

Université de Metz

Master 1 de Mathématiques

1er semestre

Introduction aux équations aux dérivées partielles

par Ralph Chill

Laboratoire de Mathématiques et Applications de Metz

Année 2010/11

Contenu

Introduction	5
1. Notations	5
2. Exemples d'équations à dérivées partielles	6
Chapitre 1. Equations à dérivées partielles du premier ordre	7
1. La méthode des caractéristiques	7
2. Lois de conservation, solutions intégrales	11
3. L'équation des ondes en une dimension	18
4. Commentaires sur le deuxième chapitre	20
Chapitre 2. L'opérateur de Laplace	21
1. Convolution et régularisation	21
2. Fonctions harmoniques et principe du maximum	23
3. Solution fondamentale	26
4. Le problème de Dirichlet (fonctions de Green)	29
5. Le problème de Dirichlet (solution de Perron)	33
Chapitre 3. L'équation de la chaleur	37
1. Le noyau de la chaleur	37
2. Séparation des variables et séries de Fourier	39
3. Principe de comparaison	42
Chapitre 4. L'équation des ondes dans \mathbb{R}^n	45
1. Moyennes sphériques	45
2. Solution de l'équation des ondes dans \mathbb{R}^3	47
3. Solution de l'équation des ondes dans \mathbb{R}^2	48
Chapitre 5. Annexe	51
1. La mesure de surface sur la sphère dans \mathbb{R}^n	51
2. Intégration par parties sur une boule	54
3. Intégration par parties sur un ouvert régulier	56
Bibliographie	61

Introduction

1. Notations

Dans tout ce qui suit, soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $n \geq 1$. En général, les éléments de Ω seront notés x, y, \dots avec $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$, $y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$. Dans quelques exemples, les éléments de Ω seront notés (t, x) où t représente une variable réelle (le temps) et $x \in \mathbb{R}^{n-1}$.

1.1. Dérivées partielles du premier ordre. Soit $u \in C^1(\Omega)$. On utilisera les notations suivantes pour la dérivée partielle en $x \in \Omega$ par rapport à x_i :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \text{ ou} \\ & \partial_{x_i} u(x) \text{ ou} \\ & \partial_i u(x) \text{ ou} \\ & u_{x_i}(x). \end{aligned}$$

1.2. Dérivées partielles d'ordre supérieur. Pour les dérivées partielles d'ordre supérieure d'une fonction $u \in C^k(\Omega)$ on utilisera les multi-indices. Un *multi-indice* est un élément $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Pour tout multi-indice α on définit

$$D^\alpha u(x) := \partial^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}(x),$$

où $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq k$ est la *longueur* de α .

1.3. Dérivées totales. La *dérivée totale* ou *dérivée de Fréchet* ou simplement la *dérivée* d'une fonction $u \in C^1(\Omega)$ en un point $x \in \Omega$ est notée $Du(x)$. Par définition, la dérivée totale est une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . Cette application linéaire peut être identifiée à un vecteur de \mathbb{R}^n qu'on appelle aussi le *gradient* de u en x , noté $\nabla u(x)$. On a

$$\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right)_{1 \leq i \leq n}.$$

La *dérivée seconde* d'une fonction $u \in C^2(\Omega)$ est la dérivée de la fonction $Du \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$, et elle est notée D^2u . Par définition, c'est une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n ou bien une application bi-linéaire de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R} . On peut identifier la dérivée seconde en un point $x \in \Omega$ à une matrice dans $\mathbb{R}^{n \times n}$ qu'on appelle la *matrice*

hessienne, notée $H_u(x)$. On a

$$H_u(x) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

On ne va pas considerer des dérivées d'ordre supérieur à 2.

2. Exemples d'équations à dérivées partielles

2.1. L'équation de transport.

$$\begin{cases} u_t(t, x) + b u_x(t, x) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2.2. L'équation de Hamilton-Jacobi.

$$\begin{cases} u_t(t, x) + f(\nabla u(t, x)) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

2.3. Loi de conservation.

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \partial_x f(u(t, x)) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2.4. L'équation de Laplace.

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

2.5. L'équation de Poisson.

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

2.6. L'équation de la chaleur.

$$\begin{cases} u_t(t, x) - \Delta u(t, x) = 0, & t > 0, x \in \Omega, \\ u(t, x) = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega, \\ u(0, x) = g(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

2.7. L'équation des ondes.

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - \Delta u(t, x) = 0, & t > 0, x \in \Omega, \\ u(t, x) = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega, \\ u(0, x) = g(x), & x \in \Omega \\ u_t(0, x) = h(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

CHAPITRE 1

Equations à dérivées partielles du premier ordre

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, u, p) \mapsto F(x, u, p)$ une fonction de classe C^1 . L'équation à dérivées partielles du premier ordre est l'équation

$$(1.1) \quad F(x, u(x), \nabla u(x)) = 0 \text{ pour tout } x \in \Omega.$$

Cette équation est parfois complétée d'une condition "au bord":

$$(1.2) \quad u(x) = g(x) \text{ pour tout } x \in \Gamma,$$

où Γ est un sous-ensemble du bord $\partial\Omega$ et $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée. Parfois Γ est seulement un sous-ensemble de $\bar{\Omega}$; dans ce cas la condition (1.2) n'est pas forcément une condition au bord, mais on peut l'appeler une condition complémentaire.

Dans ce chapitre on veut essayer de résoudre l'équation (1.1). Plus précisément, on cherche une *solution classique*, c.à.d. une fonction $u \in C^1(\Omega)$ tel que l'équation (1.1) est vérifiée. Dans certains cas, on exige aussi que $u \in C(\bar{\Omega})$ est que u vérifie aussi la condition complémentaire (1.2).

On verra dans ce chapitre que l'équation à dérivées partielles du premier ordre n'admet pas toujours une solution (classique). Ceci montre une différence par rapport à la théorie des équations différentielles où le théorème de Peano ou le théorème de Cauchy-Lipschitz impliquent qu'on a toujours une solution classique locale sous de très faibles hypothèses. On verra aussi que la notion de solution classique ne suffit pas en général et on va introduire une notion de *solution faible* ou *solution intégrale*.

1. La méthode des caractéristiques

On fait une première observation importante concernant le problème (1.1). On suppose que $u \in C^1(\Omega)$ est une solution classique de (1.1).

Soit $x : I \rightarrow \Omega$ une courbe de classe C^1 définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On pose

$$z(s) := u(x(s)) \text{ et } p(s) := \nabla u(x(s)).$$

Pour un moment, on va supposer que $u \in C^2(\Omega)$. Alors les fonctions z et p sont de classe C^1 sur I , l'une à valeurs réelles, l'autre à valeurs vectorielles. En dérivant les deux fonctions par rapport à s , on obtient

$$\dot{z}(s) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j}(x(s)) \dot{x}_j(s) = \sum_{j=1}^n p_j(s) \dot{x}_j(s)$$

et pour tout $j = 1, \dots, n$,

$$\dot{p}_j(s) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x(s)) \dot{x}_i(s).$$

Puis, en dérivant l'équation (1.1) par rapport à x_j , on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial F}{\partial x_j}(x, u(x), \nabla u(x)) + \frac{\partial F}{\partial u}(x, u(x), \nabla u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_i}(x, u(x), \nabla u(x)) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x). \end{aligned}$$

Supposons que la courbe x est choisie telle que $\dot{x}(s) = \nabla_p F(x(s), z(s), p(s))$. Alors on peut simplifier les trois équations ci-dessus. Les fonctions x , z et p vérifient un système d'équations différentielles, dit le *système des équations différentielles caractéristiques*:

$$\begin{aligned} \dot{x}_j(s) &= \frac{\partial F}{\partial p_j}(x(s), z(s), p(s)) \quad (1 \leq j \leq n), \\ \dot{z}(s) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j}(x(s), z(s), p(s)) p_j(s), \\ \dot{p}_j(s) &= -\frac{\partial F}{\partial x_j}(x(s), z(s), p(s)) - \\ &\quad - \frac{\partial F}{\partial u}(x(s), z(s), p(s)) p_j(s) \quad (1 \leq j \leq n). \end{aligned}$$

Ce système peut servir à montrer l'unicité et l'existence de solutions, et même pour résoudre l'équation (1.1). En fait, la fonction F et donc les dérivées partielles de F sont connues. On essaiera donc de résoudre ce système et d'obtenir ainsi une courbe x , la fonction z (c'est la fonction u restreint à cette courbe) et la fonction p (c'est le gradient de u restreint à cette courbe). Si on trouve "assez" de courbes comme solutions, dans le sens que la réunion des images de toutes ces courbes est tout Ω , on peut espérer de pouvoir trouver/construire une solution u de notre équation de départ (1.1).

EXEMPLE 1.1. Essayons de résoudre l'équation

$$(1.3) \quad \begin{cases} x_1 u_{x_2} - x_2 u_{x_1} = u, & x_1, x_2 > 0, \\ u(x_1, 0) = g(x_1), & x_1 > 0. \end{cases}$$

Ce problème est en effet une EDP du premier ordre et donc un cas particulier de (1.1) et (1.2).

Si on définit l'ouvert

$$\Omega := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 > 0\},$$

et si on définit la fonction $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$F(x_1, x_2, u, p_1, p_2) = x_1 p_2 - x_2 p_1 - u,$$

alors on voit que le problème (1.3) est un cas particulier du problème (1.1). Les équations différentielles caractéristiques sont

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(s) &= -x_2(s), \\ \dot{x}_2(s) &= x_1(s), \\ \dot{z}(s) &= -x_2(s)p_1(s) + x_1(s)p_2(s) = z(s),\end{aligned}$$

avec données initiales

$$x_1(0) = x > 0, \quad x_2(0) = 0 \text{ et } z(0) = g(x).$$

On obtient comme solution de ce système d'équations différentielles:

$$\begin{aligned}(x_1(s), x_2(s)) &= (x \cos s, x \sin s) \text{ et} \\ z(s) &= e^s g(x).\end{aligned}$$

Si on veut alors calculer la solution u du problème (1.3) en un point $(x_1, x_2) \in \Omega$, alors il faut encore résoudre le système

$$\begin{aligned}x_1 &= x \cos s, \\ x_2 &= x \sin s,\end{aligned}$$

c.à.d. calculer x et s en fonction de x_1 et x_2 . On obtient

$$x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \text{ et } s = \arctan \frac{x_2}{x_1}.$$

Finalement, on peut calculer la solution u du problème (1.3):

$$u(x_1, x_2) = g(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) e^{\arctan \frac{x_2}{x_1}}, \quad (x_1, x_2) \in \Omega.$$

On vérifie que c'est vraiment une solution du problème (1.3).

Par la méthode des caractéristiques, on peut aussi résoudre l'équation de transport linéaire.

THÉORÈME 1.2 (Equation de transport linéaire à coefficients variables). *Soient $g, b \in C^1(\mathbb{R})$ tels que $\sup_{x \in \mathbb{R}} |b(x)| < \infty$. Alors il existe une unique solution $u \in C^1([0, \infty) \times \mathbb{R})$ du problème*

$$(1.4) \quad \begin{cases} \partial_t u(t, x) + b(x) \partial_x u(t, x) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = g(x). \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. L'équation de transport est une équation d'évolution, d'où la variable t pour le temps et la variable x pour l'espace. Mais pour utiliser la notation de l'EDP du premier ordre (1.1), on va remplacer t par x_0 et x par x_1 . L'équation (1.4) devient

$$(1.5) \quad \begin{cases} \partial_{x_0} u(x_0, x_1) + b(x_1) \partial_{x_1} u(x_0, x_1) = 0, & x_0 > 0, x_1 \in \mathbb{R}, \\ u(0, x_1) = g(x_1). \end{cases}$$

Si on pose $\Omega := \{(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 : x_0 > 0\}$ et si on définit $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $F(x_0, x_1, u, p_0, p_1) := p_0 + b(x_1)p_1$, alors on voit que l'équation (1.5) est un cas spécial de l'équation (1.1).

Unicité: Soit u une solution du problème (1.5).

Les équations différentielles caractéristiques pour ce problème sont:

$$\begin{aligned}\dot{x}_0(s) &= 1, \\ \dot{x}_1(s) &= b(x_1(s)), \\ \dot{z}(s) &= p_0(s) + b(x_1(s))p_1(s) = 0.\end{aligned}$$

La dernière égalité suit de la définition de z et du fait que u est une solution de (1.5). Le problème (1.5) étant linéaire, il suffit de résoudre ces trois équations différentielles qui sont indépendantes des équations différentielles pour p_0 et p_1 .

Pour les données initiales $x_0(0) = 0$, $x_1(0) = x \in \mathbb{R}$ et $z(0) = u(0, x) = g(x)$ on obtient:

$$\begin{aligned}x_0(s) &= s, \\ z(s) &= z(0) = g(x).\end{aligned}$$

En particulier, on sait que toute solution u est constante sur toute courbe caractéristique.

En général, on ne peut pas résoudre l'équation différentielle $\dot{x}_1(s) = b(x_1(s))$ explicitement, mais d'après la théorie des équations différentielles (théorème de Cauchy-Lipschitz, existence d'une solution maximale) on sait que cette équation différentielle admet pour toute donnée initiale $x_1(0) = x \in \mathbb{R}$ une solution *unique* définie pour tout $s \in \mathbb{R}$ (utiliser que b est localement lipschitzienne et globalement bornée).

Le même argument montre que pour tout point (x_0, x_1) du demi-plan Ω il existe une courbe caractéristique *unique* qui traverse à la fois le point (x_0, x_1) et un point unique de la forme $(0, x)$ pour un $x \in \mathbb{R}$ (utiliser que $x_0(s) = s$ et que x_1 est définie globalement).

La solution u étant constante sur toute courbe caractéristique, $u(x_0, x_1)$ est alors déterminée par la valeur de u en $(0, x)$, c.à.d. par $g(x)$. Ceci montre l'unicité d'une solution u de l'équation de transport.

Existence: On utilisera les équations caractéristiques pour définir un candidat de solution. On répète ce que l'on vient de dire sur les courbes caractéristiques: pour tout point (x_0, x_1) du demi-plan Ω il existe une courbe caractéristique *unique* qui traverse à la fois le point (x_0, x_1) et un point unique de la forme $(0, x)$ pour un $x \in \mathbb{R}$. Alors, étant donné un point $(x_0, x_1) \in \Omega$, on prend cette courbe caractéristique et le point $(0, x)$ sur cette courbe, et on définit

$$u(x_0, x_1) := g(x).$$

En exercice, démontrer que la fonction u ainsi définie est de classe C^1 et qu'elle est solution de l'équation de transport. \square

REMARQUE 1.3. On montrera de la même manière que pour tout $g, b, f \in C^1(\mathbb{R})$ tel que $\sup_{x \in \mathbb{R}} |b(x)| < \infty$ le problème non-homogène

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + b(x) \partial_x u(t, x) = f(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = g(x), \end{cases}$$

admet une solution unique.

EXEMPLE 1.4 (Le cas de coefficients constants). Pour tout $g \in C^1(\mathbb{R})$ et tout $b \in \mathbb{R}$, l'équation de transport linéaire à coefficients constants

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + b \partial_x u(t, x) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = g(x), \end{cases}$$

admet une solution unique. Celle-ci est donnée par

$$u(t, x) := g(x - tb).$$

Les équations différentielles caractéristiques sont ici particulièrement simples:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0(s) &= 1, \\ \dot{x}_1(s) &= b, \\ \dot{z}(s) &= 0. \end{aligned}$$

Comme dans la démonstration du Théorème 1.2 on fait l'identification $x_0 \leftrightarrow t$ et $x_1 \leftrightarrow x$.

Plus généralement, le problème

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + b \partial_x u(t, x) = f(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = g(x), \end{cases}$$

admet la solution unique donnée par

$$u(t, x) = g(x - bt) + \int_0^t f(\tau, x - bt + b\tau) d\tau.$$

2. Lois de conservation, solutions intégrales

2.1. Le modèle. On considère l'équation à dérivées partielles

$$(1.6) \quad \begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où $f, g \in C^1(\mathbb{R})$ sont des fonctions données. En fait, dans la suite on suppose que g est seulement continue ou que g est mesurable et localement bornée: $g \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$.

On veut utiliser la méthode des caractéristiques pour montrer unicité et existence de solutions. Si on refait l'identification $t \leftrightarrow x_0$ et $x \leftrightarrow x_1$, alors les équations différentielles caractéristiques pour le problème (1.6) sont

$$\begin{aligned}\dot{x}_0(s) &= 1, \\ \dot{x}_1(s) &= f'(z(s)), \\ \dot{z}(s) &= 0.\end{aligned}$$

Ces trois équations sont déjà indépendantes des variables p_0 et p_1 . Il ne faut donc ni écrire ni résoudre les équations différentielles pour p_0 et p_1 . Les trois équations différentielles pour x_0 , x_1 et z sont complétées de conditions initiales:

$$x_0(0) = 0, \quad x_1(0) = x \in \mathbb{R} \text{ et } z(0) = g(x).$$

Alors on obtient comme solutions:

$$\begin{aligned}x_0(s) &= s, \\ x_1(s) &= x + f'(g(x))s, \\ z(s) &= g(x).\end{aligned}$$

En particulier, les courbes caractéristiques sont des droites, et u est constante sur toute courbe caractéristique.

