Prof.Dr.W.Timmermann
Institut für Analysis Juni 2011

Wie versprochen möchte ich Ihnen hier den Beweis des Lemmas von Goursat nachreichen. (vgl. Fischer/Lieb: Funktionentheorie)

Satz:(Lemma von Goursat)
Sei $\triangle$ ein abgeschlossenes Dreick in $\mathbb{C}$. Dann gilt für jede in einer Umgebung von $\triangle$ holomorphe Funktion f

$$\int\limits_{\partial\triangle} f(z)dz = 0$$

.

Beweis: Zerlege $\triangle$ in vier Teildreiecke $\triangle_1^1, ..., \triangle_1^4$, indem man die Mittelpunkte der Seiten von $\triangle$ miteinander verbindet. Alle Seiten aller Dreiecke werden mathematisch positiv orientiert (Skizze anfertigen!). Bildet man

$$\sum_{k=1}^{4} \int\limits_{\partial\triangle_1^k} f(z)dz,$$

so werden die im Inneren von $\triangle$ liegenden Dreieckseiten der Teildreiecke zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, heben sich also weg. Also:

$$\left|\int\limits_{\partial\triangle} f(z)dz\right| = \left|\sum_{k=1}^{4} \int\limits_{\partial\triangle_1^k} f(z)dz\right| \leq 4\max_k \left|\int\limits_{\partial\triangle_1^k} f(z)dz\right| = 4\left|\int\limits_{\triangle_1} f(z)dz\right|$$

Hierbei ist $\triangle_1$ eines der Dreiecke unter den $\triangle_k^1$, dessen Randintegral maximalen Betrag hat. Mit $\triangle_1$ verfahren wir wie mit $\triangle$ und erhalten dann ein Dreieck $\triangle_2$ mit

$$\left|\int\limits_{\partial\triangle} f(z)dz\right| \leq 4\left|\int\limits_{\triangle_1} f(z)dz\right| \leq 4^2\left|\int\limits_{\triangle_2} f(z)dz\right|$$

Setzt man diesen Prozess fort, so erhält man eine Folge von Dreiecken

$$\triangle =: \triangle_0 \supset \triangle_1 \supset \triangle_2 \supset ....$$

mit

$$\left|\int\limits_{\partial\triangle} f(z)dz\right| \leq 4^n\left|\int\limits_{\triangle_n} f(z)dz\right| \qquad (*)$$

Aus der Konstruktion folgt für die Längen $L(.)$ der Dreiecksberandungen:

$$L(\partial\triangle_n) = \frac{1}{2}L(\partial\triangle_{n-1}) = ... = 2^{-n}L(\partial\triangle) \qquad (**)$$

Da alle Dreiecke kompakt sind, existiert genau ein $z_0 \in \triangle$ mit

$$\bigcap_{n\geq 0} \triangle_n = \{z_0\}.$$

Die Differenzierbarkeit von f in z_0 können wir bekanntlich schreiben als

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z), \quad \frac{r(z)}{|z - z_0|} \to 0 \text{ für } z \to z_0.$$

Wir schreiben $r(z) = R(z)(z - z_0)$. Dann ist R(.) eine stetige Funktion, die in z_0 verschwindet. Das benutzen wir, um die Integrale über $\partial\triangle_n$ abzuschätzen. Da der lineare Teil $f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)$ offenbar eine Stammfunktion besitzt, verschwindet dessen Integral über $\partial\triangle_n$. Mithin

$$\left|\int\limits_{\partial\triangle_n} f(z)dz\right| = \left|\int\limits_{\partial\triangle_n} (z - z_0)R(z)dz\right| \leq L(\partial\triangle_n)\cdot \max_{z\in\partial\triangle_n} (|z-z_0|\cdot|R(z)|) \leq L(\partial\triangle_n))^2 \max_{z\in\partial\triangle_n} |R(z)|.$$

Jetzt benutzt man (*) und (**) und erhält (der Faktor 4^n aus (*) hebt sich wegen (**) weg!)

$$\left|\int\limits_{\partial\triangle} f(z)dz\right| \leq (L(\partial\triangle))^2 \cdot \max_{z\in\triangle_n} |R(z)|.$$

Da die stetige Funktion $R(.)$ in z_0 verschwindet, wird die rechte Seite beliebig klein, wenn n hinreichend groß. Damit ist der Satz gezeigt. ■

Dieser Satz hat eine häufig benutzte Folgerung.

Folgerung:
Sei $\triangle$ wie im Satz und $z_0 \in \triangle$. Ist f in einer Umgebung von $\triangle$ mit eventueller Ausnahme von z_0 holomorph und in z_0 noch stetig, dann gilt

$$\int\limits_{\partial\triangle} f(z)dz = 0.$$

Beweis: Durch Fallunterscheidungen kann man sich davon überzeugen, dass man z_0 als Eckpunkt von $\triangle$ annehmen kann (etwa linke untere Ecke, $\triangle$ habe die Ecken z_0, b, c, entgegen dem Uhrzeigersinn.). Man bilde ein kleines Dreieck $\triangle_1 = z_0, z_1, z_2$, wobei die Strecke $\overline{z_1 z_2}$ parallel zur der Seite verläuft, die z_0 gegenüberliegt (Seite $\overline{bc}$). Man verbinde dann z_1 mit c und erhält insgesamt 3 Dreiecke $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3$. (Skizze anfertigen!). Nach dem vorigen Satz verschwinden die Integrale von f über $\partial\triangle_2, \partial\triangle_3$ und es bleibt:

$$\int\limits_{\partial\triangle} f(z)dz = \int\limits_{\partial\triangle_1} f(z)dz.$$

Da f auf $\triangle$ stetig, also betragsmäßig beschränkt($|f(z)| \leq M$) und z_1 beliebig (nahe an z_0) gewählt werden kann, folgt

$$\left|\int\limits_{\partial\triangle} f(z)dz\right| = \left|\int\limits_{\partial\triangle_1} f(z)dz\right| \leq M \cdot L(\partial\triangle_1)$$

Die rechte Seite kann beliebig klein gemacht werden. ■