt wie bei einem Gummikörper, treten aber dennoch deutlich auf. Der tangentialer Stoßkoeffizient liegt für beide Materialpaarungen bei $\varepsilon_T \approx 0.25$; zudem zeigt sich bei großen Relativgeschwindigkeiten deutlich der Effekt der fallenden Reibkennlinie.

Mit einem dreieckförmigen Gummiwurfkörper wurden exzentrische Stoßversuche durchgeführt. Die Ergebnisse stimmen ebenfalls gut mit dem theoretischen Stoßmodell überein. Die Stoßkoeffizienten sind mit den Koeffizienten des zentralen Stoßes nahezu identisch. Somit scheint auch der tangentialer Stoßkoeffizient ein Materialparameter zu sein. Bei den exzentrischen Stößen, bei denen ein besonders tiefes Eindringen mit relativ langer Kontaktzeit auftritt, stimmen die Versuchsergebnisse schlechter mit den theoretischen Berechnungen überein. Hier ist die Annahme der konstanten Lagen während einer vernachlässigbaren Stoßzeit nicht mehr erfüllt. Damit ist die Modellierung dieser Stöße mit dem Impulsstoßgesetz offensichtlich nicht mehr zulässig.

Das in dieser Arbeit vorgestellte Stoßmodell ist in der Lage einen weiten Bereich von Stößen, wie sie in Mehrkörpersystemen auftreten, richtig zu beschreiben. Von besonderer Wichtigkeit ist das Konzept des tangentialreversiblen Stoßes, der auch bei technisch relevanten Stoßpaarungen auftreten kann. Damit ist es möglich, Stöße in Mehrkörpersystemen realistischer zu beschreiben, als es bisher der Fall war.

Anhang A

Bildanhang

Auf den folgenden Seiten sind die Versuchsergebnisse in Bildern dargestellt, die im Kapitel 6 erklärt sind, dort aber keinen Platz fanden.