2.2. L'équation de Burger. Un cas particulier d'une loi de conservation est l'équation de Burger:

$$(1.7) \quad \begin{cases} u_t + u u_x = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Cette équation est un cas particulier d'une loi de conservation si on pose $f(u) = \frac{1}{2}u^2$.

Les courbes caractéristiques sont les droites

$$(x_1(s), x_2(s)) = (s, x + g(x)s)$$

avec $x \in \mathbb{R}$ donné, et $u \equiv g(x)$ sur chaque droite caractéristique.

EXEMPLE 1.5. Si

$$g(x) := \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & x > 0, \end{cases}$$

alors les courbes caractéristiques sont données par

$$(x_1(s), x_2(s)) := \begin{cases} (s, x) & \text{si } x_2(0) = x \leq 0, \\ (s, x(1+s)) & \text{si } x_2(0) = x > 0. \end{cases}$$

Pour tout point $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ il existe une courbe caractéristique unique qui passe par (x_1, x_2) et un point de la forme $(0, x)$.

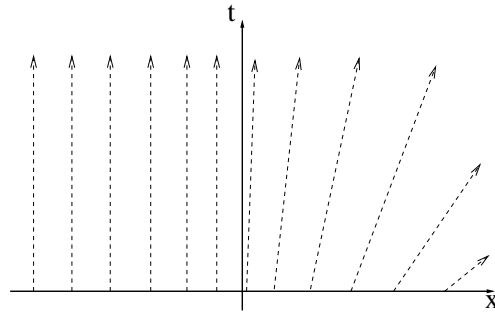


FIGURE 1. Courbes caractéristiques pour l'exemple 1.5

La solution u dans cet exemple est donnée par

$$u(t, x) := \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x}{t+1}, & x > 0, \end{cases}$$

EXEMPLE 1.6. Si

$$g(x) := \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 1 - x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x \geq 1, \end{cases}$$

alors les courbes caractéristiques sont données par

$$(x_1(s), x_2(s)) := \begin{cases} (s, x(1+s)) & \text{si } x_2(0) = x \leq 0, \\ (s, s + (1+s)x) & \text{si } 0 < x_2(0) = x < 1, \\ (s, x) & \text{si } x_2(0) = x \geq 1. \end{cases}$$

On voit dans cet exemple que les courbes caractéristiques s'intersectent dans

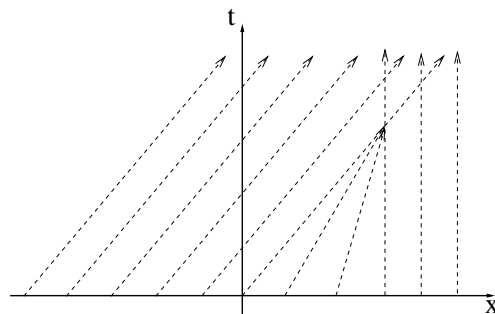


FIGURE 2. Courbes caractéristiques pour l'exemple 1.6

l'ensemble $\{(t, x) : t > 1\}$. Il n'est plus possible de définir une solution u dans cet ensemble à partir de la méthode des caractéristiques.

La solution u dans l'ensemble $\{(t, x) : 0 \leq t \leq 1\}$ est donnée par

$$u(t, x) := \begin{cases} 1, & x \leq t \text{ et } 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{1-x}{1-t}, & 0 \leq t \leq x \leq 1, \\ 0, & x \geq 1 \text{ et } 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

La solution u n'est pas définie pour $t > 1$!

EXEMPLE 1.7. Si

$$g(x) := \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

alors les courbes caractéristiques sont données par

$$(x_1(s), x_2(s)) := \begin{cases} (s, x(1+s)) & \text{si } x_2(0) = x \leq 0, \\ (s, s + (1+s)x) & \text{si } 0 < x_2(0) = x < 1, \\ (s, x) & \text{si } x_2(0) = x \geq 1. \end{cases}$$

On voit dans cet exemple que les courbes caractéristiques ne couvrent pas le

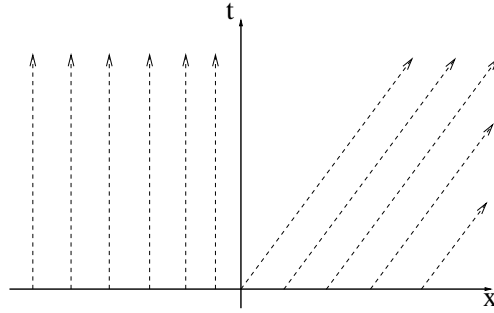


FIGURE 3. Courbes caractéristiques pour l'exemple 1.7

demi-plan Ω ; en particulier, il n'est pas clair comment définir une solution u dans l'ensemble $\{(t, x) : 0 < x < t\}$. Donc, on ne peut pas donner une solution pour $t > 0$.

2.3. Solutions intégrales, condition de Rankine-Hugoniot. Dans ce paragraphe, on définit le demi-plan ouvert $\Omega := \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}$. On écrit $u \in C^1(\bar{\Omega})$ si $u \in C^1(\Omega)$ et si u et ses dérivées partielles sont continues sur $\bar{\Omega}$. Pour une fonction $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ on définit le *support*

$$\text{supp } \varphi := \overline{\{x \in \bar{\Omega} : \varphi(x) \neq 0\}} \subset \bar{\Omega}.$$

Puis on définit l'espace

$$\mathcal{D}(\bar{\Omega}) := C_c^\infty(\bar{\Omega}) := \{\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}) : \text{supp } \varphi \subset \bar{\Omega} \text{ est compact}\}.$$

Les éléments de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ sont les *fonctions de test* sur $\bar{\Omega}$, et $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est l'espace des fonctions de test sur $\bar{\Omega}$.

Si $u \in C^1(\bar{\Omega})$ est une solution (classique) de la loi de conservation (1.6), alors une intégration par parties implique que pour toute fonction de test $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ on a

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\bar{\Omega}} (u_t + f(u)_x) \varphi \, dx \, dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty u \varphi_t \, dt \, dx + \int_{\mathbb{R}} [u \varphi]_{t=0}^\infty \, dx - \\ &\quad - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} f(u) \varphi_x \, dx \, dt + \int_0^\infty [f(u) \varphi]_{x=-\infty}^\infty \, dt \\ &= - \int_{\bar{\Omega}} (u \varphi_t + f(u) \varphi_x) \, dx \, dt - \int_{\mathbb{R}} g(x) \varphi(0, x) \, dx. \end{aligned}$$

DÉFINITION 1.8. On dit que $u \in L_{loc}^\infty(\bar{\Omega})$ est une *solution intégrale* du problème (1.6) si pour toute fonction de test $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ on a

$$\int_{\bar{\Omega}} (u \varphi_t + f(u) \varphi_x) \, dx \, dt + \int_{\mathbb{R}} g(x) \varphi(0, x) \, dx = 0.$$

REMARQUES 1.9. (a) Si $v \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ est une fonction telle que

$$\int_{\bar{\Omega}} v \varphi \, dx \, dt = 0$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, alors $v = 0$. Ce fait va être démontré plus tard.

(b) Si u est une solution intégrale du problème (1.6) et si en plus $u \in C^1(\bar{\Omega})$, alors u est une solution classique du problème (1.6); il suffit d'intégrer par parties et d'utiliser la remarque (a) pour voir ça.

Comment calculer des solutions intégrales? Supposons qu'il existe une courbe $C : t \mapsto (t, x(t))$ de classe C^1 qui divise le demi-plan Ω en deux sous-ensembles $\Omega_- := \{(t, x) \in \Omega : x < x(t)\}$ et $\Omega_+ := \{(t, x) \in \Omega : x > x(t)\}$. Supposons qu'il existe une solution intégrale $u \in L_{loc}^\infty(\bar{\Omega})$ qui est en fait une solution classique à l'intérieure de Ω_- et de Ω_+ . On suppose que pour (presque) tout $s \geq 0$ les limites

$$u_\pm(s) := \lim_{\substack{(t,x) \rightarrow (s,x(s)) \\ (t,x) \in \Omega_\pm}} u(t, x)$$

existent. Alors la définition de solution intégrale et la formule de Green (intégration par parties dans \mathbb{R}^n) impliquent que pour toute fonction de test $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ on a

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) + \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(0, x) dx \\
&= \int_{\Omega_-} u\varphi_t + \int_{-\infty}^{x(0)} g(x)\varphi(0, x) dx + \int_{\Omega_-} f(u)\varphi_x + \\
&\quad + \int_{\Omega_+} u\varphi_t + \int_{x(0)}^{\infty} g(x)\varphi(0, x) dx + \int_{\Omega_+} f(u)\varphi_x \\
&= - \int_{\Omega_-} u_t\varphi + \int_{\partial\Omega_-} u\varphi\nu_t + \int_{-\infty}^{x(0)} g(x)\varphi(0, x) dx - \\
&\quad - \int_{\Omega_-} f(u)_x\varphi + \int_{\partial\Omega_-} u\varphi\nu_x - \\
&\quad - \int_{\Omega_+} u_t\varphi + \int_{\partial\Omega_+} u\varphi\nu_t + \int_{x(0)}^{\infty} g(x)\varphi(0, x) dx - \\
&\quad - \int_{\Omega_+} f(u)_x\varphi + \int_{\partial\Omega_+} u\varphi\nu_x,
\end{aligned}$$

où ν_x et ν_t désignent les deux coordonnées de la normale extérieure à Ω_- ou Ω_+ . Les intégrales sur les bords sont des intégrales par rapport à la mesure de surface.

Rappelons que u est solution classique dans Ω_- et Ω_+ . On a donc

$$\int_{\Omega_{\pm}} (u_t + f(u)_x)\varphi = 0.$$

La frontière de Ω_- consiste des deux courbes $\Gamma_- := \{(0, x) : x \leq x(0)\}$ et $\Gamma := \{(s, x(s)) : s \geq 0\}$ qui sont paramétrées par les fonctions $\gamma_- : (-\infty, x(0)] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $s \mapsto (0, s)$ et $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $s \mapsto (s, x(s))$. L'intégrale sur la frontière de Ω_- est donnée par

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_-} u\varphi\nu_t &= \int_{\Gamma_-} u\varphi\nu_t + \int_{\Gamma} u\varphi\nu_t \\
&= \int_{-\infty}^{x(0)} u(\gamma_-(s))\varphi(\gamma_-(s))\nu_t(\gamma_-(s))|\gamma'_-(s)| ds + \\
&\quad + \int_0^{\infty} u(\gamma(s))\varphi(\gamma(s))\nu_t(\gamma(s))|\gamma'(s)| ds.
\end{aligned}$$

Sur Γ_- on a $\nu_t = -1$ et $\nu_x = 0$, ce qui implique

$$\int_{\Gamma_-} u\varphi\nu_t = - \int_{-\infty}^{x(0)} u(0, x)\varphi(0, x) dx = - \int_{-\infty}^{x(0)} g(x)\varphi(0, x) dx.$$

Sur Γ on a $\nu_t = -\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}$ et $\nu_x = \frac{1}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}$ ce qui implique,

$$\int_{\Gamma} u\varphi\nu_t = - \int_0^{\infty} u_-(s, x(s))\varphi(s, x(s))\dot{x}(s) ds$$

et

$$\int_{\Gamma} f(u) \varphi \nu_x = \int_0^{\infty} f(u_-(s, x(s))) \varphi(s, x(s)) ds.$$

La frontière de Ω_+ consiste des deux courbes $\Gamma_+ := \{(0, x) : x \geq x(0)\}$ et Γ comme défini ci-dessus. On notera seulement que sur Γ la normale extérieure change maintenant de signe (par rapport à la normale extérieure à Ω_-). On obtient finalement

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{\infty} (f(u_-(s, x(s))) - f(u_+(s, x(s)))) \varphi(s, x(s)) ds - \\ &\quad - \int_0^{\infty} (u_-(s, x(s)) - u_+(s, x(s))) \varphi(s, x(s)) \dot{x}(s) ds \end{aligned}$$

Cette égalité est alors une condition nécessaire et aussi suffisante (il suffit de refaire le calcul ci-dessus inversement) pour que u soit solution intégrale. Cette égalité est vraie pour toute fonction de test $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ si la condition suivante est vérifiée:

$$(1.8) \quad (u_+ - u_-) \dot{x}(s) = (f(u_+) - f(u_-)) \text{ pour tout } s \geq 0.$$

Cette condition est appelé la *condition de Rankine-Hugoniot*. Si on connaît les fonctions u_+ et u_- (et si $u_+(s) \neq u_-(s)$), alors la condition de Rankine-Hugoniot est une équation différentielle pour la fonction x . Elle nous permet de calculer éventuellement la courbe x et donc une solution intégrale.

EXEMPLE 1.10. On reconsidère l'équation de Burger (1.7) avec donnée initiale comme dans l'exemple 1.6. En fait, dans l'exemple 1.6, on a déjà défini une solution u pour $0 \leq t \leq 1$. Il suffit de prolonger la solution en une solution intégrale pour $t \geq 1$. Alors, on veut en fait résoudre l'équation de Burger pour la donnée initiale

$$g(x) = u(1, x) = \begin{cases} 1, & x \leq 1, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Soit u une solution intégrale de l'équation de Burger pour cette donnée initiale, et soit $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $x(0) = 1$ (le point de discontinuité de la donnée initiale) et telle que u est solution classique dans les ensembles $\Omega_+ = \{(t, x) : x > x(t)\}$ et $\Omega_- = \{(t, x) : x < x(t)\}$. En fait, par la donnée initial on voit que $u = 0$ dans Ω_+ et $u = 1$ dans Ω_- . La condition de Rankine-Hugoniot devient,

$$-\dot{x}(s) = -\frac{1}{2}, \quad s \geq 0,$$

parce que $f(u) = \frac{1}{2}u^2$. Donc, $x(s) = 1 + \frac{1}{2}s$.

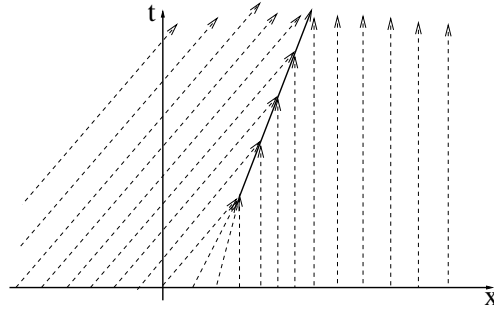


FIGURE 4. Courbes caractéristiques pour l'exemple 1.10

Une solution intégrale u de l'équation de Burger avec donnée initiale comme dans l'exemple 1.6 est alors

$$u(t, x) := \begin{cases} 1, & x \leq t \text{ et } 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{1-x}{1-t}, & 0 \leq t \leq x \leq 1, \\ 0, & x \geq 1 \text{ et } 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & t > 1 \text{ et } x < \frac{t+1}{2}, \\ 0, & t > 1 \text{ et } x > \frac{t+1}{2}. \end{cases}$$

REMARQUE 1.11. En général, les solutions intégrales ne sont pas uniques! Par exemple,

$$u(t, x) := \begin{cases} 0, & x < \frac{t}{2}, \\ 1, & x > \frac{t}{2}, \end{cases}$$

et

$$u(t, x) := \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x}{t}, & 0 < x < t, \\ 1, & x \geq t, \end{cases}$$

sont des solutions intégrales de l'équation de Burger avec donnée initiale comme dans l'exemple 1.7.

