TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Prof. Dr. R. Chill
Institut für Analysis
2012

Übungen zur Funktionalanalysis II

Blatt 2

(7) **Spektraler Abbildungssatz.** Für eine Menge $B \subseteq \mathbb{C}$ und eine Funktion $f : B \to \mathbb{C}$ definieren wir

$$f(B) := \{f(\lambda) : \lambda \in B\}.$$

(a) Sei $(A, \operatorname{dom} A)$ ein abgeschlossener, linearer Operator auf einem Banachraum X, $0 \in \varrho(A)$. Dann gilt

$$\sigma(A)^{-1} \setminus \{0\} = \sigma(A^{-1}) \setminus \{0\}.$$

(b) Sei T ein beschränkter, linearer Operator auf einem Banachraum X, und sei $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom, $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$. Setze $p(T) := \sum_{k=0}^n a_k T^k$. Dann gilt

$$p(\sigma(T)) = \sigma(p(T)).$$

(8) **Fredholmoperator.** Seien X und Y zwei Banachräume. Sei $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ ein Isomorphismus, und sei $T \in \mathcal{K}(X, Y)$. Zeigen Sie, daß dann $S + T$ ein Fredholmoperator mit Fredholmindex 0 ist.

(9) **Kernoperator.** Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ eine beliebige, bechränkte Menge. Für ein gegebenes $k \in C(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega})$ definieren wir den zugehörigen *Kernoperator* $K : C(\bar{\Omega}) \to C(\bar{\Omega})$ durch

$$Kf(x) := \int_{\bar{\Omega}} k(x, y) f(y)\, dy \quad (f \in C(\bar{\Omega}),\ x \in \bar{\Omega}).$$

Zeigen Sie, daß K kompakt ist.
Hinweis: Satz von Arzelá-Ascoli.

(10) **Integralgleichung.** Sei $k \in C([0, 1] \times [0, 1])$ gegeben. Geben Sie eine Bedingung dafür an, daß die Integralgleichung

$$f(x) - \int_0^1 k(x, y) f(y)\, dy = g(x) \text{ für alle } x \in [0, 1]$$

für alle $g \in C([0, 1])$ genau eine Lösung $f \in C([0, 1])$ besitzt.
Hinweis: Fredholmalternative.

(11) **Multiplikationsoperator.** Sei $X = \ell^p$ $(1 \le p \le \infty)$. Für eine gegebene Folge $m = (m_n)_n \in \ell^\infty$ definiert man den Multiplikationsoperator $M \in \mathcal{L}(X)$ durch

$$Mx = M(x_n)_n := (m_n x_n)_n \quad (x \in X).$$

Zeigen Sie, daß M genau dann nuklear ist, wenn $m \in \ell^1$.