Zentrale Stoßversuche

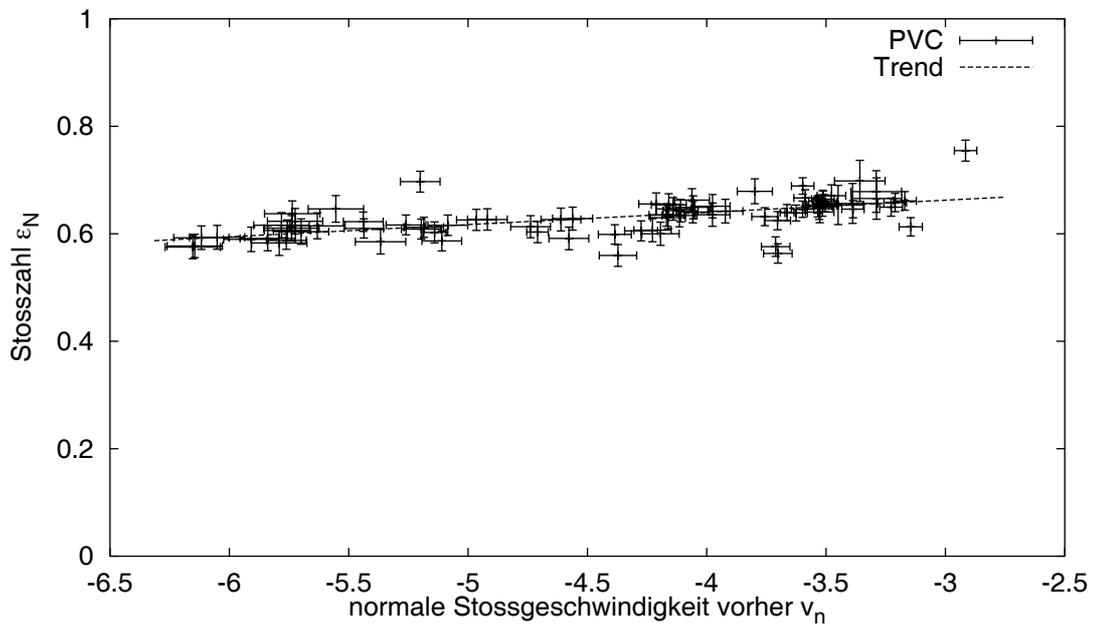


Bild A.1: Normale Stoßzahl PVC

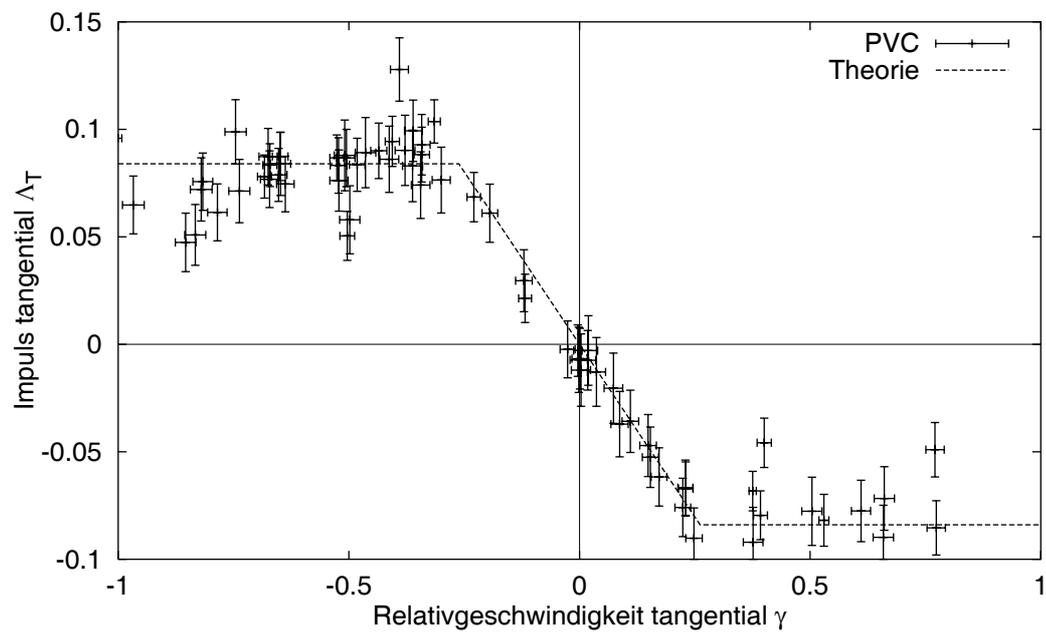


Bild A.2: Tangentialimpuls PVC

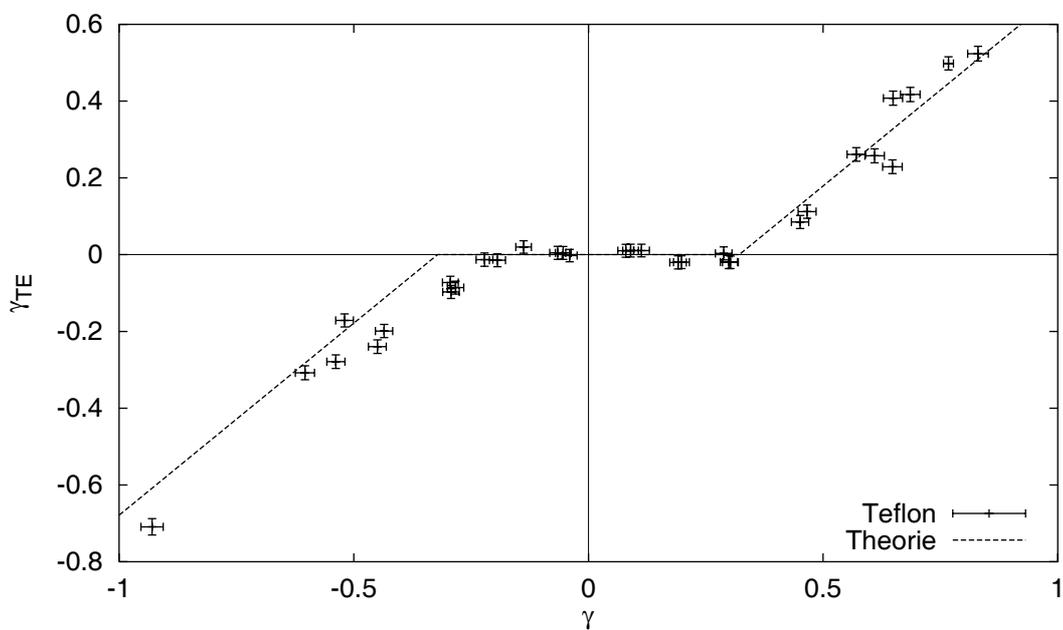


Bild A.3: Tangentiale Relativgeschwindigkeit Teflon

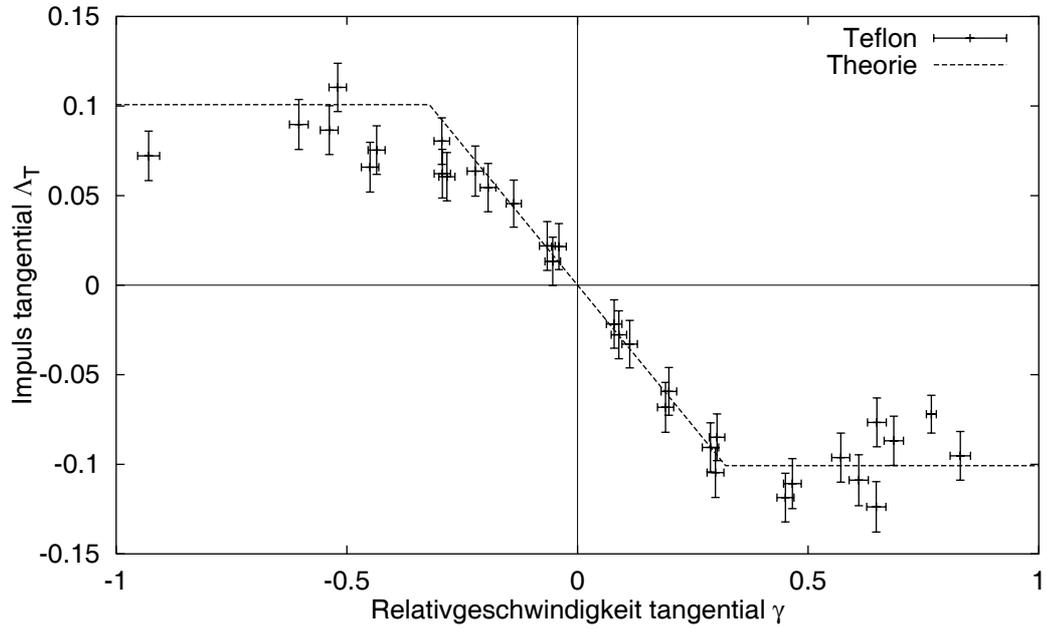


Bild A.4: Tangentialimpuls Teflon

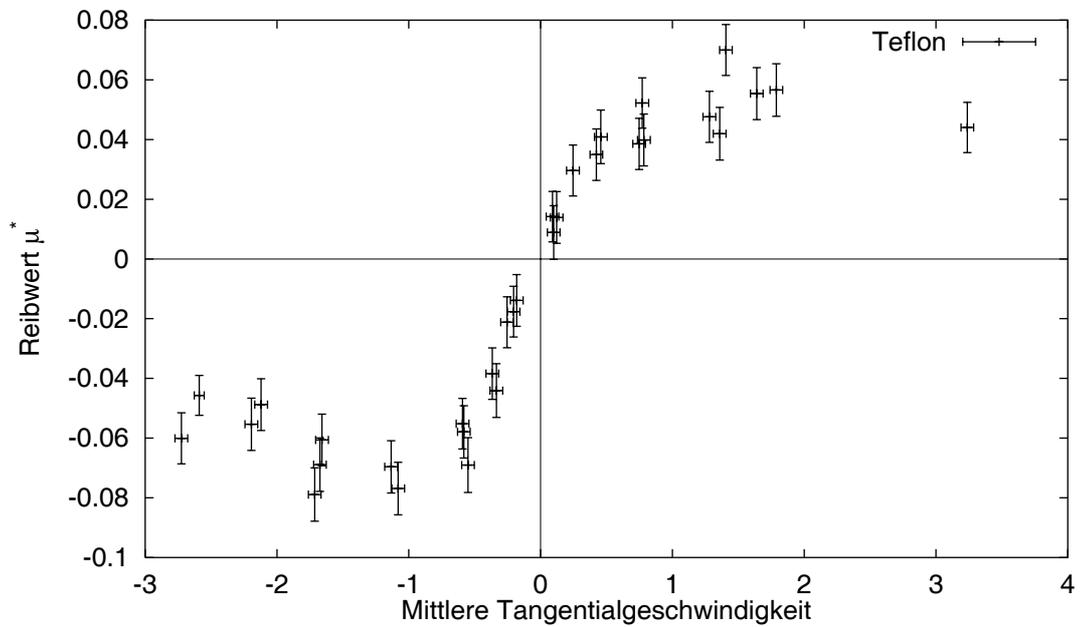


Bild A.5: Reibverhältnisse Teflon

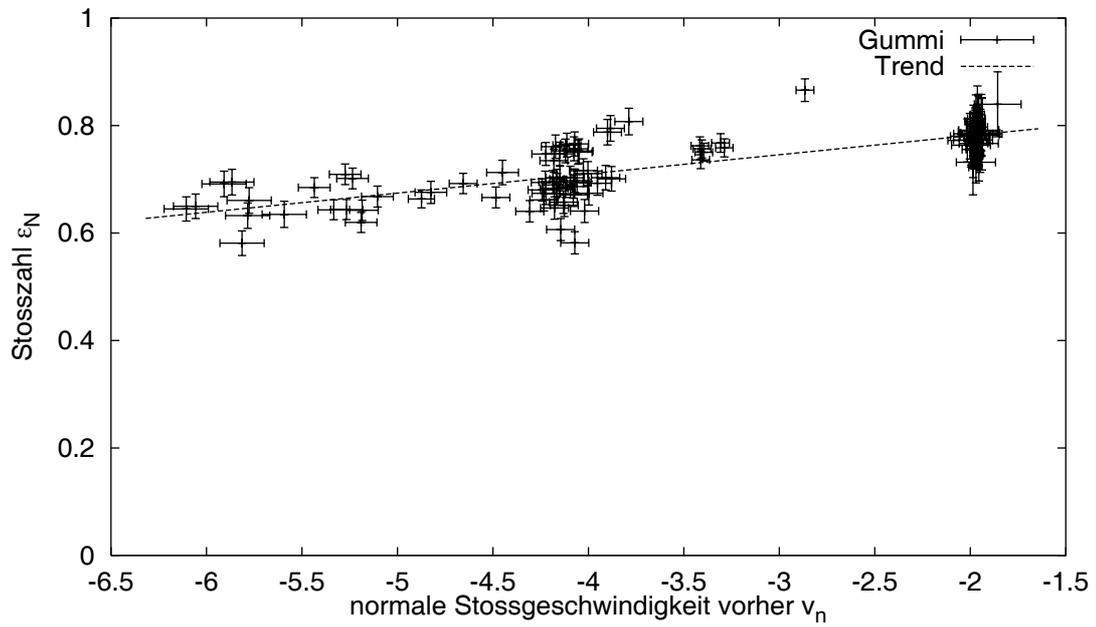


Bild A.6: Normale Stoßzahl Gummi

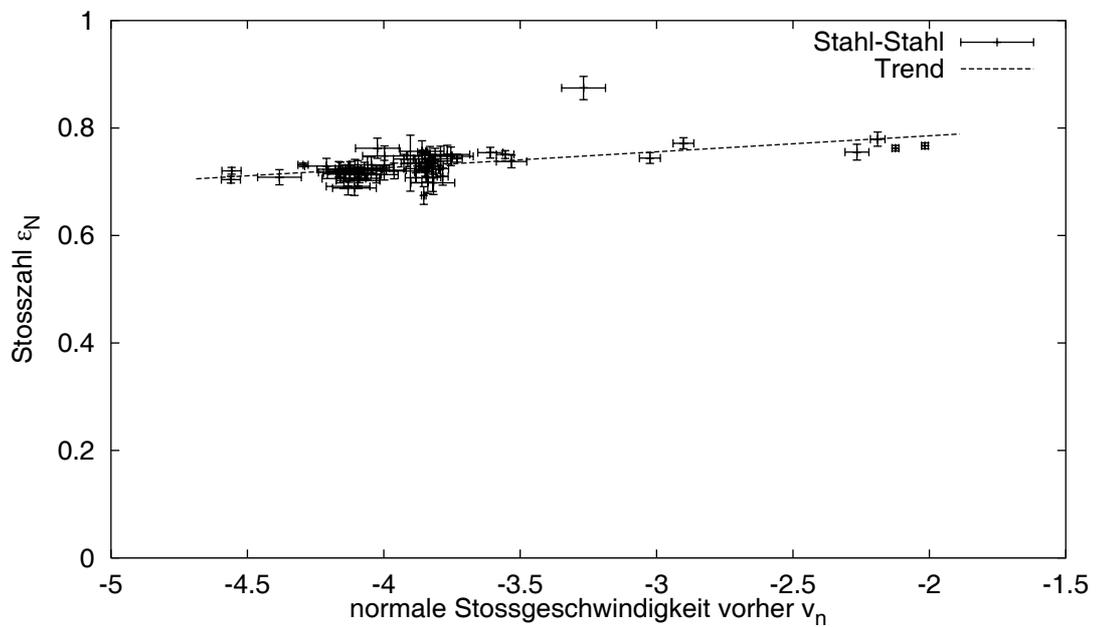


Bild A.7: Normale Stoßzahl Stahl-Stahl

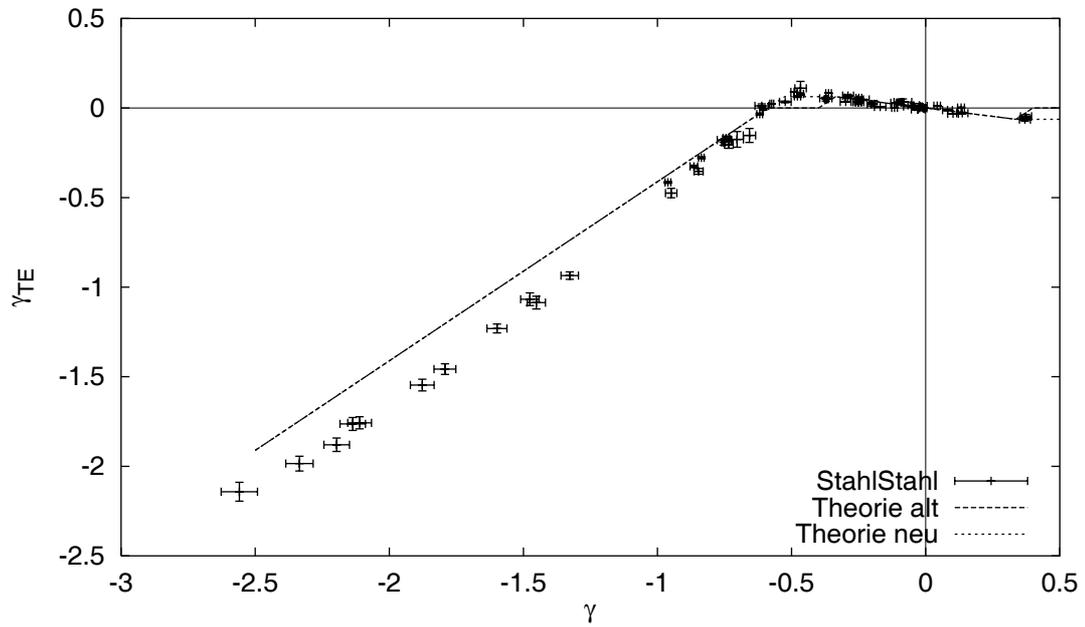


Bild A.8: Tangentiale Relativgeschwindigkeit Stahl-Stahl

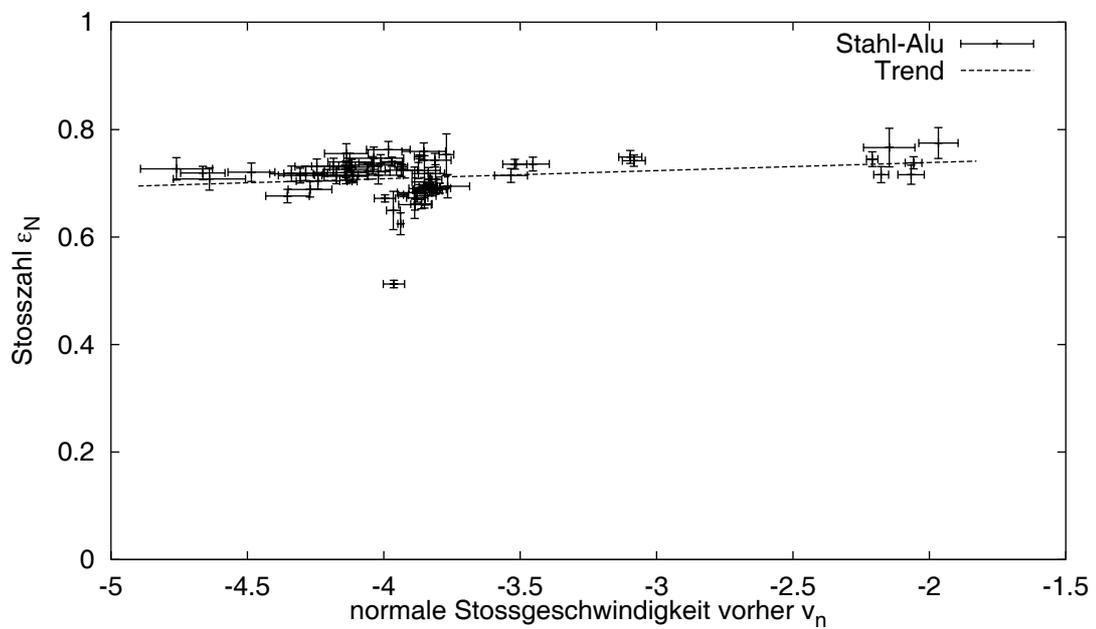


Bild A.9: Normale Stoßzahl Stahl-Aluminium

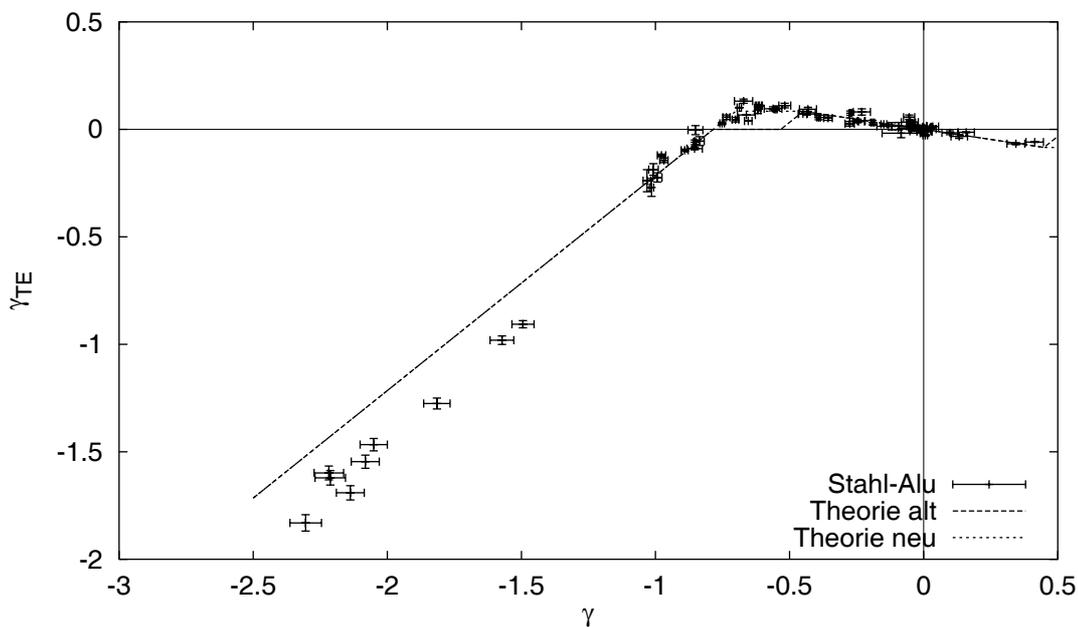


Bild A.10: Tangentiale Relativgeschwindigkeit Stahl-Aluminium

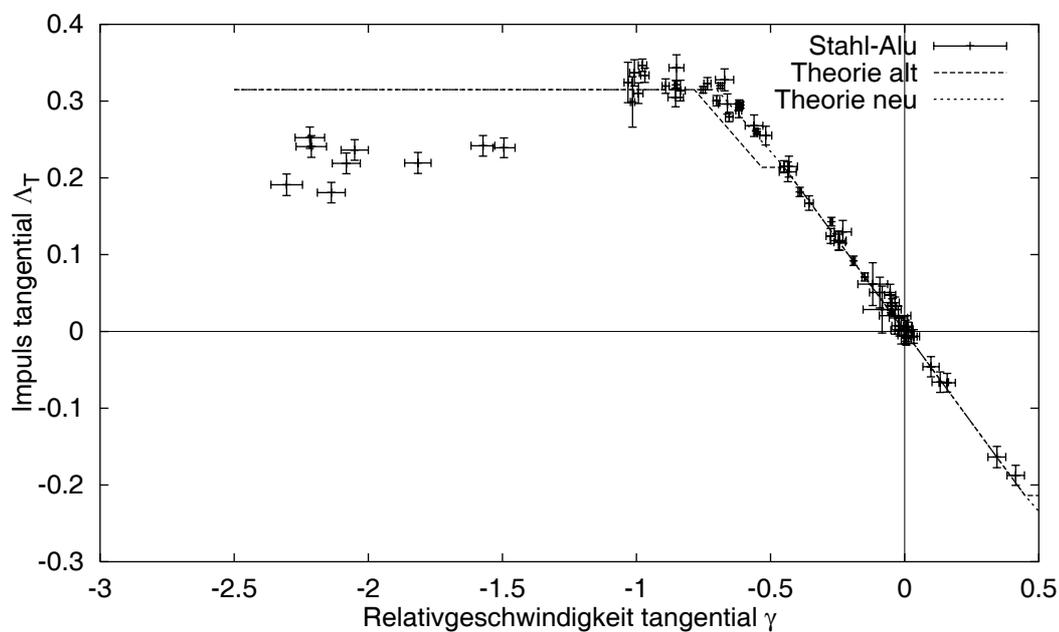


Bild A.11: Tangentialimpuls Stahl-Aluminium

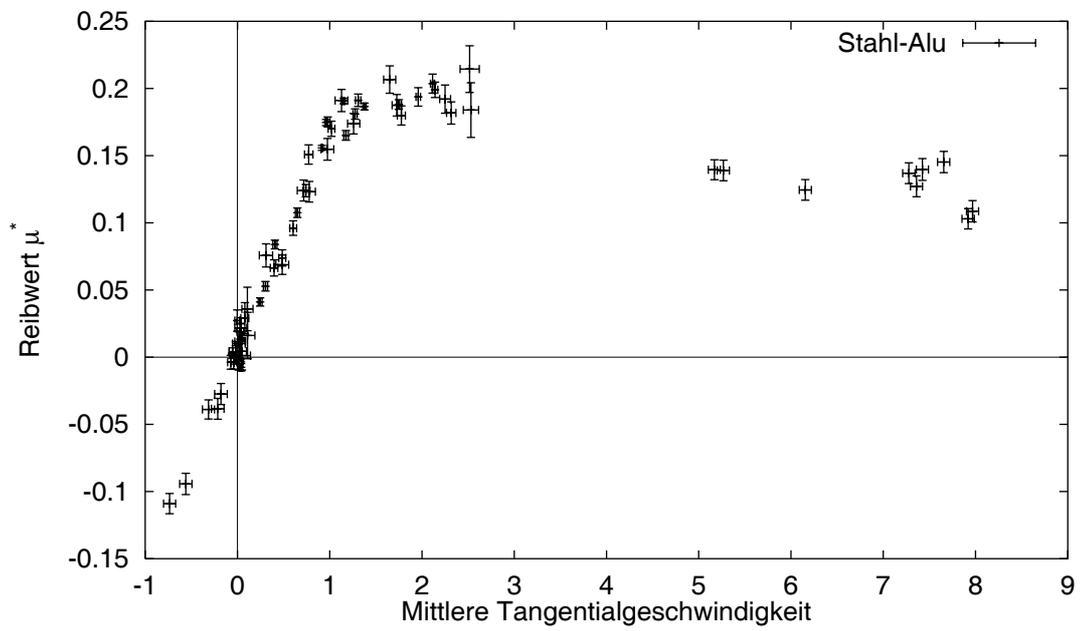


Bild A.12: Reibverhältnisse Stahl-Aluminium

Exzentrische Stoßversuche

