Prof. Dr. R. Chill
Institut für Analysis
2011/12

# Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 11

**Theorem (Hahn-Banach; geometrische Version).** Sei $X$ ein Banachraum, sei $C \subseteq X$ eine abgeschlossene, nicht-leere, konvexe Menge, und $x_0 \in X \setminus C$. Dann gibt es ein $x' \in X'$ und ein $\varepsilon > 0$, so daß für alle $x \in C$

$$\mathrm{Re}\,\langle x', x\rangle + \varepsilon \leq \mathrm{Re}\,\langle x', x_0\rangle.$$

(33) Sei $X$ ein Banachraum, sei $C \subseteq X$ eine abgeschlossene, konvexe Menge, und $(x_n)$ eine Folge in $C$. Zeigen Sie: falls $(x_n)$ schwach gegen $x \in X$ konvergiert, dann ist $x \in C$.

**Bemerkung:** Eine konvexe Teilmenge eines Banachraums ist genau dann (norm-) abgeschlossen, wenn sie schwach abgeschlossen ist. **Mazurs Lemma:** Zu jeder schwach konvergenten Folge in einem Banachraum gibt es eine Folge von Konvexkombinationen dieser Folge, die (norm-) konvergiert.

(34) **Minimierung von konvexen Funktionalen.** Sei $X$ ein Banachraum. Eine Funktion $\mathcal{E} : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ist

(i) *konvex*, falls für alle $x$, $y \in X$ und alle $\lambda \in [0, 1]$

$$\mathcal{E}(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\mathcal{E}(x) + (1-\lambda)\mathcal{E}(y),$$

(ii) *koerziv*, falls für alle $c \in \mathbb{R}$ die Menge $\{\mathcal{E} \leq c\}$ beschränkt ist,

(iii) *unterhalbstetig*, falls für alle $c \in \mathbb{R}$ die Menge $\{\mathcal{E} \leq c\}$ abgeschlossen ist.

Zeigen Sie, daß auf einem reflexiven Banachraum $X$ jede konvexe, koerzive, unterhalbstetige Funktion $\mathcal{E} : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ihr Infimum annimmt, d.h. es gibt ein $x_0 \in X$, so daß

$$\mathcal{E}(x_0) = \inf_{x \in X} \mathcal{E}(x).$$

(35) **Dunford-Pettis Operatoren.** Ein Operator $T : X \to Y$ zwischen zwei Banachrümen $X$ und $Y$ heißt *Dunford-Pettis Operator*, wenn er schwach konvergente Folgen auf (norm-) konvergente Folge abbildet, d.h. falls für alle Folgen $(x_n)$ in $X$ und alle $x \in X$ gilt:

$$x_n \rightharpoonup x \quad \Rightarrow \quad Tx_n \to x.$$

Zeigen Sie: wenn $X$ ein reflexiver Banachraum ist, dann ist jeder Dunford-Pettis Operator $T : X \to Y$ kompakt (ein Operator $T$ heißt *kompakt*, wenn das Bild der Einheitskugel in $X$ unter $T$ relativ kompakt ist).

(36) **Banachlimes.** Sei $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N};\mathbb{R})$. Ein Funktional $\varphi \in (\ell^\infty)'$ heißt *Banachlimes*, falls gilt:

(i) $\varphi$ ist *positiv*, d.h. $\varphi(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0$.

(ii) $\varphi \circ L = \varphi$, wobei $L$ der Linksshiftoperator auf $\ell^\infty$ ist.

(iii) $\varphi(\mathbf{1}) = 1$.

Zeigen Sie:

(a) Jeder Banachlimes $\varphi \in (\ell^\infty)'$ ist *monoton*, d.h. für alle $x,\, y \in \ell^\infty$ gilt: $x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$.

(b) Für alle $x \in \ell^\infty$ und jden Banachlimes $\varphi \in (\ell^\infty)'$ ist $|\varphi(x)| \leq \varphi(|x|)$, wobei $|x| = (|x_n|)_n$.

(c) Für alle $x \in \ell^\infty$ und jden Banachlimes $\varphi \in (\ell^\infty)'$ ist $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \varphi(x) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$.

(d) Es gibt keinen multiplikativen Banachlimes, d.h. für jeden Banachlimes $\varphi \in (\ell^\infty)'$ gibt es $x,\, y \in \ell^\infty$, so daß $\varphi(x \cdot y) \neq \varphi(x)\,\varphi(y)$.

(e) Es gibt einen Banachlimes.

**Hinweis:** Zeigen Sie, daß das Funktional $p : \ell^\infty \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \limsup_{n\to\infty} x_n$ sublinear ist, und setzen Sie das Funktional $c \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lim_{n\to\infty} x_n$ mit dem Satz von Hahn-Banach auf $\ell^\infty$ fort.