3. L'équation des ondes en une dimension

3.1. L'équation des ondes sur \mathbb{R} . Nous considérons l'équation des ondes en une dimension:

$$(1.9) \quad \begin{cases} u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0, x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Les fonctions $u_0, u_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont données. L'équation des ondes est une équation à dérivées partielles du deuxième ordre, mais on peut la réécrire comme un système

d'équations à dérivées partielles du premier ordre. On observe qu'on peut factoriser l'équation (ou l'opérateur différentiel) des ondes:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u = u_{tt} - u_{xx} = 0.$$

Si on pose $v(t, x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u(t, x)$, alors on obtient un système d'équations de transport pour les fonctions u et v :

$$\begin{cases} v_t + v_x = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u_t - u_x = v, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ v(0, x) = u_1(x) - u'_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Comme dans l'Exemple 1.4, on obtient comme solution:

$$v(t, x) = a(x - t),$$

où $a(x) = v(0, x)$, et

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u_0(x + t) + \int_0^t v(\tau, x + t - \tau) d\tau \\ &= u_0(x + t) + \int_0^t a(x + t - 2\tau) d\tau \\ &= u_0(x + t) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} a(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Par définition,

$$a(x) = v(0, x) = u_t(0, x) - u_x(0, x) = u_1(x) - u'_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

On obtient alors la solution u de l'équation des ondes par la formule de d'Alembert:

$$(1.10) \quad u(t, x) = \frac{1}{2}(u_0(x + t) + u_0(x - t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(\tau) d\tau.$$

THÉORÈME 1.12. *Pour tout $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ et tout $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ l'équation des ondes (1.9) admet une solution $u \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ unique. Celle-ci est donnée par la formule de d'Alembert (1.10).*

3.2. L'équation des ondes sur un intervalle borné. On considère maintenant l'équation des ondes sur un intervalle borné avec conditions au bord de Dirichlet:

$$(1.11) \quad \begin{cases} u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0, & t > 0, x \in (0, L), \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, & t \geq 0, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in (0, L), \\ u_t(0, x) = u_1(x), & x \in (0, L). \end{cases}$$

Ici, les fonctions $u_0, u_1 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ sont données.

Le problème (1.11) est aussi l'équation d'une corde vibrante. L'intervalle $(0, L)$ représente la corde, la valeur $u(t, x)$ le déplacement (en direction orthogonale) en temps $t \geq 0$ d'un point x de la corde. La condition au bord de Dirichlet veut dire que les deux extrémités de la corde sont fixées (pas de déplacement possible). La fonction u_0 est le déplacement initial de la corde, la fonction u_1 est la vitesse initiale de la corde.

THÉORÈME 1.13. *Pour tout $u_0 \in C^2([0, L])$ tel que $u_0(0) = u_0(L) = 0$ et pour tout $u_1 \in C^1([0, L])$ il existe une solution $u \in C^2(\mathbb{R}_+ \times [0, L])$ unique du problème (1.11).*

DÉMONSTRATION. *Unicité:* Par linéarité, il suffit de montrer que si u est une solution de (1.11) pour les données initiales $u_0 = u_1 \equiv 0$, alors $u = 0$. Soit donc u une solution pour ces données initiales. On prolonge la solution u en une fonction impaire (par rapport à la variable x) sur $\mathbb{R}_+ \times [-L, L]$ et puis en une fonction $2L$ -périodique (par rapport à la variable x) sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. La fonction ainsi obtenue est une solution de l'équation des ondes sur \mathbb{R} (problème (1.9)) pour les données initiales $u_0 = u_1 \equiv 0$. Par unicité (Théorème 1.12), on a $u = 0$.

Existence: On prolonge les fonctions u_0 et u_1 en des fonctions impaires sur l'intervalle $[-L, L]$ et puis en des fonctions $2L$ -périodiques sur tout \mathbb{R} . Les fonctions qu'on obtient ainsi seront aussi appelées u_0 et u_1 . On définit u comme dans la formule d'Alembert. Alors on montre facilement que la restriction de cette fonction u à l'ensemble $\mathbb{R}_+ \times [0, L]$ est une solution du problème (1.11). \square

4. Commentaires sur le deuxième chapitre

On récapitule ici quelques propriétés des équations à dérivées partielles du premier ordre qu'on a vu dans ce chapitre:

- On a vu que la méthode des caractéristiques nous donne une possibilité de résolution explicite ou au moins une possibilité de démontrer existence et (surtout) unicité de solutions. Le problème du premier ordre est réduit à la résolution d'un système d'équations différentielles.

- Néanmoins, la méthode des caractéristiques ne marche pas toujours et on n'a en fait pas toujours existence d'une solution classique. On est obligé de considérer des solutions faibles pour lesquelles on n'a pas toujours unicité. En général, pour montrer unicité des solutions faibles, on a besoin d'une théorie supplémentaire.

- Les équations à dérivées partielles du premier ordre ne sont pas régularisantes: les solutions (si elles existent) ont la même régularité que les données initiales (voir l'équation du transport linéaire). Si la donnée initiale est par exemple de classe C^k , alors la solution est de classe C^k aussi, mais en général pas mieux. Des fois, on a même une perte de régularité (voir l'équation de Burger): on a vu des solutions (intégrales) non continues pour des données initiales continues.

CHAPITRE 2

L'opérateur de Laplace

Dans ce chapitre on va étudier le problème

$$(2.1) \quad \begin{cases} \lambda u(x) - \Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions données, et Δ est l'opérateur de Laplace:

$$\Delta u(x) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x).$$

1. Convolution et régularisation

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. On définit

$$L_{loc}^1(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u|_K \in L^1(K) \text{ pour tout } K \subset \Omega \text{ compact}\}$$

l'espace des fonctions localement intégrables (par rapport à la mesure de Lebesgue) sur Ω . Cet espace contient $L^p(\Omega)$ ($1 \leq p \leq \infty$) et $C(\Omega)$.

On définit aussi

$$\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } \varphi \subset \Omega \text{ et supp } \varphi \text{ compact}\}$$

l'espace des fonctions de test sur Ω . Ici,

$$\text{supp } \varphi := \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}} \text{ (fermeture dans } \mathbb{R}^n)$$

est le *support* d'une fonction $\varphi \in C^\infty(\Omega)$.

EXEMPLE 2.1. Soit

$$\varphi(x) := \begin{cases} \exp(-\frac{1}{1-|x|^2}), & |x|^2 := \sum_{i=1}^n x_i^2 < 1, \\ 0, & |x|^2 \geq 1. \end{cases}$$

Alors $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

DÉFINITION 2.2 (Convolution). Pour toute fonction $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ et toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ on définit la *convolution* $f * \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} f * \varphi(x) &:= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\varphi(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(x-y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

PROPOSITION 2.3. *Pour toute fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ on a $f * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * \varphi)(x) = f * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

DÉMONSTRATION. Continuité de la convolution:

$$\begin{aligned} |f * \varphi(x+h) - f * \varphi(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)(\varphi(x+h-y) - \varphi(x-y)) dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |\varphi(x+h-y) - \varphi(x-y)| dy \\ &\rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0), \end{aligned}$$

parce que f est localement intégrable, φ est continue et à support compact, et $\varphi(x+h-y) \rightarrow \varphi(x-y)$ lorsque $h \rightarrow 0$, uniformément en $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Différentiabilité de la convolution:

$$\begin{aligned} \frac{f * \varphi(x + he_i) - f * \varphi(x)}{h} &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{\varphi(x + he_i - y) - \varphi(x - y)}{h} dy \\ &\rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x - y) dy \\ &= f * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \quad (h \rightarrow 0), \end{aligned}$$

parce que f est localement intégrable, φ est continument différentiable et à support compact, et $\frac{\varphi(x+he_i-y) - \varphi(x-y)}{h} \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x-y)$ lorsque $h \rightarrow 0$, uniformément en $x, y \in \mathbb{R}^n$.

On a donc démontré que la convolution $f * \varphi$ est continue et que les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x_i}(f * \varphi)$ existent en tout point $x \in \mathbb{R}^n$. Comme $\frac{\partial}{\partial x_i}(f * \varphi) = f * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ et comme $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, les dérivées partielles sont toutes continues, et donc $f * \varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Le fait que $f * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ suit maintenant d'un argument de récurrence. \square

Dans la suite, si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert et si $\varepsilon > 0$, alors on définit

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Ici, $\text{dist}(x, A) := \inf\{\|x - y\| : y \in A\}$ est la distance entre un point $x \in \mathbb{R}^n$ et un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$.

DÉFINITION 2.4 (Convolution). Pour toute fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ et toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\text{supp } \varphi \in \bar{B}(0, \varepsilon)$ (boule fermé de centre 0 et de rayon $\varepsilon > 0$) on définit la *convolution* $f * \varphi : \Omega_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f * \varphi(x) := \int_{\Omega} f(y)\varphi(x-y) dy, \quad x \in \Omega_\varepsilon.$$

PROPOSITION 2.5. *Pour toute fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ et toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\text{supp } \varphi \in \bar{B}(0, \varepsilon)$ on a $f * \varphi \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ et*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * \varphi)(x) = f * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon.$$

DÉMONSTRATION. Cette proposition se démontre de la même façon que la Proposition 2.3. \square

2. Fonctions harmoniques et principe du maximum

DÉFINITION 2.6. On dit qu'une fonction $u \in C^2(\Omega)$ est *harmonique* si $-\Delta u = 0$.

Pour la suite on va introduire l'*intégrale moyenne*. Soit $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$ la boule de centre x et de rayon r , et soit $\partial B(x, r)$ la sphère de centre x et de rayon r . Pour une fonction intégrable $u : B(x, r) \rightarrow \mathbb{R}$ l'intégrale moyenne est

$$\oint_{B(x,r)} u(y) dy := \frac{1}{r^n \omega_n} \int_{B(x,r)} u(y) dy,$$

où $r^n \omega_n$ est le volume de la boule de rayon r et ω_n est le volume de la boule unité dans \mathbb{R}^n .

Pour une fonction intégrable $u : \partial B(x, r) \rightarrow \mathbb{R}$ (où intégrable veut dire intégrable par rapport à la mesure de surface) l'intégrale moyenne est

$$\oint_{\partial B(x,r)} u(y) d\sigma(y) := \frac{1}{r^{n-1} \sigma_{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) d\sigma(y),$$

où $r^{n-1} \sigma_{n-1}$ est le volume de la sphère de rayon r et σ_{n-1} est le volume de la sphère unité dans \mathbb{R}^n . Notons qu'on a $n \omega_n = \sigma_{n-1}$ (voir l'annexe sur la mesure de surface).

THÉORÈME 2.7 (Egalités de la moyenne). Soit $u \in C^2(\Omega)$ harmonique. Alors pour tout $x \in \Omega$, $r > 0$ tel que $\bar{B}(x, r) \subset \Omega$ (boule fermé!) on a

$$(2.2) \quad u(x) = \oint_{B(x,r)} u(y) dy$$

et

$$(2.3) \quad u(x) = \oint_{\partial B(x,r)} u(y) d\sigma(y).$$

DÉMONSTRATION. Soit $u \in C^2(\Omega)$. Pour $x \in \Omega$ et $r > 0$ assez petit on pose $\Phi(r) := \oint_{\partial B(x,r)} u(y) d\sigma(y)$. Alors la substitution $y = x + rz$ donne

$$\begin{aligned} \Phi(r) &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} u(x + rz) d\sigma(z). \end{aligned}$$

En conséquent, la formule de Green implique

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \Phi'(r) &= \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} \nabla u(x + rz) \cdot z d\sigma(z) \\ &= \frac{1}{n\omega_n} \int_{B(0,1)} \Delta u(x + rz) dz. \end{aligned}$$

Donc, si $u \in C^2(\Omega)$ est harmonique, alors Φ est constante. Ceci implique

$$\begin{aligned}\Phi(r) &= \lim_{h \rightarrow 0} \Phi(h) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\partial B(x,h)} u(y) d\sigma(y) \\ &= u(x),\end{aligned}$$

par continuité de u . On a donc démontré la deuxième égalité de la moyenne.

La première égalité de la moyenne vient de la deuxième en utilisant les coordonnées polaires:

$$\begin{aligned}\int_{B(x,r)} u(y) dy &= \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(x,r)} u(y) dy \\ &= \frac{1}{\omega_n r^n} \int_0^r \int_{\partial B(x,s)} u(y) d\sigma(y) ds \\ &= \frac{1}{\omega_n r^n} \int_0^r \sigma_{n-1} s^{n-1} u(x) ds \\ &= \frac{\sigma_{n-1}}{n\omega_n} u(x) \\ &= u(x).\end{aligned}$$

□

THÉORÈME 2.8. *Soit $u \in C(\Omega)$ tel que pour tout $x \in \Omega$ et tout $r > 0$ vérifiant $\bar{B}(x, r) \subset \Omega$ on a*

$$u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u(y) d\sigma(y),$$

c.à.d. u vérifie l'égalité de la moyenne. Alors $u \in C^\infty(\Omega)$ et u est harmonique.

DÉMONSTRATION. On montre d'abord que si $u \in C^2(\Omega)$ vérifie l'égalité de la moyenne, alors u est harmonique. Pour cela, on définit la fonction Φ comme dans la démonstration du théorème 2.7. La fonction u vérifiant l'égalité de la moyenne et l'égalité (2.4) impliquent

$$0 = \Phi'(r) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{B(0,1)} \Delta u(x + rz) dz.$$

Si u n'est pas harmonique, alors il existe $x \in \Omega$ tel que $\Delta u(x) \neq 0$; on peut supposer que $\Delta u(x) > 0$. Par continuité, il existe $r > 0$ tel que $\Delta u(y) > 0$ pour tout $y \in \bar{B}(x, r)$, une contradiction à l'égalité ci-dessous. Donc, toute fonction $u \in C^2(\Omega)$ vérifiant l'égalité de la moyenne est harmonique.

Il reste alors à montrer que toute fonction continue et vérifiant l'égalité de la moyenne est de classe C^∞ . Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ la fonction de test de l'exemple 2.1, multiplié par une constante $c > 0$ de sorte que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$. Pour $\varepsilon > 0$ on pose $\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \varphi(x/\varepsilon)$ ($x \in \mathbb{R}^n$). Alors on a $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon = 1$ et $\text{supp } \varphi_\varepsilon \subset \bar{B}(0, \varepsilon)$. Pour tout

$x \in \Omega_\varepsilon$ on a, par Fubini, la définition de φ , et l'égalité de la moyenne,

$$\begin{aligned}
u * \varphi_\varepsilon(x) &= \int_{B(0,\varepsilon)} \varphi_\varepsilon(y)u(x-y) dy \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(0,\varepsilon)} \varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)u(x-y) dy \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \int_{\partial B(0,r)} \varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)u(x-y) d\sigma(y) dr \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \int_{\partial B(0,r)} c \exp\left(\frac{1}{1-r^2/\varepsilon^2}\right)u(x-y) d\sigma(y) dr \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon c \exp\left(\frac{1}{1-r^2/\varepsilon^2}\right)n\omega_n r^{n-1}u(x) dr \\
&= u(x).
\end{aligned}$$

Donc, $u * \varphi_\varepsilon = u$ sur Ω_ε . Il suit de la Proposition 2.5 que $u|_{\Omega_\varepsilon} \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire et comme $\Omega = \bigcup_{\varepsilon>0} \Omega_\varepsilon$, on obtient $u \in C^\infty(\Omega)$. \square

Les Théorèmes 2.7 et 2.8 impliquent le corollaire remarquable suivant.

COROLLAIRE 2.9. *Toute fonction harmonique est de classe C^∞ .*

DÉFINITION 2.10. On dit qu'une fonction $u \in C(\Omega)$ est *sous-harmonique* si pour tout $x \in \Omega$ et tout $r > 0$ vérifiant $\bar{B}(x, r) \subset \Omega$ on a

$$u(x) \leq \int_{B(x,r)} u(y) dy.$$

REMARQUE 2.11. D'après le Théorème 2.8 une fonction $u \in C(\Omega)$ est harmonique si et seulement si u et $-u$ sont sous-harmoniques.

THÉORÈME 2.12 (Principe du maximum). *Soit $u \in C(\bar{\Omega})$ sous-harmonique sur Ω , où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné. Alors:*

- (i) $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.
- (ii) *Si Ω est en plus connexe, et s'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $u(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} u$, alors u est constante.*

DÉMONSTRATION. L'assertion (ii) implique facilement l'assertion (i). Il suffit alors de démontrer (ii).

Soit $x_0 \in \Omega$ tel que $u(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} u =: M$. La fonction u étant sous-harmonique, on a

$$M = u(x_0) \leq \int_{B(x_0,r)} u(y) dy$$

pour tout $r > 0$ tel que $\bar{B}(x_0, r) \subset \Omega$. Ceci implique que $u \equiv M$ dans un voisinage de x_0 .

Soit $A := \{x \in \Omega : u(x) = M\}$. D'après ce qu'on vient de démontrer, l'ensemble A est ouvert et non-vidé (comme $x_0 \in A$). En plus, par continuité de u , A est fermé dans Ω . Comme Ω est connexe, on obtient que $A = \Omega$, c.à.d. que u est constante sur Ω . \square

Dans la suite, on aura souvent besoin de la version suivante du principe du maximum.

COROLLAIRE 2.13 (Principe de comparaison). *Soient $u, v \in C(\bar{\Omega})$ deux fonctions telles que u est sous-harmonique et v est harmonique dans Ω . Si $u \leq v$ sur $\partial\Omega$, alors $u \leq v$ dans $\bar{\Omega}$.*

DÉMONSTRATION. La fonction $u - v$ est sous-harmonique dans Ω et $u - v \leq 0$ sur $\partial\Omega$. D'après le principe du maximum (Théorème 2.12 (i)), ceci implique $u - v \leq 0$ dans $\bar{\Omega}$. \square

On conclut cette section avec un résultat d'unicité pour le problème de Dirichlet.