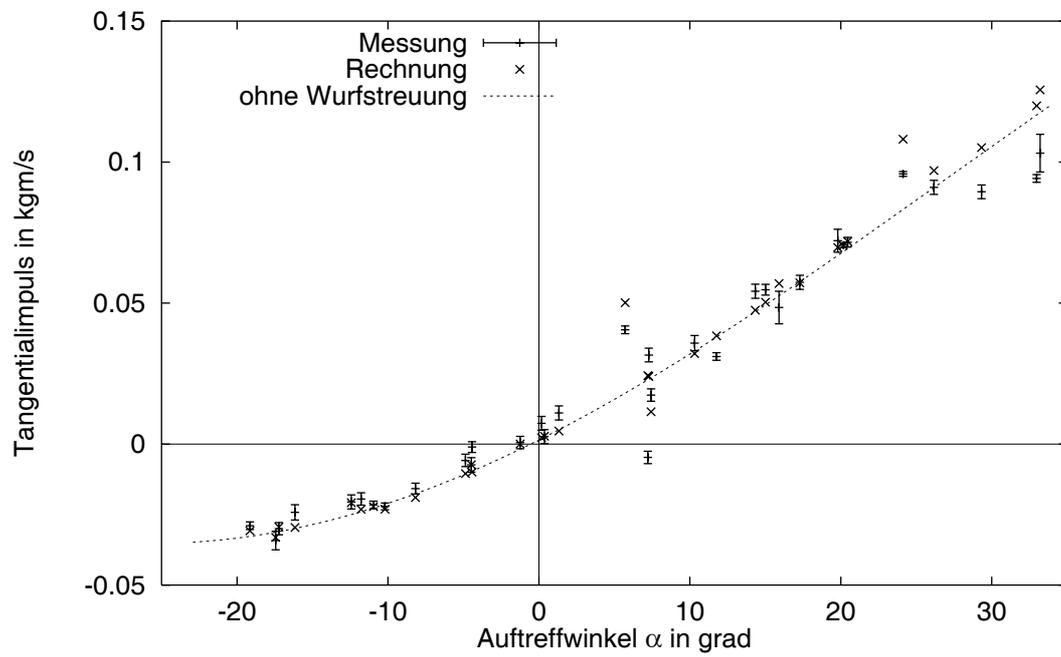


Bild A.13: Tangentialimpuls des Stoßes

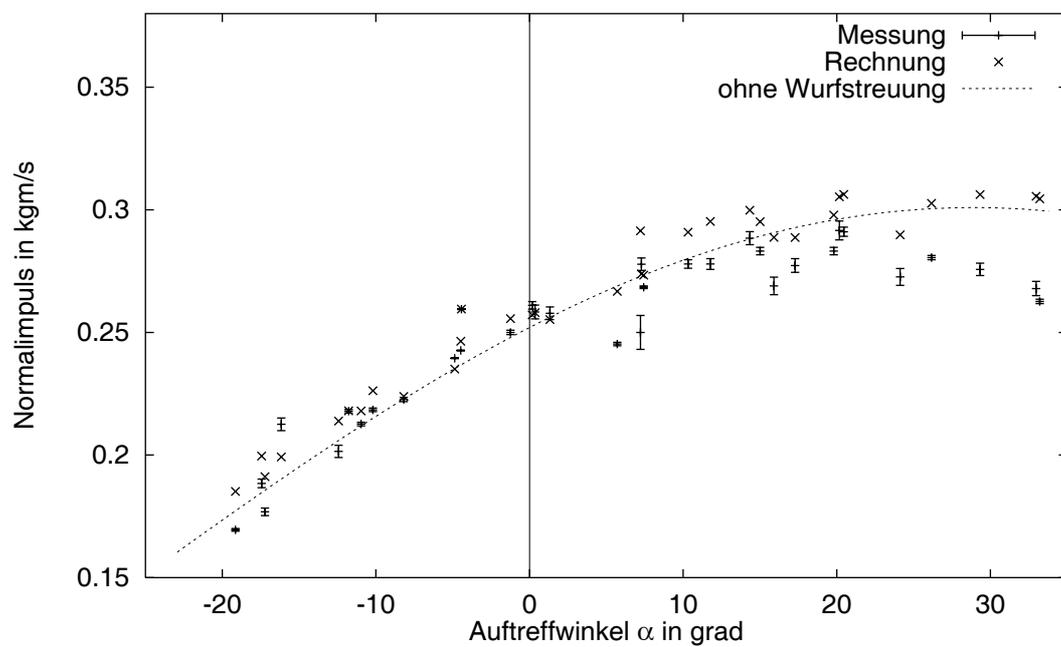


Bild A.14: Normalimpuls des Stoßes

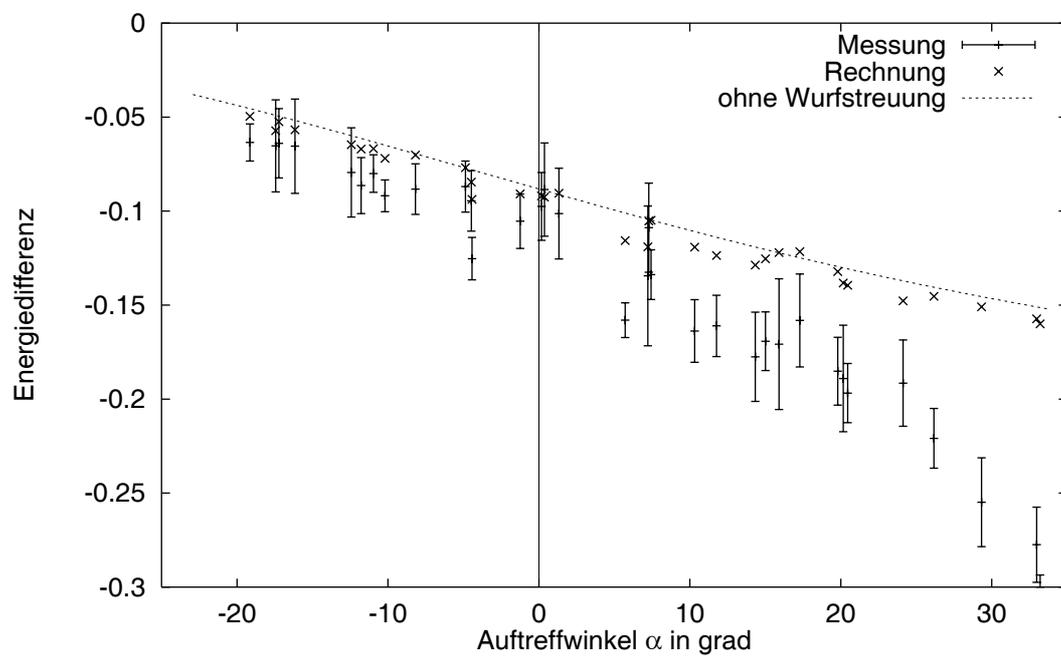


Bild A.15: Energieverlust durch den Stoß

Anhang B

Literatur

- [1] ADAMS, G. G., TRAN, D. N.: *The Coefficient of Restitution for a planar Two-Body Eccentric Impact*. J. of App. Mech., Bd. 60 (1993), Nr. 12, S. 1058–1060.
- [2] BARHORST, A. A., EVERETT, L. J.: *Contact/Impact in Hybrid Parameter Multiple Body Mechanical Systems*. J. of Dyn. Sys., Mesas., and Contr., Bd. 117 (1995), Nr. 12, S. 559–569.
- [3] BATLLE, J. A., BARJAU CONDOMINES, A.: *Rough Collisions in Multibody Systems*. Mech. Mach. Theory, Bd. 26 (1991) Nr. 6, S. 565–577.
- [4] BATLLE, J. A.: *On Newton's and Poisson's Rules of Percussive Dynamics*. J. of Appl. Mech., Bd. 60 (1993), Nr. 6, S. 376–381.
- [5] BATLLE, J. A.: *Rough Balanced Collisions*. J. of Appl. Mech., Bd. 63 (1996), Nr. 3, S. 168–172.
- [6] BAPAT, C. N.: *The General Motion of an Inclined Impact Damper with Friction*. J. of Sound and Vibration Bd. 184 (1995) Nr. 3, S. 417–427.
