TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Prof. Dr. R. Chill
Institut für Analysis
2011/12

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 3

(12) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, sei $Y \subseteq X$ ein Unterraum, und sei X/Y der zugehörige Quotientenraum. Für alle Elemente $x + Y \in X/Y$ definiert man

$$\|x + Y\|_{X/Y} := \inf\{\|x - y\| : y \in Y\}.$$

Zeigen Sie, daß $\|\cdot\|_{X/Y}$ genau dann eine Norm auf dem Quotientenraum X/Y ist, wenn Y abgeschlossen in X ist. Zeigen Sie desweiteren, daß, falls X ein Banachraum und Y ein abgeschlossener Unterraum ist, $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ ein Banachraum ist.

(13) Es sei $l^p = l^p(\mathbb{N})$ der Raum aller p-summierbaren Folgen $(1 \leq p < \infty)$, und es sei $1 < p' \leq \infty$, so daß $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

(a) Zeigen Sie, daß für alle $y = (y_k) \in l^{p'}$

$$\begin{aligned} \varphi_y : l^p &\to \mathbb{K}, \\ (x_k) &\mapsto \sum_k x_k y_k \end{aligned}$$

ein beschränktes, lineares Funktional auf l^p definiert. Berechnen Sie $\|\varphi_y\|_{l^p}$.

(b) Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} J : l^{p'} &\to (l^p)', \\ y &\mapsto \varphi_y \end{aligned}$$

ein isometrischer Isomorphismus ist.

Sie zeigen hier, daß der Dualraum $(l^p)'$ aller beschränkten, linearen Funktionale auf l^p isometrisch isomorph zum Folgenraum $l^{p'}$ ist. Man sagt deswegen oft, daß der Dualraum $(l^p)'$ *gleich* $l^{p'}$ ist, was man nur in diesem obigen Sinne verstehen muß. Die beiden Räume sind als Mengen natürlich nicht gleich.

(14) Es sei $c_0 = c_0(\mathbb{N})$ der Raum aller summierbaren Folgen.

(a) Zeigen Sie, daß für alle $y = (y_k) \in l^1$

$$\begin{aligned} \varphi_y : c_0 &\to \mathbb{K}, \\ (x_k) &\mapsto \sum_k x_k y_k \end{aligned}$$

ein beschränktes, lineares Funktional auf c_0 definiert. Berechnen Sie $\|\varphi_y\|_{c_0}$.

(b) Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} J : l^1 &\to (c_0)', \\ y &\mapsto \varphi_y \end{aligned}$$

ein isometrischer Isomorphismus ist.

Analog zur Aufgabe 13 haben Sie hier $(c_0)' = l^1$ gezeigt (bitte das Gleichheitszeichen richtig verstehen: die Banachräume sind isomorph, aber die Mengen sind nicht gleich). Bitte ersetzen Sie in dieser Aufgabe den Raum c_0 auch durch den Raum c aller konvergenten Folgen. Was erhalten Sie für c'?