COROLLAIRE 2.14. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné. Pour tout $f \in C(\Omega)$ et tout $g \in C(\partial\Omega)$ il existe au plus une fonction $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ solution du problème*

$$(2.5) \quad \begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Soient $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ deux solutions de (2.5). Alors $u := u_1 - u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ est une solution du problème (2.5) pour $f = 0$ et $g = 0$. En particulier, la fonction u est harmonique, c.à.d. u et $-u$ sont sous-harmoniques. D'après le principe du maximum, $u \leq 0 = \max_{\partial\Omega} u$ et $-u \leq 0 = \max_{\partial\Omega}(-u)$. Donc, $u = 0$, d'où $u_1 = u_2$. \square

3. Solution fondamentale

DÉFINITION 2.15. Pour $n \geq 2$ et $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on définit

$$E_n(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x|, & n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n} |x|^{-(n-2)}, & n \geq 3, \end{cases}$$

où $|x| := (\sum x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ et $\omega_n = |B(0, 1)|$ est la mesure de Lebesgue de la boule unité dans \mathbb{R}^n . On appelle E_n *solution fondamentale* de l'opérateur de Laplace dans \mathbb{R}^n .

REMARQUE 2.16. La fonction E_n et les dérivées partielles $\partial_{x_i} E_n$ sont localement intégrables sur \mathbb{R}^n . En fait, on a

$$|D_1 E_n(x)| \leq C |x|^{-(n-1)}$$

et

$$|D_2 E_n(x)| \leq C |x|^{-n}.$$

La dérivée seconde n'est pas intégrable en 0!

LEMME 2.17. *Pour tout $n \geq 2$, E_n est harmonique dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

DÉMONSTRATION. C'est un simple exercice. \square

THÉORÈME 2.18. *Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et soit $u := E_n * \varphi$. Alors $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $-\Delta u(x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.*

DÉMONSTRATION. Par le Lemme 2.3, on a $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\Delta u(x) = \Delta(E_n * \varphi)(x) = E_n * \Delta\varphi(x).$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} E_n(y) \Delta\varphi(x-y) dy \\ &= \int_{B(0,\varepsilon)} E_n(y) \Delta\varphi(x-y) dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} E_n(y) \Delta\varphi(x-y) dy. \end{aligned}$$

Une simple estimation donne

$$\begin{aligned} \left| \int_{B(0,\varepsilon)} E_n(y) \Delta\varphi(x-y) dy \right| &\leq \|\Delta\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B(0,\varepsilon)} |E_n(y)| dy \\ &\leq \begin{cases} C \varepsilon^2 |\log \varepsilon|, & n = 2, \\ C \varepsilon^2, & n \geq 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Une intégration par parties sur $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus B(0, \varepsilon)$ implique

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} E_n(y) \Delta\varphi(x-y) dy &= - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \nabla E_n(y) \nabla\varphi(x-y) dy + \\ &\quad + \int_{\partial B(0,\varepsilon)} E_n(y) \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(x-y) d\sigma(y), \end{aligned}$$

où σ est la mesure de surface sur la sphère $\partial B(0, \varepsilon)$.

On estime que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B(0,\varepsilon)} E_n(y) \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(x-y) d\sigma(y) \right| &\leq \|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |E_n(y)| d\sigma(y) \\ &\leq \begin{cases} C \varepsilon |\log \varepsilon|, & n = 2, \\ C \varepsilon, & n \geq 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Une seconde intégration par parties sur $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus B(0, \varepsilon)$ donne

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \nabla E_n(y) \nabla\varphi(x-y) dy &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \Delta E_n(y) \varphi(x-y) dy - \\ &\quad - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial E_n}{\partial\nu}(y) \varphi(x-y) d\sigma(y) \\ &= - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial E_n}{\partial\nu}(y) \varphi(x-y) d\sigma(y), \end{aligned}$$

parce que E_n est harmonique sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (Lemme 2.17). Comme, pour tout $y \in \partial B(0, \varepsilon)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_n}{\partial \nu}(y) &= \nabla E_n(y) \left(-\frac{y}{|y|}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{n\omega_n} \frac{y}{|y|^n}\right) \left(-\frac{y}{|y|}\right) \\ &= \frac{1}{n\omega_n} \varepsilon^{-(n-1)}, \end{aligned}$$

on obtient alors

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \varepsilon)} \nabla E_n(y) \nabla \varphi(x-y) dy &= -\frac{1}{n\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B(0, \varepsilon)} \varphi(x-y) d\sigma(y) \\ &= - \int_{\partial B(0, \varepsilon)} \varphi(x-y) d\sigma(y) \\ &\rightarrow -\varphi(x) \quad (\varepsilon \rightarrow 0), \end{aligned}$$

parce que φ est continue et parce que $\int_{\partial B(0, \varepsilon)} d\sigma(y) = 1$.

L'assertion suit. \square

COROLLAIRE 2.19. Soit $n \geq 2$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ il existe une solution $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ du problème

$$-\Delta u(x) = \varphi(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

Une solution u est donnée par $u = E_n * \varphi$.

DÉFINITION 2.20. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. On appelle une fonction $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ une *solution faible* du problème

$$-\Delta u(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n,$$

si pour toute fonction de test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$- \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \Delta \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx.$$

THÉORÈME 2.21. Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ à support compact la fonction $u = E_n * f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ est une solution faible du problème

$$-\Delta u(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

DÉMONSTRATION. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Alors Fubini et le Théorème 2.18 impliquent

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\Delta\varphi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} E_n(x-y)f(y) dy \Delta\varphi(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} E_n(x-y)\Delta\varphi(x) dx f(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} E_n(y-x)\Delta\varphi(x) dx f(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Delta(E_n * \varphi)(y)f(y) dy \\
&= - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)f(y) dy.
\end{aligned}$$

Donc, u est solution faible. □

4. Le problème de Dirichlet (fonctions de Green)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert *régulier* (de classe C^1) tel que l'intégration par parties est vraie dans Ω (voir Annexe). Il existe donc une mesure σ sur $\partial\Omega$ tel que pour tout $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$ et tout $1 \leq i \leq n$ on a

$$\int_{\Omega} u \partial_i v dx = \int_{\partial\Omega} uv v_i d\sigma - \int_{\Omega} \partial_i u v dx.$$

Soient $f \in C(\bar{\Omega})$ et $g \in C(\partial\Omega)$. On veut résoudre le problème de Dirichlet

$$(2.6) \quad \begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Si Ω est borné, alors on sait que ce problème admet au plus une solution $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ (Corollaire 2.14; c'était une conséquence du principe du maximum). Dans ce paragraphe, on veut montrer existence d'une solution, au moins si Ω est une boule et au moins au sens faible.

Dans la suite, E_n désigne la solution fondamentale pour l'opérateur de Laplace.

THÉORÈME 2.22 (Théorème des trois potentiels). *Soit $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Alors, pour tout $x \in \Omega$,*

$$\begin{aligned}
u(x) &= - \int_{\Omega} \Delta u(y)E_n(x-y) dy + \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)E_n(x-y) d\sigma(y) - \\
&\quad - \int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial}{\partial \nu}E_n(x-y) d\sigma(y).
\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. On fixe $x \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$ assez petit. Alors des intégrations par parties impliquent

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \Delta u(y) E_n(x-y) dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) E_n(x-y) d\sigma(y) - \\
& \quad - \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} E_n(x-y) d\sigma(y) \\
= & \int_{\Omega} \nabla u(y) \nabla E_n(x-y) dy - \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} E_n(x-y) d\sigma(y) \\
= & \int_{\Omega \setminus B(x,\varepsilon)} \nabla u(y) \nabla E_n(x-y) dy + \int_{B(x,\varepsilon)} \nabla u(y) \nabla E_n(x-y) dy - \\
& \quad - \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} E_n(x-y) d\sigma(y) - \int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} E_n(x-y) d\sigma(y) + \\
& \quad + \int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} E_n(x-y) d\sigma(y) \\
= & - \int_{\Omega \setminus B(x,\varepsilon)} u(y) \Delta E_n(x-y) dy + \int_{B(x,\varepsilon)} \nabla u(y) \nabla E_n(x-y) dy + \\
& \quad + \int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y) \nabla E_n(x-y) \frac{-(x-y)}{\|x-y\|} d\sigma(y) \\
= & \int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y) d\sigma(y) + O(\varepsilon) \\
\rightarrow & u(x) \quad (\varepsilon \rightarrow 0).
\end{aligned}$$

□

THÉORÈME 2.23. *On fait l'hypothèse suivante:*

$$\begin{aligned}
& \text{il existe une fonction } \Phi \in C^2(\Omega \times \bar{\Omega}), \Phi = \Phi(x, y), \\
& \text{tel que pour tout } x \in \Omega \text{ on a} \\
(2.7) \quad & -\Delta_y \Phi(x, y) = 0, \quad y \in \Omega, \\
& \Phi(x, y) = E_n(x-y), \quad y \in \partial\Omega.
\end{aligned}$$

On pose $G(x, y) := E_n(x-y) - \Phi(x, y)$.

Si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ est solution du problème de Dirichlet (2.6), alors pour tout $x \in \Omega$

$$(2.8) \quad u(x) = \int_{\Omega} f(y) G(x, y) dy + \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial}{\partial \nu} G(x, y) d\sigma(y).$$

DÉMONSTRATION. Soit Φ la fonction de l'hypothèse (2.7). Des intégrations par parties et la définition de Φ impliquent que pour tout $x \in \Omega$ on a

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega} \Delta u(y) \Phi(x, y) dy &= \int_{\Omega} (u(y) \Delta_y \Phi(x, y) - \Delta u(y) \Phi(x, y)) dy \\
&= \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \Phi(x, y) d\sigma(y) - \int_{\Omega} \nabla u(y) \nabla_y \Phi(x, y) dy - \\
&\quad - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \nu} u(y) \Phi(x, y) d\sigma(y) + \int_{\Omega} \nabla u(y) \nabla_y \Phi(x, y) dy \\
&= \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \Phi(x, y) d\sigma(y) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \nu} u(y) \Phi(x, y) d\sigma(y) \\
&= \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \Phi(x, y) d\sigma(y) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \nu} u(y) E_n(x - y) d\sigma(y).
\end{aligned}$$

Cette équation et le théorème des trois potentiels impliquent que

$$\begin{aligned}
u(x) &= - \int_{\Omega} \Delta u(y) E_n(x - y) dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) E_n(x - y) d\sigma(y) - \\
&\quad - \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} E_n(x - y) d\sigma(y) \\
&= \int_{\Omega} \Delta u(y) (\Phi(x, y) - E_n(x - y)) dy + \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} (\Phi(x, y) - E_n(x - y)) d\sigma(y).
\end{aligned}$$

En remplaçant $-\Delta u$ par f dans Ω et u par g sur $\partial\Omega$, et en utilisant la définition de G , on conclut. \square

DÉFINITION 2.24. On suppose que l'hypothèse (2.7) est vérifiée. La fonction G définie dans le théorème 2.23 s'appelle *fonction de Green* pour Ω .

DÉFINITION 2.25. Soient $f \in C(\bar{\Omega})$ et $g \in C(\partial\Omega)$. On appelle une fonction $u \in C(\bar{\Omega})$ une *solution faible* du problème de Dirichlet (2.6) si $u|_{\partial\Omega} = g$ et si pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a

$$-\int_{\Omega} u(x) \Delta \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx.$$

REMARQUE 2.26. Une double application du théorème de Green (intégration par parties) montre que si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ est une solution classique du problème de Dirichlet (2.6), alors u est aussi une solution faible.

THÉORÈME 2.27. Soient $f \in C(\bar{\Omega})$ et $g \in C(\partial\Omega)$. On suppose que l'hypothèse (2.7) est vérifiée. Soit G la fonction de Green pour Ω . Alors la fonction $u \in C(\bar{\Omega})$ définit par

$$u(x) := \int_{\Omega} f(y) G(x, y) dy + \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial}{\partial \nu} G(x, y) d\sigma(y)$$

est solution faible du problème de Dirichlet (2.6).

On ne démontre pas ce théorème, mais on veut plutôt montrer que dans un cas simple, notamment si Ω est une boule, on peut vérifier l'hypothèse (2.7).

EXEMPLE 2.28. Soit $R > 0$ et $\Omega := B(0, R)$ une boule de rayon R dans \mathbb{R}^n ($n \geq 3$). Soit $x \in \Omega$. On doit trouver une fonction $\Phi_x \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ solution de

$$(2.9) \quad \begin{cases} -\Delta \Phi_x(y) = 0, & y \in \Omega, \\ \Phi_x(y) = E_n(x - y), & y \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Si $x = 0$, alors une fonction constante est solution de ce problème. Si $x \neq 0$, alors on peut définir

$$\tilde{x} := \frac{R^2 x}{\|x\|^2},$$

et

$$\Phi_x(y) := \left(\frac{R}{\|x\|}\right)^{n-2} E_n(\tilde{x} - y), \quad y \in \bar{\Omega};$$

noter que $\tilde{x} \notin \bar{\Omega}$ et que Φ est donc bien définie. Comme E_n est harmonique dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, la fonction Φ est harmonique dans Ω .

On montre que $\Phi_x(y) = E_n(x - y)$ pour tout $y \in \partial\Omega$ et que Φ est donc la solution cherchée.

Soit $y \in \partial\Omega$, c.à.d. $\|y\| = R$. On considère les deux triangles $\Delta_1 := \Delta(0, y, \tilde{x})$ et

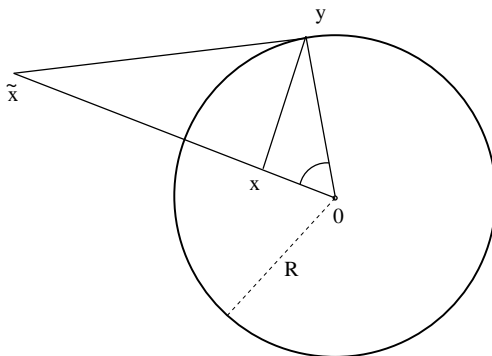


FIGURE 1. Les points x , \tilde{x} et y

$\Delta_2 := \Delta(0, x, y)$. L'angle en point 0 est commun aux deux triangles. En plus,

$$\frac{\|x\|}{\|y\|} = \frac{\|x\|}{R} = \frac{R}{\|\tilde{x}\|} = \frac{\|y\|}{\|\tilde{x}\|},$$

par la définition de \tilde{x} . Comme les deux triangles ont un angle en commun, et comme les proportions des côtes voisins sont égales, les deux triangles sont similaires.

On en déduit que

$$\frac{\|x - y\|}{R} = \frac{\|x - y\|}{\|y\|} = \frac{\|\tilde{x} - y\|}{\|\tilde{x}\|},$$

ou

$$\|x - y\| = \frac{R}{\|\tilde{x}\|} \|\tilde{x} - y\| = \frac{\|x\|}{R} \|\tilde{x} - y\|.$$

Donc,

$$E_n(x - y) = \Phi_x(y).$$

Comme $y \in \partial\Omega$ était arbitraire, on a résolu le problème (2.9).

L'expression explicite de la solution Φ_x montre que la fonction $\Phi(x, y) := \Phi_x(y)$ est de classe C^2 , et qu'elle est donc la fonction cherchée dans l'hypothèse (2.7).

REMARQUE 2.29. L'exemple montre que pour la boule $\Omega = B(0, R)$ et $n \geq 3$, la fonction de Green est donnée par la formule

$$G(x, y) = \frac{1}{n\omega_n(n-2)} (\|x - y\|^{-(n-2)} - (\frac{\|x\|}{R} \|x\| \frac{R^2}{\|x\|} - \|y\|)^{-(n-2)}).$$

5. Le problème de Dirichlet (solution de Perron)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, $g \in C(\partial\Omega)$. Comme dans le paragraphe précédent, on veut résoudre le problème de Dirichlet

$$(2.10) \quad \begin{cases} -\Delta u(x) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Dans ce paragraphe, on va étudier la méthode de Perron. On définit la famille

$$S(g) := \{v \in C(\bar{\Omega}) : v \text{ est sous-harmonique dans } \Omega \\ \text{et } v \leq g \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Cette famille est non-vide, parce que la fonction constante $\equiv m := \min_{\partial\Omega} g$ appartient à $S(g)$. De plus, toute fonction $v \in S(g)$ est borné par $M := \max_{\partial\Omega} g$. En fait, la fonction constante $\equiv M$ est harmonique et pour tout $v \in S(g)$ on a $v \leq M$ sur $\partial\Omega$. Le fait que $v \leq M$ sur $\bar{\Omega}$ vient du principe du maximum. On appelle $S(g)$ la *famille de Perron*.