- [7] BEITELSCHMIDT, M., PFEIFFER, F.: *Impacts with Friction and Normal and Tangential Reversibility in Multibody Systems*. ZAMM, Bd. 77 (1997) S. 29–31.
- [8] BRACH, R., M.: *Friction, Restitution and Energy Loss in Planar Collisions*. Transactions of the ASME, Bd. 51 (1984), S. 164–170.
- [9] BRACH, R., M.: *Rigid Body Collisions*. J. of Appl. Mech., Bd 56 (1989), S. 133–138.
- [10] BRACH, R., M.: *Mechanical Impact Dynamics*. New York: Wiley & Sons 1991.
- [11] BRACH, R., M.: *Classical Planar Impact Theory and the Tip Impact of a Slender Rod*. Int. J. Impact Engng. Bd. 13 (1993), Nr. 1, S. 21–33.
- [12] BREMER, H.: *Dynamik und Regelung mechanischer Systeme*. Stuttgart: Teubner, 1988.
- [13] BREMER, H., PFEIFFER, F.: *Elastische Mehrkörpersysteme*. Stuttgart: Teubner 1992.

- [14] BROGLIATTO, B.: *Nonsmooth Impact Dynamics*. London: Springer 1996.
- [15] BUDD, C., DUX, F.: *The Effect of Frequency and Clearance Variations on Single-Degree-of-Freedom Impact Oscillators* J. of Sound and Vibration Bd. 184 (1995) Nr. 3, S. 475–502.
