TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Prof. Dr. R. Chill
Institut für Analysis
2012

Übungen zur Funktionalanalysis II

Blatt 1

(1) **Spektrum von Shiftoperatoren auf ℓ^p.** Sei $X = \ell^p(\mathbb{N})$ $(1 \leq p \leq \infty)$. Berechnen Sie die Norm, das Spektrum und das Punktspektrum des Linksshiftoperators $L \in \mathcal{L}(X)$ und des Rechtsshiftoperators $R \in \mathcal{L}(X)$. Hierbei ist

$$Lx = L(x_0, x_1, x_2, \dots) := (x_1, x_2, x_3, \dots) \quad (x \in X),$$

und

$$Rx = R(x_0, x_1, x_2, \dots) := (0, x_0, x_1, \dots) \quad (x \in X).$$

(2) **Spektrum von Multiplikationsoperatoren auf ℓ^p.** Sei $X = \ell^p$ $(1 \leq p \leq \infty)$. Für eine gegebene Folge $m = (m_n)_n \in \ell^\infty$ definiert man den Multiplikationsoperator $M \in \mathcal{L}(X)$ durch

$$Mx = M(x_n)_n := (m_n x_n)_n \quad (x \in X).$$

Berechnen Sie die Norm, das Spektrum und das Punktspektrum dieses Multiplikationsoperators.

(3) Zeigen Sie, daß jede kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{C}$ Spektrum eines geeigneten beschränkten Operators auf einem geeigneten Banachraum sein kann.

(4) **Spektrum einer Isometrie.** Sei $T \in \mathcal{L}(X)$ eine Isometrie auf einem komplexen Banachraum X, d.h. $\|Tx\| = \|x\|$ für alle $x \in X$. Zeigen Sie, daß entweder $\sigma(T) = \bar{\mathbb{D}}$ oder $\sigma(T) \subseteq \partial\mathbb{D}$ gilt.
Notation: Hier ist $\mathbb{D} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$.
Hinweis: Neumannreihe.

(5) **Spektrum eines Ableitungsoperators.** Sei $X := \{f \in C([0,1]) : f(0) = 0\}$, versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Desweiteren sei

$$\begin{aligned} \operatorname{dom} A &:= \{f \in C^1([0,1]) : f(0) = f'(0) = 0\}, \\ Af &:= f'. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß $(A, \operatorname{dom} A)$ ein abgeschlossener Operator ist mit $\sigma(A) = \emptyset$.

(6) Zeigen Sie für einen abgeschlossenen, dicht definierten, linearen Operator $(A, \operatorname{dom} A)$ auf einem Banachraum X die Relationen

$$\begin{aligned} (\ker A)^\perp &\supseteq \overline{\operatorname{rang} A'} \text{ und} \\ \ker A &= (\operatorname{rang} A')_\perp. \end{aligned}$$