DÉFINITION 2.30 (Solution de Perron). La fonction

$$Pg(x) := \sup_{v \in S(g)} v(x), \quad x \in \bar{\Omega},$$

s'appelle la *solution de Perron* du problème (2.10).

THÉORÈME 2.31. *Soit Pg la solution de Perron du problème (2.10). Alors Pg est harmonique.*

DÉMONSTRATION. Soit $x_0 \in \Omega$. On choisit $r > 0$ tel que $\bar{B}(x_0, r) \subset \Omega$. Par définition, il existe une suite $(v_n) \subset S(g)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x_0) = Pg(x_0).$$

Si $u, v \in C(\Omega)$ sont deux fonctions sous-harmoniques, et si $u \vee v$ est le supremum de u et v , alors pour tout $x \in \Omega$

$$u(x) \leq \int_{B(x, r')} u(y) dy \leq \int_{B(x, r')} u \vee v(y) dy,$$

et

$$v(x) \leq \int_{B(x,r')} u \vee v(y) dy.$$

Donc $u \vee v$ est sous-harmonique.

En conséquence, en remplaçant v_n par $v_1 \vee \dots \vee v_n \in S(g)$, on peut et on va supposer que la suite $(v_n) \subset S(g)$ est croissante.

Soit $\tilde{v}_n \in C^2(B(x_0, r)) \cap C(\bar{B}(x_0, r))$ la solution (faible) du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{v}_n(x) = 0, & x \in B(x_0, r), \\ \tilde{v}_n(x) = v_n(x), & x \in \partial B(x_0, r). \end{cases}$$

Une telle solution existe (voir le paragraphe précédent sur la résolution du problème de Dirichlet en utilisant les fonctions de Green; ici, on n'a que besoin de la fonction de Green pour une boule). On peut montrer que la solution faible est ici en faite une solution classique, c.à.d. \tilde{v}_n est harmonique. Comme \tilde{v}_n est harmonique et v_n est sous-harmonique, et comme $\tilde{v}_n = v_n$ sur $\partial B(x_0, r)$, on a $v_n \leq \tilde{v}_n$ sur $B(x_0, r)$ par le principe de comparaison (principe du maximum). En particulier, $v_n(x_0) \leq \tilde{v}_n(x_0)$.

Si on prolonge \tilde{v}_n en posant $\tilde{v}_n = v_n$ sur $\bar{\Omega} \setminus B(x_0, r)$, alors $\tilde{v}_n \in S(g)$. Donc, par définition, $\tilde{v}_n \leq Pg$ dans $\bar{\Omega}$ et en particulier $\tilde{v}_n(x_0) \leq Pg(x_0)$. Donc,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{v}_n(x_0) = Pg(x_0).$$

Comme la suite (v_n) est croissante, la suite (\tilde{v}_n) est croissante aussi (principe de comparaison). Soit

$$u(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{v}_n(x), \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Alors u est mesurable et bornée. En plus, pour tout $x \in B(x_0, r)$ et tout $r' > 0$ suffisamment petit l'égalité de la moyenne implique

$$\begin{aligned} u(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{v}_n(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B(x,r')} \tilde{v}_n(y) dy \\ &= \int_{B(x,r')} u(y) dy. \end{aligned}$$

Le théorème 2.8 implique que u est harmonique dans $B(x_0, r)$; en fait, le théorème 2.8 n'était énoncé que pour des fonctions continues vérifiant l'égalité de la moyenne, mais on voit d'après la démonstration que ce théorème reste vrai pour les fonctions mesurables et bornées vérifiant l'égalité de la moyenne.

On va montrer que $u = Pg$ dans $B(x_0, r)$.

L'inégalité $u \leq Pg$ vient du fait que $\tilde{v}_n \leq Pg$ pour tout n .

Pour montrer l'inégalité $u \geq Pg$ (dans $B(x_0, r)$) il suffit de montrer que $u \geq v$ pour tout $v \in S(g)$. Soit donc $v \in S(g)$.

Soit $w_n := \tilde{v}_n \vee v \in S(g)$. Alors (w_n) est croissante et $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n(x_0) = Pg(x_0) = u(x_0)$.

Soit $\tilde{w}_n \in C^2(B(x_0, r)) \cap C(\bar{B}(x_0, r))$ la solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{w}_n(x) = 0, & x \in B(x_0, r), \\ \tilde{w}_n(x) = w_n(x), & x \in \partial B(x_0, r). \end{cases}$$

Par le principe de comparaison, $\tilde{v}_n \vee v = w_n \leq \tilde{w}_n$ sur $\bar{B}(x_0, r)$. Comme avant, on prolonge \tilde{w}_n en posant $\tilde{w}_n = w_n$ sur $\bar{\Omega} \setminus B(x_0, r)$. Alors la $\tilde{w}_n \in S(g)$, la suite (\tilde{w}_n) est croissante, $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{w}_n(x_0) = Pg(x_0) = u(x_0)$, et \tilde{w}_n est harmonique dans $B(x_0, r)$. L'égalité de la moyenne implique

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0, r)} u(y) dy &= u(x_0) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{w}_n(x_0) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B(x_0, r)} \tilde{w}_n(y) dy \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B(x_0, r)} \tilde{v}_n \vee v(y) dy \\ &= \int_{B(x_0, r)} u \vee v(y) dy. \end{aligned}$$

Cette inégalité implique $u \geq v$ dans $B(x_0, r)$, et donc $u = Pg$ dans $B(x_0, r)$.

En conséquent, Pg est harmonique dans $B(x_0, r)$. Comme $x_0 \in \Omega$ était arbitraire, Pg est harmonique dans Ω . \square

DÉFINITION 2.32. Soit $\xi \in \partial\Omega$. Une fonction $u \in C(\bar{\Omega})$ est appelée une *barrière* pour Ω en ξ si u est sous-harmonique dans Ω , $u(x) < 0$ pour tout $x \in \bar{\Omega} \setminus \{\xi\}$ et $u(\xi) = 0$.

On dit que Ω admet une barrière en ξ s'il existe une barrière pour Ω en ξ .

THÉORÈME 2.33. Soit Pg la solution de Perron du problème (2.10). On suppose que Ω admet une barrière en $\xi \in \partial\Omega$. Alors

$$\lim_{x \rightarrow \xi} Pg(x) = g(\xi),$$

c.à.d. la solution de Perron est continue en ξ et $Pg(\xi) = g(\xi)$.

DÉMONSTRATION. Soit u une barrière pour Ω en ξ . Soit $\varepsilon > 0$.

Par continuité de g , il existe $\delta > 0$ tel que

$$g(\xi) - \varepsilon \leq g(\eta) \leq g(\xi) + \varepsilon \text{ pour tout } \eta \in B(\xi, \delta) \cap \partial\Omega.$$

Comme u est strictement négative sur $\bar{\Omega} \setminus B(\xi, \delta)$, il existe $C \geq 0$ tel que

$$g(\xi) - \varepsilon + Cu(\eta) \leq g(\eta) \leq g(\xi) + \varepsilon - Cu(\eta) \text{ pour tout } \eta \in \partial\Omega.$$

Ceci implique que

$$(2.11) \quad g(\xi) - \varepsilon + Cu(x) \leq Pg(x) \leq g(\xi) + \varepsilon - Cu(x) \text{ pour tout } x \in \bar{\Omega}.$$

En effet, $g(\xi) - \varepsilon + Cu \in S(g)$ ce qui implique la première inégalité dans (2.11). Pour montrer la deuxième inégalité, on prend $v \in S(g)$. Par définition,

$$v(\eta) \leq g(\xi) + \varepsilon - Cu(\eta) \text{ pour tout } \eta \in \partial\Omega.$$

Le principe du comparaisn implique que

$$v(x) + Cu(x) \leq g(\xi) + \varepsilon \text{ pour tout } x \in \bar{\Omega}.$$

Par définition de la solution de Perron,

$$Pg(x) + Cu(x) \leq g(\xi) + \varepsilon \text{ pour tout } x \in \bar{\Omega},$$

ce qui est justement la deuxième inégalité dans (2.11).

Les inégalités (2.11), la continuité de u et le fait que $u(\xi) = 0$ impliquent que

$$g(\xi) - \varepsilon \leq \liminf_{x \rightarrow \xi} Pg(x) \leq \limsup_{x \rightarrow \xi} Pg(x) \leq g(\xi) + \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow \xi} Pg(x) = g(\xi).$$

□

COROLLAIRE 2.34. *Le problème de Dirichlet (2.10) admet pour tout $g \in C(\partial\Omega)$ une solution si et seulement si Ω admet une barrière en tout $\xi \in \partial\Omega$.*

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que le problème de Dirichlet (2.10) admet pour tout $g \in C(\partial\Omega)$ une solution. Soit $\xi \in \partial\Omega$. Alors le problème de Dirichlet (2.10) admet en particulier une solution $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ pour la fonction g définie par $g(\eta) = -\|\eta - \xi\|$. Cette solution u est une barrière pour Ω en ξ par le principe du maximum.

L'inverse vient des théorèmes 2.31 et 2.33. En fait, pour tout $g \in C(\partial\Omega)$ la solution de Perron Pg est solution du problème de Dirichlet (2.10). □

COROLLAIRE 2.35. *On suppose que Ω admet une barrière en tout point $\xi \in \partial\Omega$. Alors il existe une fonction de Green G pour Ω , et pour la solution u du problème de Dirichlet on a*

$$u(x) = Pg(x) = \int_{\partial\Omega} g(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} G(x, \xi) d\sigma(\xi).$$

Il y a plusieurs conditions géométriques sur le bord $\partial\Omega$ qui impliquent l'existence d'une barrière et donc la solvabilité du problème de Dirichlet. On en présente une.

PROPOSITION 2.36 (Condition de la boule extérieure). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, borné, et soit $\xi \in \partial\Omega$. On suppose qu'il existe une boule $B(a, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ telle que $\bar{B}(a, r) \cap \bar{\Omega} = \{\xi\}$. Alors Ω admet une barrière en ξ .*

DÉMONSTRATION. Soit E_n la solution fondamentale pour l'opérateur de Laplace. La fonction

$$u(x) := E_n(x - a) - E(\xi - a), \quad x \in \bar{\Omega},$$

est une barrière pour Ω en ξ . □

CHAPITRE 3

L'équation de la chaleur

Dans ce chapitre on étudie l'équation de la chaleur

$$(3.1) \quad \begin{cases} u_t - \Delta u = f(t, x), & (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \\ u(0, x) = g(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, et $f : [0, T] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions données.

1. Le noyau de la chaleur

DÉFINITION 3.1 (Noyau de la chaleur). On définit le *noyau de la chaleur*

$$k(t, x) := \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-x^2/4t}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n,$$

où $x^2 := \sum_{i=1}^n x_i^2$ est le produit scalaire de x avec lui même.

Le noyau de la chaleur est la solution fondamentale de l'opérateur différentiel $\partial_t - \Delta$, c.à.d. l'opérateur de l'équation de la chaleur. Comme pour l'opérateur de Laplace et l'équation $-\Delta u = f$ dans \mathbb{R}^n , le noyau de la chaleur permet de résoudre explicitement l'équation de la chaleur dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$ (voir le Théorème 3.3 ci-dessous).

LEMME 3.2. Soit k le noyau de la chaleur. Alors:

- (i) $k(t, x) > 0$ pour tout $t > 0, x \in \mathbb{R}^n$.
- (ii) $\int_{\mathbb{R}^n} k(t, x) dx = 1$ pour tout $t > 0$.
- (iii) $k \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ et

$$k_t - \Delta k = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

DÉMONSTRATION. Les démonstrations des propriétés (i) et (iii) sont des simples exercices.

Pour la démonstration de (ii), il faut savoir que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} k(t, x) dx &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x^2/4t} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x^2} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2} \dots e^{-x_n^2} dx_n \dots dx_1 \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^n = 1.
\end{aligned}$$

□

THÉORÈME 3.3. Soit $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leq p \leq \infty$) et soit

$$u(t, x) := \int_{\mathbb{R}^n} k(t, x - y)g(y) dy = (k(t, \cdot) * g)(x),$$

où k est le noyau de la chaleur. Alors:

- (i) Si $g \geq 0$ et $g \not\equiv 0$, alors $u(t, x) > 0$ pour tout $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.
- (ii) $u \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ et

$$u_t - \Delta u = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

- (iii) Si $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et si g est continue en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\lim_{(t,x) \rightarrow (0,x_0)} u(t, x) = g(x_0).$$

En particulier, si g est continue et bornée, alors u est continue sur $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ et $u(0, x) = g(x)$.

- (iv) Pour tout $t > 0$ on a $\|u(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.

DÉMONSTRATION. La propriété (i) vient immédiatement de Lemme 3.2 (i), et (ii) vient du Lemme 3.2 (iii) en utilisant Fubini.

(iii) Soit $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ continue en $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, en utilisant Lemme 3.2 (ii), on obtient

$$\begin{aligned}
&|u(t, x) - g(x_0)| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} k(t, x - y)(g(y) - g(x_0)) dx \right| \\
&\leq 2 \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0, \varepsilon)} k(t, x - y) dy \|g\|_\infty + \int_{B(x_0, \varepsilon)} k(t, x - y) |g(y) - g(x_0)| dy \\
&\leq \frac{2 \|g\|_\infty}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \varepsilon)} e^{-y^2/4t} dy + \sup_{y \in B(x_0, \varepsilon)} |g(y) - g(x_0)| \\
&= \frac{2 \|g\|_\infty}{\sqrt{\pi^n}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \varepsilon/\sqrt{4t})} e^{-y^2} dy + \sup_{y \in B(x_0, \varepsilon)} |g(y) - g(x_0)|
\end{aligned}$$

et donc

$$\limsup_{(t,x) \rightarrow (0,x_0)} |u(t, x) - g(x_0)| \leq \sup_{y \in B(x_0, \varepsilon)} |g(y) - g(x_0)|$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Comme g est continue en x_0 , on obtient

$$\lim_{(t,x) \rightarrow (0,x_0)} |u(t,x) - g(x_0)| = 0.$$

La propriété (iv) vient de l'inégalité de Young appliquée à $k(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. \square

2. Séparation des variables et séries de Fourier

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert régulier. On veut résoudre l'équation de la chaleur dans Ω avec conditions au bord de Dirichlet:

$$(3.2) \quad \begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega, \\ u(t, x) = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

On suppose que la solution u est de la forme

$$u(t, x) = a(t) e(x),$$

avec des fonctions $a \in C^1(\mathbb{R}_+)$ et $e \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ (séparation des variables!). Comme u est solution, on obtient alors

$$a'(t)e(x) - a(t)\Delta e(x) = 0,$$

ou

$$\frac{a'(t)}{a(t)} = \frac{\Delta e(x)}{e(x)}, \quad t > 0, x \in \Omega.$$

On notera que le côté à gauche ne dépend que de t alors que le côté à droite ne dépend que de x . On a donc égalité si et seulement si les deux côtés sont constantes en t et x , c.à.d.

$$\frac{a'(t)}{a(t)} = \frac{\Delta e(x)}{e(x)} = \lambda$$

pour un $\lambda \in \mathbb{R}$, ou

$$a'(t) = \lambda a(t), \quad t \geq 0,$$

et

$$\lambda e(x) - \Delta e(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad e|_{\partial\Omega} = 0.$$

Ces deux équations nous donnent de l'information sur la solution u . La première équation est une simple équation différentielle dont la solution est $a(t) = e^{\lambda t} a(0)$. La deuxième équation a l'avantage (par rapport à l'équation de la chaleur) qu'elle ne dépend plus de la variable t ; on a donc diminué le nombre des variables. Si $\Omega \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, alors la deuxième équation devient aussi une équation différentielle ordinaire qu'on sait résoudre. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ possède des symétries (par exemple si Ω est un rectangle ou une boule), alors on peut essayer encore une fois de séparer des variables (pour le rectangle, on essaiera de séparer les variables x_1 et x_2 , pour la boule, on utilisera coordonnées polaires et essaiera de séparer les variables r et θ).

Inversement, on peut d'abord essayer de résoudre ces deux équations pour certaines valeurs de λ (en fait, c'est la deuxième équation qui est difficile à résoudre en

général), et puis, en posant $u(t, x) := a(t)e(x)$ ou une combinaison linéaire de telles solutions, on obtient des solutions de l'équation de la chaleur. A cette fin, on fait la définition suivante.

DÉFINITION 3.4. Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert on définit le *spectre de l'opérateur de Laplace avec conditions au bord de Dirichlet*

$$\text{sp}(\Delta_{\Omega}^D) := \{\lambda \in \mathbb{R} : \exists e \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), e \neq 0 \text{ solution de } \lambda e - \Delta e = 0 \text{ et } e|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Les éléments de $\text{sp}(\Delta_{\Omega}^D)$ sont appelés *valeurs propres* de l'opérateur de Laplace, les solutions non-nulles de $\lambda e - \Delta e = 0$, $e|_{\partial\Omega} = 0$ sont appelées *vecteurs propres*.