- [16] CHANG, L.: *An Efficient Calculation of the Load and Coefficient of Restitution of Impact Between Two Elastic Bodies With a Liquid Lubricant*. J. of Appl. Mech., Bd. 63 (1996), Nr. 6, S. 347–352.
- [17] CHATTERJEE, A.: *Rigid Body Collisions: Some General Considerations, new Collision Laws, and some Experimental Data*. A Dissertation at the Cornell University (1997).
- [18] COTTLE, R. W., DANTZIG, C. B.: *Complementary Pivot Theory of Mathematical Programming*. Lin. Alg. App. Bd. 1 (1968) S. 103–125.
- [19] FRITZ, P.: *Dynamik schnellaufender Kettentriebe*. Fortschr.-Ber. VDI Reihe 11 Nr. 253. Düsseldorf: VDI-Verlag 1998.
- [20] FRITZER, A.: *Nichtlineare Dynamik von Steuertrieben*. Fortschr.-Ber. VDI Reihe 11 Nr. 176. Düsseldorf: VDI-Verlag 1993.
- [21] GLOCKER, CH., PFEIFFER, F.: *Dynamical Systems with Unilateral Constraints*. Nonlinear Dynamics 3 (1992): S. 245–259.
- [22] GLOCKER, CH.: *Dynamik von Starrkörpersystemen mit Reibung und Stößen*. Fortschr.-Ber. VDI, Reihe 18, Nr. 182. Düsseldorf: VDI-Verlag 1995.
- [23] GOLDSMITH, W.: *Impact*. London: Edward Arnold Publishers 1960.
