Aufgabe 7:

Beh.: Nicht jede Funktion $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

ist linear (d.h. hier: $\mathbb{R}$-linear).

Beweis:

Wähle eine Vektorraumbasis $(r_i)_{i \in I}$ des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{R}$ ($\rightsquigarrow$ Lemma von Zorn / Auswahlaxiom). Wähle ein $i_0 \in I$ und definiere zuerst

$$\varphi(r_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = i_0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weil $(r_i)_{i \in I}$ eine Basis ist, kann man φ eindeutig zu einer $\mathbb{Q}$-linearen Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fortsetzen, d.h.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

und $\forall q \in \mathbb{Q}\ \forall x \in \mathbb{R}: \ \varphi(qx) = q \cdot \varphi(x)$.

Für $i \in I$ mit $i \neq i_0$ gilt aber

$$1 = \varphi(r_{i_0}) = \varphi\left(\frac{r_{i_0}}{r_i} r_i\right) \neq$$

$$\neq \frac{r_{i_0}}{r_i} \varphi(r_i) = 0$$

und somit ist φ nicht $\mathbb{R}$-linear.

$\square$