EXEMPLE 3.5. On essaye de calculer le spectre $\text{sp}(\Delta_{(0,L)}^D)$ de l'opérateur de Laplace sur un intervalle $(0, L)$ pour un $L > 0$. Il faut donc trouver des solutions non-nulles du problème

$$(3.3) \quad e''(x) = \lambda e(x), \quad x \in (0, L), \quad e(0) = e(L) = 0.$$

Si $\lambda = \omega^2 > 0$, alors la solution générale de l'équation différentielle $e'' = \lambda e$ est donnée par

$$e(x) = c \sinh(\omega x) + d \cosh(\omega x), \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

Si une telle solution est solution de (3.3), alors $e(0) = 0$ implique nécessairement $d = 0$. Mais alors $e(L) = 0$ implique en plus $c = 0$. Donc, seule la solution $e \equiv 0$ vérifie $e(0) = e(L) = 0$. Ainsi, $\text{sp}(\Delta_{(0,L)}^D) \subset (-\infty, 0]$.

D'une façon similaire on exclut $0 \in \text{sp}(\Delta_{(0,L)}^D)$, c.à.d. on a en effet $\text{sp}(\Delta_{(0,L)}^D) \subset (-\infty, 0)$.

Si $\lambda = -\omega^2 < 0$, alors la solution générale de l'équation différentielle $e'' = \lambda e$ est donnée par

$$e(x) = c \sin(\omega x) + d \cos(\omega x), \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

Pour que e soit en plus solution de (3.3) il faut que $e(0) = e(L) = 0$ et $e \neq 0$. L'égalité $e(0) = 0$ implique que $d = 0$. Ensuite, l'égalité $e(L) = 0$ et $e \neq 0$ impliquent que $c \neq 0$ et

$$\omega L = k\pi \text{ pour un } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Donc,

$$\text{sp}(\Delta_{(0,L)}^D) = \{-(k\pi/L)^2 : k \in \mathbb{N}, k \geq 1\},$$

et les *vecteurs propres* associés aux *valeurs propres* $\lambda = -\omega^2 \in \text{sp}(\Delta_{(0,L)}^D)$ sont les fonctions $e(x) = \sin(\omega x)$.

COROLLAIRE 3.6. Pour toute suite $a = (a_k) \in l^\infty$, la fonction

$$(3.4) \quad u(t, x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-(\frac{k\pi}{L})^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right), \quad t > 0, x \in [0, L],$$

est solution de l'équation de la chaleur (3.2) avec $\Omega = (0, L)$.

On notera que la série dans (3.4) est une série de Fourier. Les fonctions $e_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\frac{k\pi}{L}x)$ forment une base Hilbertienne de l'espace de Hilbert $L^2(0, L)$, et donc les a_k sont en général les coefficients de Fourier de la donnée initiale:

$$a_k = \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L u_0(x) \sin(\frac{k\pi}{L}x) dx.$$

Si $a = (a_k) \in l^\infty$, comme on l'a supposé, alors la série dans (3.4) converge pour tout $t > 0$ mais en général elle ne converge pas pour $t = 0$. Formellement, pour $t = 0$ on a

$$u_0(x) = u(0, x) = \frac{1}{2L} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(\frac{k\pi}{L}x).$$

Si la donnée initiale u_0 appartient à $L^2(0, L)$, alors $(a_k) \in l^2$ et la série ci-dessus converge dans $L^2(0, L)$. Si u_0 est plus régulier tel que $(a_k) \in l^1$, alors la série ci-dessus converge même absolument.

Dans l'exemple ci-dessus, plus précisément dans la série de Fourier (3.4) et afin de garantir sa convergence pour $t > 0$, il était important que le spectre de l'opérateur de Laplace était borné supérieurement. En fait, on peut montrer que le spectre de l'opérateur de Laplace est toujours borné supérieurement. Ce sera une conséquence du principe du maximum suivant.

THÉORÈME 3.7 (Principe du maximum). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné régulier. Soient $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ et $\lambda \geq 0$ tels que*

$$\lambda u - \Delta u \leq 0 \text{ et } u|_{\partial\Omega} \geq 0.$$

Alors

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

REMARQUE 3.8. Dans le cas de $\lambda = 0$, on retrouve ici le principe du maximum du Théorème 2.12, la condition $u|_{\partial\Omega} \geq 0$ étant toujours vérifiée si on remplace u par $u+C$ pour une constante $C \geq 0$. Mais la démonstration du Théorème 3.7 est différente de celle du Théorème 2.12. On aura donc deux démonstrations du Théorème 2.12.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.7. On suppose d'abord que $\max_{\partial\Omega} u = 0$. Alors il suffit de montrer que $u \leq 0$.

Pour $\varepsilon > 0$ on définit

$$(3.5) \quad g_\varepsilon(\eta) = \begin{cases} 0, & \eta \leq 0, \\ \frac{\eta^2}{2\varepsilon}, & 0 < \eta < \varepsilon, \\ \eta - \frac{\varepsilon}{2}, & \eta \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Donc, $g_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$ et $0 \leq g'_\varepsilon \leq 1$. En plus, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_\varepsilon(\eta) = \eta$ pour tout $\eta \geq 0$.

Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lambda \int_{\Omega} u g_{\varepsilon}(u) - \int_{\Omega} \Delta u g_{\varepsilon}(u) \\ &= \lambda \int_{\Omega} u g_{\varepsilon}(u) + \int_{\Omega} \nabla u \nabla g_{\varepsilon}(u) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} g_{\varepsilon}(u) \\ &= \lambda \int_{\Omega} u g_{\varepsilon}(u) + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 g'_{\varepsilon}(u) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} g_{\varepsilon}(u). \end{aligned}$$

Comme $\max_{\partial\Omega} u = 0$, on a $g_{\varepsilon}(u) = 0$ sur $\partial\Omega$, et donc le troisième terme à droite est nulle. De plus, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g'_{\varepsilon}(u) = 1_{\{u \geq 0\}}$ presque partout. Le théorème de convergence dominée implique

$$0 \geq \lambda \int_{\{u \geq 0\}} u^2 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 1_{\{u \geq 0\}}.$$

Les deux termes à droite sont positifs ($\lambda \geq 0$!), et donc cette inégalité implique

$$\lambda \int_{\{u \geq 0\}} u^2 = 0 \text{ et } \int_{\Omega} |\nabla u|^2 1_{\{u \geq 0\}} = 0.$$

Si $\lambda > 0$, alors $\int_{\{u \geq 0\}} u^2 = 0$ ce qui implique $u \leq 0$ presque partout sur Ω , et par continuité, $u \leq 0$.

Si on a seulement $\lambda \geq 0$, on déduit au moins que u est constante sur l'ensemble $1_{\{u \geq 0\}}$. Par continuité, ça implique $u = 0$ sur $1_{\{u \geq 0\}}$, et donc $u \leq 0$ sur Ω .

Le cas général ($\max_{\partial\Omega} u \geq 0$) est réduit au cas $\max_{\partial\Omega} u = 0$ en remplaçant u par $u - \max_{\partial\Omega} u$. \square

COROLLAIRE 3.9. *Pour tout $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, borné, régulier on a $\text{sp}(\Delta_{\Omega}^D) \subset (-\infty, 0)$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\lambda \geq 0$ et soit $e \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ une solution de

$$\lambda e(x) - \Delta e(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad e|_{\partial\Omega} = 0.$$

Le principe du maximum (Théorème 3.7) implique $e \leq 0$, et comme $-e$ est aussi une solution de ce problème, on a aussi $e \geq 0$. Donc, $e = 0$, c.à.d. le problème ci-dessus n'admet pas de solutions non-triviales. Donc $\lambda \notin \text{sp}(\Delta_{\Omega}^D)$, d'où $\text{sp}(\Delta_{\Omega}^D) \subset (-\infty, 0)$. \square

3. Principe de comparaison

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, borné, régulier. Pour $T > 0$ on définit $\Omega_T := (0, T) \times \Omega$ et $\Gamma_T := \{0\} \times \bar{\Omega} \cup [0, T] \times \partial\Omega$. Des fois, Γ_T est appelé la *frontière parabolique* de Ω_T .

THÉORÈME 3.10 (Principe de comparaison). *Soit $f \in C(\mathbb{R})$ une fonction lipschitzienne et soient $u^1, u^2 \in C^{1,2}(\bar{\Omega}_T)$ (une fois continûment partiellement dérivable par rapport à t et deux fois continûment partiellement dérivable par rapport à x) deux solutions de l'équation de la chaleur semi-linéaire*

$$(3.6) \quad u_t - \Delta u + f(u) = 0, \quad (t, x) \in \Omega_T$$

Si

$$u_1|_{\Gamma_T} \leq u_2|_{\Gamma_T},$$

alors

$$u_1 \leq u_2 \text{ dans } \Omega_T.$$

Pour la démonstration, on a besoin du lemme de Gronwall qu'on ne démontrera pas.

LEMME 3.11 (Gronwall). Soit $\varphi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que

$$\varphi(t) \leq C + L \int_0^t \varphi(s) ds, \quad t \in [0, T],$$

pour des constantes $C, L \geq 0$. Alors

$$\varphi(t) \leq C e^{Lt}, \quad t \in [0, T].$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.10. Pour tout $\varepsilon > 0$ on définit la fonction $g_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$ comme dans (3.5).

Pour tout $0 < \tau \leq T$, le fait que u^1 et u^2 sont solutions de l'équation de la chaleur et une intégration par parties impliquent que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_\tau} (u_t^1 - u_t^2) g_\varepsilon(u^1 - u^2) + \int_0^\tau \int_\Omega \nabla(u^1 - u^2) \nabla g_\varepsilon(u^1 - u^2) - \\ &\quad - \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \frac{(u^1 - u^2)}{\partial\nu} g_\varepsilon(u^1 - u^2) + \int_{\Omega_\tau} (f(u^1) - f(u^2)) g_\varepsilon(u^1 - u^2). \end{aligned}$$

On notera que sur $(0, \tau) \times \partial\Omega$ on a $u^1 \leq u^2$, et donc $g_\varepsilon(u^1 - u^2) = 0$. Donc, le troisième terme à droite est nulle. Soit $L \geq 0$ la constante de Lipschitz de la fonction f . Comme le deuxième terme à droite est positif, on obtient,

$$\int_0^\tau \int_\Omega (u_t^1 - u_t^2) g_\varepsilon(u^1 - u^2) \leq L \int_0^\tau \int_\Omega |u^1 - u^2| g_\varepsilon(u^1 - u^2).$$

Lorsque ε tend vers 0,

$$\int_0^\tau \int_\Omega (u_t^1 - u_t^2) (u^1 - u^2) 1_{\{u^1 \geq u^2\}} \leq L \int_0^\tau \int_\Omega |u^1 - u^2| (u^1 - u^2) 1_{\{u^1 \geq u^2\}}$$

et donc

$$\begin{aligned} \left[\int_\Omega \frac{1}{2} (u^1 - u^2)^2 1_{\{u^1 \geq u^2\}} \right]_0^\tau &= \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega \frac{1}{2} (u^1 - u^2)^2 1_{\{u^1 \geq u^2\}} \\ &= \int_0^\tau \int_\Omega \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u^1 - u^2)^2 1_{\{u^1 \geq u^2\}} \\ &\leq L \int_0^\tau \int_\Omega (u^1 - u^2)^2 1_{\{u^1 \geq u^2\}}. \end{aligned}$$

Par hypothèse, on a $u^1 \leq u^2$ sur $\{0\} \times \Omega$. Donc, si on pose $\varphi(\tau) := \int_\Omega (u^1 - u^2)^2 1_{\{u^1 \geq u^2\}} \geq 0$, alors on obtient

$$\varphi(\tau) \leq 2L \int_0^\tau \varphi(s) ds, \quad \tau \in [0, T].$$

Le lemme de Gronwall implique $\varphi(\tau) = 0$ pour tout $0 \leq \tau \leq T$. Donc, $(u^1 - u^2)^2 1_{\{u^1 \geq u^2\}} = 0$ presque partout, et par continuité, $u^1 \leq u^2$ dans $\bar{\Omega}_T$. \square

REMARQUE 3.12. Le théorème 3.10 reste vrai si on a seulement l'inégalité

$$u_t^1 - \Delta u^1 + f(u^1) \leq u_t^2 - \Delta u^2 + f(u^2) \text{ dans } \Omega_T.$$

COROLLAIRE 3.13 (Principe du maximum parabolique). Soit $u \in C^{1,2}(\Omega_T)$ une solution de l'équation de la chaleur

$$u_t - \Delta u = 0, \quad (t, x) \in \Omega_T.$$

Alors

$$\max_{\bar{\Omega}_T} u = \max_{\Gamma_T} u \quad \text{et} \quad \min_{\bar{\Omega}_T} u = \min_{\Gamma_T} u.$$

DÉMONSTRATION. La fonction constante $v \equiv \max_{\Gamma_T} u$ est également une solution cette équation de la chaleur et $u \leq v$ sur Γ_T . Le principe de comparaison (appliqué avec la fonction $f = 0$) implique $u \leq v = \max_{\Gamma_T} u$ dans $\bar{\Omega}_T$. La deuxième égalité vient de la première en remplaçant u par $-u$. \square

COROLLAIRE 3.14 (Unicité pour l'équation de la chaleur linéaire). Soient $f \in C(\bar{\Omega}_T)$, $g \in C(\Gamma_T)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors il existe au plus une fonction $u \in C^{1,2}(\Omega_T)$ solution de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + \lambda u = f, & (t, x) \in \Omega_T, \\ u = g, & (t, x) \in \Gamma_T. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Soient u_1, u_2 deux solutions. Alors $u = \pm(u_1 - u_2)$ sont des solutions de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + \lambda u = 0, & (t, x) \in \Omega_T, \\ u = 0, & (t, x) \in \Gamma_T. \end{cases}$$

Par le principe de comparaison, $u_1 - u_2 \leq 0$ et $u_1 - u_2 \geq 0$. Donc, $u_1 = u_2$. \square

COROLLAIRE 3.15 (Monotonie pour l'équation de la chaleur). Soit $f \in C(\mathbb{R})$ une fonction lipschitzienne telle que $f(0) = 0$, $u_0 \in C(\bar{\Omega})$, et soit $u \in C^{1,2}(\Omega_T)$ une solution de l'équation de la chaleur semi-linéaire

$$(3.7) \quad \begin{cases} u_t - \Delta u + f(u) = 0, & (t, x) \in \Omega_T, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, & t \in [0, T], \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Si $u_0 \geq 0$ dans $\bar{\Omega}$ (resp. $u_0 \leq 0$ dans $\bar{\Omega}$), alors $u \geq 0$ dans Ω_T (resp. $u \leq 0$ dans Ω_T).

DÉMONSTRATION. La fonction $v \equiv 0$ est aussi solution de l'équation de la chaleur, et $u \geq v = 0$ sur Γ_T à cause de la positivité de la condition initiale u_0 et à cause des conditions limites de Dirichlet. Le principe de comparaison implique que $u \geq v = 0$ dans Ω_T .

Le cas $u_0 \leq 0$ est similaire. \square

CHAPITRE 4

L'équation des ondes dans \mathbb{R}^n

Dans ce chapitre, on considère l'équation des ondes dans \mathbb{R}^n ($n \geq 2$):

$$(4.1) \quad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{dans } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{dans } \mathbb{R}^n, \\ u_t(0, \cdot) = u_1 & \text{dans } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Ici, $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R}^n)$ sont des fonctions données. On suppose que $u \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ est une solution de l'équation des ondes (on ne dit rien sur l'existence d'une telle solution).