- [24] HERTZ, H.: *Über die Berührung fester elastischer Körper*. Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle), Bd. 92 (1882), S. 156–171.
- [25] HOFMANN, H.: *Konstruktion einer Wurfmaschine für Stoßversuche*. Semesterarbeit am Lehrstuhl B für Mechanik, TU-München, 1995.
- [26] HOGAN, S. J.: *On the Dynamics of Rigid-Block Motion under Harmonic Forcing*. Proc. Roy. Soc. London, Bd. A425 (1989), S. 441–476.
- [27] HUYGENS, C.: *Regulae de motu corporum ex motuo impulsu*. Philosophical Transactions IV (1669), S. 927–928.
- [28] IVANOV, A. P.: *Analytical Methods in the Theory of Vibro-Impact Systems*. J. Appl. Maths. Mechs. Bd. 57 (1993) Nr. 2, S. 221–236.
- [29] IVANOV, A. P.: *Energetics of a Collision with Friction*. J. Appl. Maths. Mechs. Bd. 56 (1992) Nr. 4, S. 527–534.
- [30] IVANOV, A. P.: *Impact Oscillations: Linear Theory of Stability and Bifurcations*. J. of Sound and Vibration Bd. 178 (1994) Nr. 3, S. 361–378.
- [31] JAEGER, J.: *Analytical Solutions of Contact Impact Problems*. Appl. Mech. Rev. vol 47. (1994) No. 2, S. 35–54.

