TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Prof. Dr. R. Chill
Institut für Analysis
2011/12

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 4

(15) Zeigen Sie, daß der Raum c der konvergenten Folgen und der Raum c_0 der Nullfolgen (jeweils mit der Supremumsnorm versehen) isomorph sind.

(16) (a) Es sei $\| \cdot \|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^N$, und B die abgeschlossene Einheitskugel bezüglich dieser Norm. Zeigen Sie, daß die Menge B

(i) konvex (d.h. für alle x, $y \in B$ und alle $t \in [0,1]$ gilt $tx + (1-t)y \in B$),

(ii) symmetrisch (d.h. $B = -B$) und

(iii) erzeugend ist (d.h. $\bigcup_{\lambda > 0} \lambda B = \mathbb{R}^N$).

(b) **(Minkowskinorm)** Sei $B \subseteq \mathbb{R}^N$ eine abgeschlossene, beschränkte, konvexe, symmetrische, erzeugende Menge. Zeigen Sie, daß durch

$$\|x\| := \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda B\} \qquad (x \in \mathbb{R}^N)$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^N$ definiert wird, und daß B gerade die abgeschlossene Einheitskugel für diese Norm ist.

(17) **(Volterraoperator)** Zeigen Sie, daß der lineare Operator $V : C([0,1]) \to C([0,1])$, $f \mapsto Vf$, der durch

$$(Vf)(t) := \int_0^t f(s)\, ds \qquad (f \in C([0,1]),\ t \in [0,1])$$

gegeben ist, beschränkt ist. Berechnen Sie $\|V\|$. Zeigen Sie, daß das Bild der Einheitskugel unter V relativ kompakt in $C([0,1])$ ist.

(18) Sei X ein normierter Raum. Zeigen Sie, daß es keine Operatoren P, $Q \in \mathcal{L}(X)$ gibt, so daß $PQ - QP = I$.

Zeigen Sie, daß, falls es solche Operatoren P, $Q \in \mathcal{L}(X)$ gäbe, die Gleichung $PQ^n - Q^nP = nQ^{n-1}$ für alle $n \geq 1$ gelten muß. Leiten Sie daraus einen Widerspruch her.