1. Moyennes sphériques

Soient $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, $r > 0$. Dans la suite, on note

$$U(t, x, r) := \int_{\partial B(x, r)} u(t, y) d\sigma(y)$$

la moyenne sphérique de u sur la sphère $\partial B(x, r)$. De manière similaire,

$$U_0(x, r) := \int_{\partial B(x, r)} u_0(y) d\sigma(y)$$

et

$$U_1(x, r) := \int_{\partial B(x, r)} u_1(y) d\sigma(y).$$

LEMME 4.1 (Equation de Euler-Poisson-Darboux). *Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ la moyenne sphérique $U(x, \cdot, \cdot)$ est solution de*

$$(4.2) \quad \begin{cases} U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r}U_r = 0 & \text{dans } (0, \infty) \times (0, \infty), \\ U(0, \cdot) = U_0 & \text{dans } (0, \infty), \\ U_t(0, \cdot) = U_1 & \text{dans } (0, \infty). \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Nous avons premièrement

$$\begin{aligned} U(t, x, r) &= \frac{1}{\sigma_{n-1}r^{n-1}} \int_{\partial B(0, r)} u(t, x + y) d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int_{\partial B(0, 1)} u(t, x + ry) d\sigma(y), \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
 U_r(t, x, r) &= \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int_{\partial B(0,1)} \nabla u(t, x + ry) \cdot y \, d\sigma(y) \\
 &= \frac{1}{\sigma_{n-1} r^{n-1}} \int_{\partial B(0,r)} \nabla u(t, x + y) \cdot \frac{y}{r} \, d\sigma(y) \\
 (4.3) \quad &= \frac{1}{\sigma_{n-1} r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u(t, y) \, dy \\
 &= \frac{r}{n} \int_{B(x,r)} \Delta u(t, y) \, dy,
 \end{aligned}$$

où on a utilisé aussi $\sigma_{n_1} = n\omega_n$. En dérivant le dernier terme, on trouve

$$\begin{aligned}
 U_{rr}(t, x, r) &= \frac{1}{n} \int_{B(x,r)} \Delta u(t, y) \, dy + \frac{r}{n} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\omega_n} \int_{B(0,1)} \Delta u(t, x + ry) \, dy \\
 &= \frac{1}{n} \int_{B(x,r)} \Delta u(t, y) \, dy + \frac{r}{n\omega_n} \sum_{i=1}^n \int_{B(0,1)} \frac{\partial}{\partial y_i} \Delta u(t, x + ry) y_i \, dy \\
 (4.4) \quad &= \frac{1}{n} \int_{B(x,r)} \Delta u(t, y) \, dy - \frac{r}{\omega_n} \int_{B(0,1)} \Delta u(t, x + ry) \, dy + \\
 &\quad + \frac{r}{\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} \Delta u(t, x + ry) \sum_{i=1}^n y_i^2 \, d\sigma(y) \\
 &= \left(\frac{1}{n} - 1\right) \int_{B(x,r)} \Delta u(t, y) \, dy + \int_{\partial B(x,r)} \Delta u(t, y) \, d\sigma(y).
 \end{aligned}$$

On obtient de (4.3) et l'équation des ondes

$$\begin{aligned}
 U_r(t, x, r) &= \frac{r}{n} \int_{B(x,r)} u_{tt}(t, y) \, dy \\
 &\quad - \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{B(x,r)} u_{tt}(t, y) \, dy,
 \end{aligned}$$

et donc

$$r^{n-1} U_r(t, x, r) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{B(x,r)} u_{tt}(t, y) \, dy.$$

En conséquence,

$$\begin{aligned}
 (r^{n-1} U_r(t, x, r))_r &= \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B(x,r)} u_{tt}(t, y) \, dy \\
 &= r^{n-1} \int_{\partial B(x,r)} u_{tt}(t, y) \, dy \\
 &= r^{n-1} U_{tt}(t, x, r).
 \end{aligned}$$

□

2. Solution de l'équation des ondes dans \mathbb{R}^3

Soit $n = 3$ et soient U, U_0, U_1 définis comme dans le paragraphe précédent. On rappelle l'équation de Euler-Poisson-Darboux en dimension $n = 3$:

$$(4.5) \quad \begin{cases} U_{tt} - U_{rr} - \frac{2}{r}U_r = 0 & \text{dans } (0, \infty) \times (0, \infty), \\ U(0, \cdot) = U_0 & \text{dans } (0, \infty), \\ U_t(0, \cdot) = U_1 & \text{dans } (0, \infty). \end{cases}$$

On pose

$$\tilde{U}(t, xr) = r U(t, x, r), \quad \tilde{U}_0(x, r) = r U_0(x, r), \quad \text{et} \quad \tilde{U}_1(x, r) = r U_1(x, r).$$

Alors

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{tt} &= r U_{tt} \\ &= r \left[U_{rr} + \frac{2}{r} U_r \right] \\ &= r U_{rr} + 2 U_r \\ &= (U + r U_r)_r \\ &= \tilde{U}_{rr}, \end{aligned}$$

c.à.d. la fonction \tilde{U} est solution de

$$(4.6) \quad \begin{cases} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} = 0 & \text{dans } (0, \infty) \times (0, \infty), \\ \tilde{U}(t, 0) = 0 & \text{pour } t \in (0, \infty), \\ \tilde{U}(0, \cdot) = \tilde{U}_0 & \text{dans } (0, \infty), \\ \tilde{U}_t(0, \cdot) = \tilde{U}_1 & \text{dans } (0, \infty). \end{cases}$$

On prolonge $\tilde{U}_0(x, \cdot)$ et $\tilde{U}_1(x, \cdot)$ en des fonctions impaires sur \mathbb{R} . Alors la solution de l'équation (4.6) ci-dessus est donnée par la formule de d'Alembert: pour tout $r, t > 0$ on a

$$(4.7) \quad \tilde{U}(t, x, r) = \frac{1}{2}(\tilde{U}_0(x, r+t) + \tilde{U}_0(x, r-t)) + \frac{1}{2} \int_{r-t}^{r+t} \tilde{U}_1(x, s) ds.$$

Si $0 < r < t$, alors on peut aussi écrire:

$$\tilde{U}(t, x, r) = \frac{1}{2}(\tilde{U}_0(x, t+r) - \tilde{U}_0(x, t-r)) + \frac{1}{2} \int_{t-r}^{t+r} \tilde{U}_1(x, s) ds.$$

On note maintenant que

$$u(t, x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} U(t, x, r).$$

En conséquence,

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{U}(t, x, r)}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \left[\frac{\tilde{U}_0(x, t+r) - \tilde{U}_0(x, t-r)}{2r} + \frac{1}{2r} \int_{t-r}^{t+r} \tilde{U}_1(x, s) ds \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \tilde{U}_0(x, t) + \tilde{U}_1(x, t). \end{aligned}$$

En utilisant la définition de \tilde{U}_0 et \tilde{U}_1 , ceci implique

$$(4.8) \quad u(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \left(t \int_{\partial B(x,t)} u_0(y) d\sigma(y) \right) + t \int_{\partial B(x,t)} u_1(y) d\sigma(y).$$

On a,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial B(x,t)} u_0(y) d\sigma(y) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial B(0,1)} u_0(x+ty) d\sigma(y) \\ &= \int_{\partial B(0,1)} \nabla u_0(x+ty) \cdot y d\sigma(y) \\ &= \int_{\partial B(x,t)} \nabla u_0(y) \cdot \frac{y-x}{t} d\sigma(y). \end{aligned}$$

Finalement, on obtient la *formule de Kirchhoff* pour la solution de l'équation des ondes (4.1) dans \mathbb{R}^3 :

$$(4.9) \quad u(t, x) = \int_{\partial B(x,t)} \left[u_0(y) + \nabla u_0(y) \cdot \frac{y-x}{t} + t u_1(y) \right] d\sigma(y).$$

3. Solution de l'équation des ondes dans \mathbb{R}^2

On utilise la formule de Kirchhoff (4.9) pour résoudre l'équation des ondes dans \mathbb{R}^2 . En fait, soit $u = u(t, x)$ une solution de l'équation des ondes (4.1) dans \mathbb{R}^2 . On pose

$$\tilde{u}(t, x_1, x_2, x_3) = u(t, x_1, x_2) \quad \text{pour } t > 0, x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

c.à.d. on rajoute artificiellement une troisième variable x_3 . Alors \tilde{u} est solution de l'équation des ondes

$$(4.10) \quad \begin{cases} \tilde{u}_{tt} - \Delta \tilde{u} = 0 & \text{dans } (0, \infty) \times \mathbb{R}^3, \\ \tilde{u}(0, \cdot) = \tilde{u}_0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \tilde{u}_t(0, \cdot) = \tilde{u}_1 & \text{dans } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

où

$$\tilde{u}_i(x_1, x_2, x_3) := u_i(x_1, x_2) \quad \text{pour } x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, i = 0, 1.$$

Etant donné $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ on définit $\tilde{x} := (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3$. Alors la formule de Kirchhoff (4.8) implique

$$(4.11) \quad \begin{aligned} u(t, x) &= \tilde{u}(t, \tilde{x}) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(t \int_{\partial B(\tilde{x}, t)} \tilde{u}_0(y) d\sigma(y) \right) + t \int_{\partial B(\tilde{x}, t)} \tilde{u}_1(y) d\sigma(y). \end{aligned}$$

On note que

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(\tilde{x}, t)} \tilde{u}_0(y) d\sigma(y) &= \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B(\tilde{x}, t)} \tilde{u}_0(y) d\sigma(y) \\ &= \frac{2}{4\pi t^2} \int_{B(x, t)} u_0(y) \sqrt{1 + |\nabla_y \sqrt{t^2 - |y - x|^2}|} dy \\ &= \frac{1}{2\pi t} \int_{B(x, t)} \frac{u_0(y)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} dy \end{aligned}$$

On obtient finalement la *formule de Poisson* pour la solution de l'équation des ondes (4.1) dans \mathbb{R}^2 :

$$(4.12) \quad u(t, x) = \frac{1}{2} \int_{B(x, t)} \frac{tu_0(y) + t^2 u_1(y) + t \nabla u_0(y) \cdot (y - x)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} dy.$$

CHAPITRE 5

Annexe

1. La mesure de surface sur la sphère dans \mathbb{R}^n

Dans un premier temps on va définir une mesure sur la sphère S_{n-1} , afin d'introduire les coordonnées polaires dans \mathbb{R}^n et afin de démontrer (dans un deuxième temps) le théorème d'intégration par parties dans une boule de \mathbb{R}^n .

Motivation (coordonnées polaires dans \mathbb{R}^2): dans \mathbb{R}^2 on considère le cercle unité $S_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ ($|\cdot|$ désigne la norme euclidienne dans \mathbb{R}^2). Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue ou au moins mesurable. A l'aide des coordonnées polaires dans \mathbb{R}^2 on montre que

$$(5.1) \quad \int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \, d\theta \, r \, d\lambda(r).$$

Question: est-ce qu'il existe une mesure σ sur le cercle unité S_1 tel que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda = \int_0^\infty \int_{S_1} f(rx) \, d\sigma(x) \, r \, d\lambda(r)?$$

Pour tout ensemble borélien $A \subset S_1$ on définit

$$\tilde{A} = \{ry : y \in A, 0 \leq r \leq 1\}.$$

Si une mesure de surface σ sur le cercle unité existe tel que (5.1) est vrai pour toute fonction f positive, mesurable, alors pour tout ensemble borélien $A \subset S_1$ on a

$$\begin{aligned} \lambda(\tilde{A}) &= \int_0^1 \int_{S_1} 1_{\tilde{A}}(rx) \, d\sigma \, r \, dr \\ &= \int_0^1 \sigma(A) \, r \, dr \\ &= \frac{\sigma(A)}{2}. \end{aligned}$$

Cette égalité va servir comme motivation de la définition ci-dessous.

Soit

$$B_n(R) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$$

la boule ouverte de centre 0 et de rayon $R > 0$, et soit

$$S_{n-1}(R) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = R\}$$

le bord de cette boule, c.à.d. la sphère de centre 0 et de rayon R . Pour $R = 1$ on note simplement $B_n(1) =: B_n$ (boule unité) et $S_{n-1}(1) =: S_{n-1}$ (sphère unité).

DÉFINITION 5.1 (Mesure de surface). Soit $\mathcal{B}(S_{n-1})$ la tribu borélienne sur S_{n-1} . Pour tout $A \in \mathcal{B}(S_{n-1})$ on définit

$$\sigma(A) := n\lambda(\tilde{A}),$$

où

$$\tilde{A} = \{rx : x \in A, 0 \leq r \leq 1\}$$

et où λ est la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^n . On appelle σ la *mesure de surface* sur S_{n-1} .

THÉORÈME 5.2 (Coordonnées polaires). Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\lambda(x) = \int_{(0,\infty)} \int_{S_{n-1}} f(ry) d\sigma(y) r^{n-1} d\lambda(r).$$

DÉMONSTRATION. Soit ϱ la mesure produit de $r^{n-1}d\lambda(r)$ sur $(0, \infty)$ et de σ sur S_{n-1} , c.à.d. $\varrho := r^{n-1}d\lambda(r) \otimes \sigma$ sur $(0, \infty) \times S_{n-1}$.

On considère l'application

$$\varphi : (0, \infty) \times S_{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \varphi(r, y) = ry.$$

Alors

$$\varphi(\varrho) = \lambda$$

si et seulement si

$$\varrho = \varphi^{-1}(\lambda).$$

L'ensemble

$$\mathcal{E} = \{(r_1, r_2] \times A; \quad 0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \infty, A \subset B(S_{n-1})\}$$

est un générateur de $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(S_{n-1})$, stable par des intersections. En plus, $\varrho(B) = \varphi^{-1}(\lambda)(B)$ pour tout $B \in \mathcal{E}$. En effet, pour tout $B = (r_1, r_2] \times A$

$$\begin{aligned} \varrho(B) &= \int_{r_1}^{r_2} r^{n-1} dr \sigma(A) \\ &= \frac{1}{n}(r_2^n - r_1^n) \sigma(A) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\lambda)(B) &= \lambda(\varphi(B)) \\ &= \lambda(r_2\tilde{A} \setminus r_1\tilde{A}) \\ &= \lambda(r_2\tilde{A}) - \lambda(r_1\tilde{A}) \\ &= r_2^n \lambda(\tilde{A}) - r_1^n \lambda(\tilde{A}) \\ &= r_2^n \frac{\sigma(A)}{n} - r_1^n \frac{\sigma(A)}{n}. \end{aligned}$$

Il suit que la mesure image $\varphi^{-1}(\lambda)$ est égale à la mesure ϱ . Donc, la mesure de Lebesgue λ est égale à la mesure image $\varphi(\varrho)$.

L'assertion suit maintenant du théorème de Tonelli qui implique que pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda &= \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\varphi(\varrho) \\ &= \int_{(0,\infty) \times S_{n-1}} f \circ \varphi(r, y) \, d\varrho \\ &= \int_{(0,\infty)} \int_{S_{n-1}} f(ry) \, d\sigma(y) r^{n-1} \, d\lambda(r). \end{aligned}$$

□

En remplaçant le théorème de Tonelli par le théorème de Fubini dans la démonstration précédente, on obtient le corollaire suivant.

COROLLAIRE 5.3 (Coordonnées polaires). *Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable. Alors $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ (c.à.d. f est intégrable sur \mathbb{R}^n) si et seulement si*

$$\int_0^\infty \int_{S_{n-1}} |f(rx)| \, d\sigma(x) r^{n-1} \, dr < \infty.$$

Dans ce cas on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx = \int_0^\infty \int_{S_{n-1}} f(rx) \, d\sigma(x) r^{n-1} \, dr.$$

EXEMPLE 5.4 (Fonctions radiales). Soit $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$ et soit $g : (r_1, r_2) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable. Alors

$$f(x) := g(|x|), \quad |x| \in (r_1, r_2),$$

est une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable sur l'ensemble

$$R = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 \leq |x| \leq r_2\}.$$

D'après le Théorème 5.2,

$$(5.2) \quad \int_R f \, d\lambda = \sigma_{n-1} \int_{r_1}^{r_2} g(r) r^{n-1} \, dr,$$

où

$$\sigma_{n-1} := \sigma(S_{n-1}) = n \lambda(B_n)$$

est la mesure de la sphère unité.

En utilisant le Corollaire 5.3, on montre: soit $g : (r_1, r_2) \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable tel que $\int_{r_1}^{r_2} |g(r)| r^{n-1} \, dr < \infty$. Alors $f(x) := g(|x|)$ est une fonction intégrable sur R , et on a l'égalité (5.2).

EXEMPLE 5.5 (L'intégrale de surface dans S_1). Soit σ la mesure de surface sur le cercle unité S_1 , et soit $A \in \mathcal{B}(S_1)$. Alors:

$$\begin{aligned}\sigma(A) &= 2\lambda(\tilde{A}) \\ &= 2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} 1_{\tilde{A}}(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta dr \\ &= 2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} 1_A(\cos \theta, \sin \theta) d\theta r dr \\ &= \int_0^{2\pi} 1_A(\cos \theta, \sin \theta) d\theta.\end{aligned}$$

On a montré que σ est la mesure image $\psi(\lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $[0, 2\pi]$ et $\psi : [0, 2\pi] \rightarrow S_1$ est défini par

$$\psi(\theta) := (\cos \theta, \sin \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

DÉFINITION 5.6 (Mesure de surface). On définit la *mesure de surface* σ_r sur la sphère $S_{n-1}(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}$ par

$$\sigma_r(A) = \sigma\left(\frac{A}{r}\right)r^{n-1}, \quad A \in \mathcal{B}(S_{n-1}(r)).$$

Avec cette définition de la mesure de surface σ_r on a pour toute fonction $f : S_{n-1}(r) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable l'égalité

$$\int_{S_{n-1}} f(ry)r^{n-1} d\sigma(y) = \int_{S_{n-1}(r)} f(y) d\sigma_r(y).$$

En conséquent (Théorème 5.2),

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda = \int_0^\infty \int_{S_{n-1}(r)} f(y) d\sigma_r(y) d\lambda(r).$$

2. Intégration par parties sur une boule

Dans cette section, on veut démontrer la formule d'intégration par parties sur une boule dans \mathbb{R}^n .