- [32] JEAN, M., MOREAU, J. J.: *Unilaterality and Dry Friction in the Dynamics of Rigid Body Collections*. Proceedings Contact Mechanics International Symposium, October 7–9, EPFL, Lausanne, Switzerland. Ed.: A. Curnier. PPUR 1992, S. 31–48.
- [33] JOHNSON, J. L.: *Contact Mechanics*. Cambridge University Press 1985.
- [34] KELLER, J. B.: *Impact with Friction*. Journal of Applied Mechanics Bd. 53 (1986) Nr. 3, S. 1–4.
- [35] KLARBRING, A., BJÖRKMAN, G.: *Solution of Large Displacement Contact Problems with Friction using Newton's Method for Generalized Equations*. Int. J. for Num. Meth. in Eng., Bd. 34 (1992), S. 249–269.
- [36] KOZOL, J. E., BRACH, R. M.: *Two-Dimensional Vibratory Impact with Chaos*. J. of Sound and Vibr. Bd. 148 (1991) Nr. 2, S. 319–327.
- [37] KUNERT, A.: *Dynamik spielbehafteter Maschinenteile*. Fortschr.-Ber. VDI Reihe 11 Nr. 175. Düsseldorf: VDI-Verlag 1992.
- [38] LARSSON, R, HÖGLUND, E.: *Numerical Solution of a Ball Impacting and Rebounding a Lubricated Surface*. J. of Tribology, Bd. 117 (1995), S. 94–102.
- [39] LIM, C. T., STRONGE, W. J. *Frictional Torque and Compliance in Collinear Elastic Collisions*. Int. J. Mech. Sci., Bd. 36 (1994), Nr. 10, S. 911–930.
- [40] LÜDER, J., KECSKEMÉTHY, A., HILLER, M.: *Modelling and Experimental Validation of the Eccentric Collision with Friction of a Planar Bar on a Rigid Plane*. ZAMM, Bd. 77 (1997) S. 661–662.
- [41] MAGNUS, K., MÜLLER, H. H.: *Grundlagen der Technischen Mechanik*. Stuttgart: Teubner 1982.
- [42] MARGHITU, D. B., HURMUZLU, Y.: *Three-Dimensional Rigid-Body Collisions With Multiple Contact Points*. J. of Appl. Mech., Bd. 62 (1995), Nr. 9, S. 725–732.
- [43] MARGHITU, D. B., HURMUZLU, Y.: *Nonlinear Dynamics of an Elastic Rod with Frictional Contact*. Nonlinear Dynamics, Bd. 10 (1996), S. 187–201. (1995), Nr. 9, S. 725–732.
- [44] MASON, M. T., WANG, Y.: *On the Inconsistency of Rigid-Body Frictional Planar Mechanics*. CH2555-1, (1988).
- [45] MEITINGER, T.: *Dynamik automatisierter Montageprozesse*. Fortschr.-Ber. VDI Reihe 2, Düsseldorf: VDI-Verlag, erscheint 1998.
- [46] MEYBERG, K., VACHENAUER, P.: *Höhere Mathematik. Bd. 1: Differential- und Integralrechnung, Vektor- und Matrizenrechnung*. Berlin: Springer-Verlag 1990.
- [47] MEYBERG, K., VACHENAUER, P.: *Höhere Mathematik. Bd. 2: Differentialgleichungen, Funktionentheorie, Fourier-Analyse, Variationsrechnung*. Berlin: Springer-Verlag 1991.

- [48] MURTY, K. G.: *Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming*. Sigma Series in Applied Mechanics (ed. White, D. J.). Berlin: Heldermann Verlag (1988).
- [49] NEWTON, I.: *Principia*. Corol. VI, 1687.
- [50] OSTERMEYER, G. P.: *Zur numerischen Behandlung von elastischen Stößen in Mehrkörpersystemen*. Ingenieur-Archiv 58 (1988), S. 67–79.
- [51] PALAS, H., HSU, W. C., SHABANA, A. A.: *On the use of Momentum Balance and the Assumed Modes Method in Transverse Impact Problems*. J. of Vibr. and Acoust., Bd. 114 (1992), S. 364–373.
- [52] PANAGIOTOPOULOS, P.D.: *Hemivariational Inequalities. Existence and Approximation Results*. Unilateral Problems in Structural Analysis, Del Piero, G., Maceri, F., CISM Courses and Lectures No. 288, Springer Verlag, Wien, New York. (1983) S. 223-246.
- [53] PEREIRA, M. S., NIKRAVESH, P.: *Impact Dynamics of Multibody Systems with Frictional Contact Using Joint Coordinates and Canonical Equations of Motion*. Nonlinear Dynamics Bd. 9 (1996), S. 53-71.
- [54] PETERKA, F., KOTERA, T.: *Different Ways from Periodic to Chaotic Motion in Mechanical Vibro-Impact Systems*. Proceedings of the 9th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Bd. 2 (1995), S. 1030–1035.
- [55] PFEIFFER, F.: *Mechanische Systeme mit un stetigen Übergängen*. Ingenieur-Archiv 54 (1984), S. 232–240.
- [56] PFEIFFER, F., KÜCÜKAY, F.: *Eine erweiterte Stoßtheorie und ihre Anwendungen in der Getriebedynamik*. VDI-Zeitschrift, Bd. 127 (1985), Nr. 8, S. 341–349.
- [57] PFEIFFER, F., KÜCÜKAY, F.: *Über Rasselschwingungen in Kfz-Schaltgetrieben*. Ing. Arch., Bd. 56 (1986) S. 25–37.
- [58] PFEIFFER, F.: *Theorie des Getrieberasseln*. VDI Berichte Nr. 697, 1988, S. 45–65.
- [59] PFEIFFER, F.: *Einführung in die Dynamik*. Stuttgart: Teubner 1989.
- [60] PFEIFFER, F., GLOCKER, CH.: *Dynamical Systems with Unsteady Processes*. ASME DE-Vol. 49, Friction-Induced Vibration, Chatter, Squeal and Chaos. Book No. G00735 (1992).
- [61] PFEIFFER, F., GLOCKER, CH.: *Multibody Dynamics with Unilateral Constraints*. New York: Wiley & Sons 1996.
- [62] PFEIFFER, F., WOLFSTEINER, P.: *Relative Kinematics of Multibody Contacts*. ASME, DE-Vol. 95, AMD-Vol. 223, Active/Passive Vibration Control and Nonlinear Dynamics of Structures, S. 107–114, 1997.
- [63] PIERO, DEL, G.: *Shock Dynamics for a Rigid Block over a Rigid Plane*. Proc. Contact Mechanics Int. Symp., Edt. A. Curnier, (1992), S. 3–12.

