Aufgabe 3:

Beh.: $(C([0,1]), \|\cdot\|_1)$ ist nicht vollständig.

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$$

Beweis:

Setze

$$f_n(x) = \begin{cases} (2x)^n &, x \in [0, \tfrac{1}{2}], \\ 1 &, x \in]\tfrac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Dann gilt $f_n \in C([0,1])$ und für alle n, m mit $n \leq m$ gilt

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} |(2x)^n - (2x)^m|\,dx \leq$$

$$\leq \int_0^{\frac{1}{2}} (2x)^n\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{(n+1)!}.$$

Aus diese Abschätzung folgt, daß (f_n) eine Cauchyfolge in $(C([0,1]), \|\cdot\|_1)$ ist. Angenommen, es existiert ein $f \in C([0,1])$, so daß $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$, d.h. (f_n) konvergiert in $(C([0,1]), \|\cdot\|_1)$ gegen f. Dann gibt es eine Teilfolge (f_{n_k}) die punktweise fast überall gegen f konvergiert, d.h.

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = \begin{cases} 0 &, x \in [0, \tfrac{1}{2}[, \\ 1 &, x \in [\tfrac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

für fast alle $x \in [0,1]$. Dies ist ein Widerspruch zur Stetigkeit von f. Also konvergiert die Folge (f_n) nicht. □