LEMME 5.7. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors:

$$\frac{d}{dR} \int_{B_n(R)} f d\lambda = \int_{S_{n-1}(R)} f d\sigma_R.$$

DÉMONSTRATION. La continuité de f et le théorème de Lebesgue impliquent, que la fonction

$$r \mapsto \int_{S_{n-1}} f(ry) d\sigma(y)$$

est continue sur $(0, \infty)$.

En conséquence,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dR} \int_{B_n(R)} f \, d\lambda &= \frac{d}{dR} \int_0^R \int_{S_{n-1}} f(ry) \, d\sigma(y) r^{n-1} \, d\lambda(r) \\ &= R^{n-1} \int_{S_{n-1}} f(Ry) \, d\sigma(y) \\ &= \int_{S_{n-1}(R)} f(y) \, d\sigma_R(y). \end{aligned}$$

□

LEMME 5.8. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors:

$$\begin{aligned} \int_{S_{n-1}(R)} f(x) \, d\sigma(x) &= \\ &= \int_{B_{n-1}(R)} \frac{R}{\sqrt{R^2 - |y|^2}} \left(f(\sqrt{R^2 - |y|^2}, y) + f(-\sqrt{R^2 - |y|^2}, y) \right) \, d\lambda(y). \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Le Lemme 5.7 et le Théorème de Fubini impliquent

$$\begin{aligned} &\int_{S_{n-1}(R)} f(x) \, d\sigma(x) \\ &= \frac{d}{dR} \int_{B_n(R)} f \, d\lambda \\ &= \frac{d}{dR} \int_{B_{n-1}(R)} \int_{-\sqrt{R^2 - |y|^2}}^{\sqrt{R^2 - |y|^2}} f(t, y) \, d\lambda(t) \, d\lambda(y) \\ &= \int_{S_{n-2}(R)} \int_{-\sqrt{R^2 - |y|^2}}^{\sqrt{R^2 - |y|^2}} f(t, y) \, d\lambda(t) \, d\sigma(y) + \\ &\quad + \int_{B_{n-1}(R)} \frac{R}{\sqrt{R^2 - |y|^2}} f(\sqrt{R^2 - |y|^2}, y) \, d\lambda(y) - \\ &\quad - \int_{B_{n-1}(R)} \frac{-R}{\sqrt{R^2 - |y|^2}} f(-\sqrt{R^2 - |y|^2}, y) \, d\lambda(y) \\ &= \int_{B_{n-1}(R)} \frac{R}{\sqrt{R^2 - |y|^2}} \left(f(\sqrt{R^2 - |y|^2}, y) + \right. \\ &\quad \left. + f(-\sqrt{R^2 - |y|^2}, y) \right) \, d\lambda(y). \end{aligned}$$

□

On définit

$$C^1(\overline{B_n(R)}) := \{u \in C^1(B_n(R)) : u \text{ et } \nabla u \text{ ont des prolongements continues sur } \overline{B_n(R)}\}$$

THÉORÈME 5.9 (Théorème principal). *Soit $u \in C^1(\overline{B_n(R)})$. Alors, pour tout $1 \leq i \leq n$ on a*

$$\int_{B_n(R)} \partial_{x_i} u \, d\lambda = \int_{S_{n-1}(R)} u(x) \frac{x_i}{R} \, d\sigma_R(x).$$

DÉMONSTRATION. Par des raisons de symétrie il suffit de démontrer le théorème pour $i = 1$. En appliquant le Lemme 5.8 à la fonction $f(x) := u(x) \frac{x_1}{R}$ et en utilisant le théorème de Fubini on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{B_n(R)} \partial_{x_1} u \, d\lambda \\ &= \int_{B_{n-1}(R)} \int_{-\sqrt{R^2-|y|^2}}^{\sqrt{R^2-|y|^2}} \partial_{x_1} u(t, y) \, d\lambda(t) \, d\lambda(y) \\ &= \int_{B_{n-1}(R)} \left(u(\sqrt{R^2-|y|^2}, y) - u(-\sqrt{R^2-|y|^2}, y) \right) \, d\lambda(y) \\ &= \int_{S_{n-1}(R)} u(x) \frac{x_1}{R} \, d\sigma(x). \end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 5.10 (Intégration par parties sur $B_n(R)$). *Soient $u, v \in C^1(\overline{B_n(R)})$. Alors pour tout $1 \leq i \leq n$ on a*

$$\int_{B_n(R)} (\partial_{x_i} u) v \, d\lambda = \int_{S_{n-1}(R)} u(x) v(x) \frac{x_i}{R} \, d\sigma_R(x) - \int_{B_n(R)} u (\partial_{x_i} v) \, d\lambda.$$

DÉMONSTRATION. Dans le Théorème 5.9, il suffit de remplacer la fonction u par le produit uv et de noter que $\partial_{x_i}(uv) = (\partial_{x_i} u)v + u(\partial_{x_i} v)$. □

COROLLAIRE 5.11 (Gauß). *Soit $u \in C^1(\overline{B_n(R)}; \mathbb{R}^n)$. Alors on a*

$$\int_{B_n(R)} \operatorname{div} u \, d\lambda = \int_{S_{n-1}(R)} \left\langle u(x), \frac{x}{R} \right\rangle \, d\sigma(x),$$

où $\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} u_i$ est la divergence de u .

DÉMONSTRATION. Simple application du Théorème 5.9. □

3. Intégration par parties sur un ouvert régulier

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. On note $\Gamma := \partial\Omega$ le bord de Ω .

DÉFINITION 5.12. On dit que Ω a un *bord régulier* (ou que Ω est régulier), si pour tout $a \in \Gamma$ il existe un voisinage ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et une fonction $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tel que

- (a) $\nabla\psi(x) \neq 0$ pour tout $x \in U$,
- (b) $U \cap \Omega = \{x \in U : \psi(x) < 0\}$,

EXEMPLE 5.13. La boule $B_n(R)$ de rayon $R > 0$ en dimension n a un bord régulier. Pour voir cela, on définit pour tout point $a \in S_{n-1}(R) = \partial B_n(R)$ le voisinage $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et la fonction $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$ par $\psi(x) := |x|^2 - R^2$.

Dans la suite $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est toujours un ouvert à bord régulier.

LEMME 5.14. Soit $a \in \Gamma$, et soient U et ψ comme dans la définition 5.12. Soit $x \in U$ tel que $\psi(x) = 0$. Soit

$$v := \frac{\nabla\psi(x)}{|\nabla\psi(x)|}.$$

Alors on a:

- (a) $|v| = 1$, et
- (b) il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x + tv \notin \Omega$, $t \in [0, \varepsilon)$, et $x + tv \in \Omega$, $t \in (-\varepsilon, 0)$.

DÉMONSTRATION. Le théorème de Taylor implique

$$\psi(x + tv) = \langle \nabla\psi(x) v, tv \rangle + o(t),$$

où $\frac{o(t)}{t} \rightarrow 0$ lorsque $|t| \rightarrow 0$.

On pose $c := |\nabla\psi(x)| > 0$. Alors on a

$$\begin{aligned} \psi(x + tv) &= ct + o(t) \\ &= t\left(c + \frac{o(t)}{t}\right) \begin{cases} > 0, & \text{falls } t \in (0, \varepsilon) \\ < 0, & \text{falls } t \in (-\varepsilon, 0). \end{cases} \end{aligned}$$

□

LEMME 5.15. Soit $a \in \Gamma$, et soient U et ψ comme dans la définition 5.12. Alors on a

$$U \cap \Gamma = \{x \in U : \psi(x) = 0\}.$$

DÉMONSTRATION. "⊃" Soit $x \in U$ tel que $\psi(x) = 0$. Le Lemme 5.14 implique que $x \in \Gamma$.

"⊂" Soit $x \in U \cap \Gamma$. Alors on a $\psi(x) \geq 0$ parce que $x \notin \Omega$, et $\psi(x) \leq 0$ à cause de la continuité de ψ . Donc, $\psi(x) = 0$. □

DÉFINITION 5.16. Soit $a \in \Gamma$. Un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est appelé *vecteur tangentiel* en a (tangentiel à Γ), s'il existe $\tau : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Gamma$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$, tel que $\tau_j \in C^1(-\varepsilon, \varepsilon)$, $\tau(0) = a$ et $v = \tau'(0)$.

On définit

$$T_a\Gamma := \{v \in \mathbb{R}^n : v \text{ est vecteur tangentiel en } a\}.$$

Dans la suite, pour deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$ on définit le produit scalaire euclidien

$$\langle x, y \rangle := x \cdot y := \sum_{j=1}^n x_j y_j.$$

Pour un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ on définit *l'orthogonale*

$$A^\perp := \{y \in \mathbb{R}^n : x \cdot y = 0 \text{ pour tout } x \in A\}.$$

Pour tout $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\dim\{v\}^\perp = n - 1.$$

Soient $F \subset E \subset \mathbb{R}^n$ des espaces vectoriels. Alors

$$\dim F \leq \dim E \leq n,$$

et $\dim F = \dim E$ si et seulement si $F = E$.

On a finalement aussi l'identité

$$v^{\perp\perp} = \mathbb{R} \cdot v.$$

PROPOSITION 5.17 (Espace tangentiel). Soit $a \in \Gamma$. Alors $T_a\Gamma$ est un sous-espace vectoriel de dimension $(n - 1)$ de \mathbb{R}^n .

On appelle $T_a\Gamma$ l'espace tangentiel en a (tangentiel à Γ).

DÉMONSTRATION. Soit $a \in \Gamma$, et soient U et ψ comme dans la définition 5.12. On montre que

$$T_a\Gamma = (\nabla\psi(a))^{\perp}.$$

" \subset ". Soit $v \in T_a\Gamma$ et soit τ comme dans la définition 5.16. Le Lemme 5.15 implique que $\psi(\tau(t)) = 0$ pour tout $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ et

$$\begin{aligned} 0 &= (\psi \circ \tau)'(0) \\ &= \langle \nabla\psi(\tau(0)), \tau'(0) \rangle \\ &= \langle \nabla\psi(a), v \rangle, \end{aligned}$$

c.à.d. $v \in (\nabla\psi(a))^{\perp}$.

" \supset ". L'argument précédent montre que $T_a\Gamma$ est un sous-espace vectoriel inclus dans un sous-espace de dimension $(n - 1)$ de \mathbb{R}^n . On montre maintenant que $T_a\Gamma$ contient un sous-espace de dimension $(n - 1)$ de \mathbb{R}^n .

La propriété $\nabla\psi(a) \neq 0$ implique, que au moins une des dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x_i}\psi(a)$ est non-nulle. Sans perte de généralité on va supposer que $\frac{\partial}{\partial x_n}\psi(a) \neq 0$.

Le théorème de la fonction implicite implique qu'il existe un ouvert $V_1 \subset \mathbb{R}^{n-1}$, un ouvert $V_2 \subset \mathbb{R}$, et une fonction $g : V_1 \rightarrow V_2$ continument différentiable tels que

$$a \in V_1 \times V_2 \subset U$$

et

$$\begin{aligned} V_1 \times V_2 \cap \Gamma &= \{(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2 : \psi(x_1, x_2) = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2 : x_2 = g(x_1)\}. \end{aligned}$$

Nous notons tout vecteur $x \in V_1 \times V_2 \subset \mathbb{R}^n$ comme (x_1, x_2) avec $x_1 \in V_1$ et $x_2 \in V_2$.

Soit $v \in \mathbb{R}^{n-1}$. On définit

$$\tau(t) := (a_1 + tv, g(a_1 + tv))$$

pour tout $|t| \in \mathbb{R}$ assez petit. Alors $\tau(t) \in \Gamma$ pour tout t . en plus, la fonction τ est différentiable, $\tau(0) = a$ et

$$\tau'(0) = (v, \langle \nabla g(a_1), v \rangle).$$

Alors l'ensemble

$$\{(v, \langle \nabla g(a_1), v \rangle) : v \in \mathbb{R}^{n-1}\}$$

est inclus dans l'ensemble $T_a\Gamma$ de tous les vecteurs tangentiels. Mais cet ensemble est un sous-espace de dimension $(n - 1)$ de \mathbb{R}^n . \square

PROPOSITION 5.18 (Vecteur normal). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, borné, avec bord Γ régulier. Alors:*

- (1) *Pour tout $a \in \Gamma$ il existe un vecteur $\nu(a) \in \mathbb{R}^n$ unique tel que*
 - (a) $|\nu(a)| = 1$,
 - (b) *il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(a + t\nu(a)) \notin \Omega$, $t \in [0, \varepsilon)$, et $(a + t\nu(a)) \in \Omega$, $t \in (-\varepsilon, 0)$, et*
 - (c) $\nu(a) \in (T_a\Gamma)^\perp$.
- (2) *La fonction $\nu : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.*

On appelle le vecteur $\nu(a)$ la normale extérieure en a .

DÉMONSTRATION. Soit $a \in \Gamma$, et soient U et ψ comme dans la définition 5.12. On pose

$$\nu(a) := \frac{\nabla\psi(a)}{|\nabla\psi(a)|}.$$

Il suit du lemme 5.14 que $\nu(a)$ vérifie les propriétés (a) et (b). En plus, il suit de la démonstration de la proposition 5.17 que $\nu(a)$ vérifie aussi (c). On a donc démontré l'existence du vecteur $\nu(a)$.

Inversement, si ν est un vecteur vérifiant les propriétés (a)-(c), alors (c) implique

$$\nu \in (T_a\Gamma)^\perp = (\nabla\psi(a))^{\perp\perp} = \mathbb{R} \cdot \nabla\psi(a),$$

c.à.d. ν et $\nabla\psi(a)$ sont linéairement dépendants. La propriété de normalisation (a) et la propriété (b) impliquent que $\nu = \nu(a)$.

La continuité de l'application ν suit de la définition de ν et de la continuité de $\nabla\psi$. □

Dans la suite on pose

$$\mathcal{B}(\Gamma) = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : A \subset \Gamma\}$$

la tribu borélienne de Γ , et

$$C^1(\bar{\Omega}) := \{u \in C^1(\Omega) : u \text{ et } \nabla u \text{ admettent un prolongement continue sur } \bar{\Omega}\}$$

THÉORÈME 5.19 (Théorème principale dans \mathbb{R}^n). *Il existe une mesure unique $\sigma : \mathcal{B}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}_+$ sur le bord de Ω telle que pour tout $1 \leq i \leq n$ et pour tout $u \in C^1(\bar{\Omega})$ on a*

$$\int_{\Omega} D_i u \, dx = \int_{\Gamma} u \nu_i \, d\sigma.$$

DÉMONSTRATION. Sans démonstration. □

EXEMPLE 5.20. Soit $\Omega = B_n(R)$ la boule de dimension n et de rayon $R > 0$. Alors ce théorème principale suit du théorème 5.9. Dans ce cas σ est la mesure de surface sur la sphère $S_{n-1}(R)$.

COROLLAIRE 5.21 (Intégration par partie). *Soient $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$. Alors*

$$\int_{\Omega} D_j u v \, dx = - \int_{\Omega} u D_j v \, dx + \int_{\Gamma} u v \nu_j \, d\sigma.$$

DÉMONSTRATION. Le théorème principal (théorème 5.19) implique

$$\int_{\Omega} D_j(uv) \, dx = \int_{\Omega} uvv_j \, d\sigma.$$

L'assertion suit de l'égalité

$$\int_{\Omega} D_j(uv) \, dx = \int_{\Omega} D_juv \, dx + \int_{\Omega} uD_jv \, dx.$$

□

COROLLAIRE 5.22 (Théorème de Gauss). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, borné, avec bord régulier. Alors pour tout $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ on a

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} u \, d\lambda = \int_{\Gamma} \langle u, \nu \rangle \, d\sigma,$$

avec $\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^n D_i u_i$.

DÉMONSTRATION. Le théorème principal (théorème 5.19) implique

$$\begin{aligned} \sum_i \int_{\Omega} D_i u_i \, d\lambda &= \sum_i \int_{\Gamma} u_i \nu_i \, d\sigma \\ &= \int_{\Gamma} \langle u, \nu \rangle \, d\sigma. \end{aligned}$$

□

Bibliographie

1. H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, 1992.
2. L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
3. D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2001.
4. F. John, *Partial Differential Equations. Fourth Edition*, Applied Mathematical Sciences, vol. 1, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982.
5. J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
6. J.-E. Rakotoson and J.-M. Rakotoson, *Analyse fonctionnelle appliquée aux équations aux dérivées partielles*, Presse universitaire de France, Paris, 1999.
7. H. Reinhard, *Equations aux dérivées partielles. Introduction*, Dunod, Paris, 2001.