- [64] POISSON, S. D.: *Traité de mécanique*. Paris: Bachelier 1833.
- [65] PRESS, W. H. ET AL.: *Numerical Recipes in C. Second Edition*. Cambridge University Press 1992.
- [66] PRESTL, W.: *Zahnhämmern in Rädertrieben von Dieselmotoren*. Fortschr.-Ber. VDI Reihe 11 Nr. 145. Düsseldorf: VDI-Verlag 1991.
- [67] ROSSMANN, T.: *Ein Laufroboter für Rohre*. Dissertation TU-München, 1998.
- [68] ROUTH, E. J.: *Dynamics of a System of Rigid Bodies. The elementary Part*. London: Macmillan and Company, 1905.
- [69] SAINT-VENANT, DE, M.: *De Barré*. Journal des Mathématiques. Ser. 2, Bd. 12 (1866), S. 237–376.
- [70] SCHMIDT, B.: *Problem- und Modellvorstellungen*. VDI-Kolloquium Stoßartige Vorgänge in mechanischen Systemen, Darmstadt 1967, S. 1–11.
- [71] SEYFFERTH, W., PFEIFFER, F.: *Modelling of Time-Varying Contact Problems in Multibody Systems*. Proc. of 12th Symp. on Eng. Appl. of Mechs. Montreal, Canada, 1994, S. 579–599.
- [72] SEYFFERTH, W.: *Modellierung un stetiger Montageprozesse mit Robotern* Fortschr.-Ber. VDI Reihe 11 Nr. 199. Düsseldorf: VDI-Verlag 1993.
- [73] SHABANA, A. A.: *Dynamics of Multibody Systems*. New York: Wiley & Sons 1989.
- [74] SHAKIL, A., LANKARANI, H. M., PEREIRA, M. F.O.S: *Frictional Analysis in Constrained Multibody Systems*. ASME 96-DTEC/DAC-1124, (1996)
- [75] SINOPOLI, A.: *Dynamics and Impact in a System with Unilateral Constraints. The Relevance of Dry Friction*. Meccanica, Bd. 22 (1987) S. 210–215.
- [76] SINOPOLI, A.: *Nonlinear Dynamic Analysis of Multiblock Structures*. Structural Dynamics, W. B. Kratzig et al. eds., vol. I, Balkema, Rotterdam 1991.
- [77] SMITH, C. E.: *Predicting Rebounds Using Rigid Body Dynamics*. J. of Appl. Mech., Bd. 58 (1991) Nr. 9, S. 754–758.
- [78] SMITH, C. E., LIU, P-P.: *Coefficients of Restitution*. J. of Appl. Mech., Bd. 59 (1992) Nr. 12, S. 963–969.
- [79] STEGER, G.: *Wellenmechanische Untersuchung nichtplastischer Stöße von rotationssymmetrischen Körpern*. Diplomarbeit am Lehrstuhl B für Mechanik, TU-München. München 1997.
- [80] STOJANOVICI, D., HURMUZLU, Y.: *A Critical Study of the Applicability of Rigid-Body Collision Theory*. J. of Appl. Mech., Bd. 63 (1996), Nr. 6, S. 307–316.
- [81] STRONGE, W. J.: *Rigid Body Collisions with Friction*. Proc. Roy. Soc. Lond., Bd. A431 (1990) S. 169–181.

- [82] STRONGE, W. J.: *Unraveling Paradoxical Theories for Rigid Body Collisions*. J. of Appl. Mech., Bd. 58 (1991) Nr. 12, S. 1049–1055.
- [83] STRONGE, W. J.: *Friction in Collisions: Resolution of a Paradox*. J. Appl. Phys., Bd. 69 (1991), S. 610–612.
- [84] STROUSTRUP, B.: *Die C++ Programmiersprache*. Bonn: Addison-Wesley 1992.
- [85] VILLAGGIO, P.: *The Rebound of an Elastic Sphere Against a Rigid Wall*. J. of Appl. Mech., Bd. 63 (1996), Nr. 6, S. 259–263.
- [86] WANG, Y., MASON, M., T.: *Two-Dimensional Rigid-Body Collisions with Friction*. J. of App. Mech., Bd. 59 (1992) Nr. 8, S. 635–642.
- [87] WANG, Y., MASON, M., T.: *Modelling Impact Dynamics for Robotic Operations*. IEEE CH2413-3, (1987) S. 635–642.
- [88] WITTENBURG, J.: *Dynamics of Systems of Rigid Bodies*. Stuttgart: Teubner 1977.
- [89] WHISTON, G. S.: *Singularities in Vibro-Impact Dynamics*. J. of Sound and Vibr., Bd 152 (1992), Nr. 3, S. 427-460
- [90] WÖSLE, M.: *Starrkörpersysteme mit Reibkontakten* Fortschr.-Ber. VDI Reihe 18 Nr. 213. Düsseldorf: VDI-Verlag 1997.
- [91] WOLFSTEINER, P., PFEIFFER, F.: *Dynamics of a Vibratory Feeder*. ASME, DETC/VIB-3905 (1997), S. 1–9.
- [92] ZUKAS, J. A.: *Impact Dynamics*. New York: Wiley & Sons 1982.
- [93] ZUKAS, J. A.: *High Velocity Impact Dynamics*. New York: Wiley & Sons 1990.