

## Aufgaben (mit Ergebnissen) der Klausur Mathematik III vom 14. 2. 2022

- für Studiengang Verkehrsingenieurwesen zum Modul Integraltransformationen, Integralrechnung für Funktionen mehrerer Variabler und Stochastik
- Prüfungsdauer 120 Minuten
- Inhalte ohne Gewähr
- Ergebnisse werden ohne die in einer Klausur erforderlichen Lösungswege dargestellt

1. (a) Gegeben sei die Funktion  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f(t) := \begin{cases} e^t & \text{für } 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{für } t > 1. \end{cases}$$

Ermitteln Sie die Laplace-Transformierte  $F$  der Funktion  $f$ , indem Sie die Definition der Laplace-Transformierten nutzen. 2

(b) Die Funktion  $G$  mit

$$G(s) := \frac{5s^2 + 3s + 20}{s^3 + 4s}$$

sei die Laplace-Transformierte einer Funktion  $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Ermitteln Sie die Partialbruchzerlegung von  $G(s)$  und damit anschließend die Originalfunktion  $g$ . 3

(c) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y''(t) - 2y'(t) + y(t) &= e^t \quad \text{für } t > 0, \\ y(0) &= 0, \quad y'(0) = 0. \end{aligned}$$

Ermitteln Sie zunächst die Laplace-Transformierte  $Y = Y(s)$  der Lösung  $y = y(t)$  dieses Anfangswertproblems. Bestimmen Sie danach durch Rücktransformation die Lösung  $y = y(t)$ . 4

Ergebnisse: (a)  $F(s) = \frac{1}{1-s}(e^{1-s} - 1)$ , (b)  $G(s) = \frac{5}{s} + \frac{3}{s^2+4}$ ,  $g(t) = 5 + \frac{3}{2} \sin(2t)$ , (c)  $Y(s) = \frac{1}{(s-1)^3}$ ,  $y(t) = \frac{1}{2}t^2e^t$

2. Mit  $\mathcal{C}$  werde die Spur der Kurve bezeichnet, die durch die Parameterdarstellung

$$\mathbf{x}(t) := \begin{pmatrix} 3 \cos(t) \\ 3 \sin(t) \end{pmatrix}, \quad \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

gegeben ist. Dabei sei  $\mathbf{x}(\frac{\pi}{4})$  der Anfangs- und  $\mathbf{x}(\frac{\pi}{2})$  der Endpunkt der Kurve.

(a) Zeichnen Sie die Spur  $\mathcal{C}$  in ein kartesisches Koordinatensystem ein. 1

(b) Berechnen Sie die Masse der Kurve  $\mathcal{C}$ , wobei deren Massendichte  $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $\rho(x, y) := \frac{2}{3}xy$  festgelegt sei. 3

(c) Gegeben sei das Vektorfeld  $\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$\mathbf{v}(x, y) := \begin{pmatrix} -y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

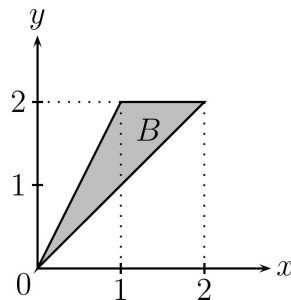
Berechnen Sie das Kurvenintegral  $\int_C \mathbf{v} \bullet d\mathbf{s}$ . 3

*Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass  $\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin(2t) \right) = \cos^2(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt.*

(d) Untersuchen Sie, ob das Kurvenintegral  $\int_C \mathbf{v} \bullet d\mathbf{s}$  aus Teil (c) wegunabhängig ist. 1

Ergebnisse: (a) Kreisbogen von  $\varphi = 45^\circ$  bis  $\varphi = 90^\circ$  mit Radius  $r = 3$  (auf eine Abbildung wird hier verzichtet, in der studentischen Lösung muss diese natürlich vorkommen), (b) Masse = 9, (c)  $\int_C \mathbf{v} \bullet d\mathbf{s} = \frac{9}{4} \left( \frac{3}{2}\pi - 1 \right)$ , (d) das Integral ist nicht wegunabhängig

3. Mit  $B \subset \mathbb{R}^2$  werde der grau eingefärbte Bereich in der nachstehenden Abbildung bezeichnet.



Des Weiteren seien der Körper  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3$  und das Vektorfeld  $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegeben durch

$$\mathcal{K} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in B, 0 \leq z \leq 2xy + 1\} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}(x, y, z) := \begin{pmatrix} x + y \\ x + y \\ 2z + 2x^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Beschreiben Sie den Bereich  $B$  als Normalbereich bzgl.  $y$ , das heißt, bestimmen Sie Zahlen  $c, d \in \mathbb{R}$  mit  $c < d$  sowie stetige Funktionen  $g, h : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  sodass 1

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, g(y) \leq x \leq h(y)\}.$$

(b) Berechnen Sie das Volumen  $V$  des Körpers  $\mathcal{K}$ . 3

(c) Es sei  $\mathcal{S}_D$  die "Deckfläche" des Körpers  $\mathcal{K}$ , das heißt

$$\mathcal{S}_D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in B, z = 2xy + 1\}.$$

Berechnen Sie den Normalenvektor  $\mathbf{n}(x, y)$  zur Fläche  $\mathcal{S}_D$ , sodass er mit dem Vektor  $\mathbf{e}_z := (0, 0, 1)^\top$  einen Winkel von mehr als  $90^\circ$  einschließt. 3

(d) Mit  $\mathcal{S}$  werde nun die **gesamte** Oberfläche des Körpers  $\mathcal{K}$  bezeichnet. Berechnen Sie unter Verwendung des Integralsatzes von Gauß das Oberflächenintegral  $\int_{\mathcal{S}} \mathbf{v} \bullet d\mathbf{O}$ . Der Normalenvektor von  $\mathcal{S}$  soll dabei nach außen gerichtet sein. 1

*Hinweis: Beachten Sie, dass Sie das Volumen  $V$  von  $\mathcal{K}$  aus Teil (b) verwenden können.*

Ergebnisse: (a)  $c = 0, d = 2, g(y) = \frac{y}{2}, h(y) = y$ , (b)  $V = 4$ , (c)  $\mathbf{n} = (2y, 2x, -1)^\top$ , (d)  $\int_{\mathcal{S}} \mathbf{v} \bullet d\mathbf{O} = 16$

4. Gegeben seien der Bereich

$$\mathcal{B} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$$

und der Körper

$$\mathcal{K} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathcal{B}, 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}.$$

(a) Zeichnen Sie den Bereich  $\mathcal{B}$  in ein kartesisches Koordinatensystem ein. 1

(b) Berechnen Sie die Masse des Körpers  $\mathcal{K}$ , wenn seine Massendichte durch die Funktion  $\rho : D_\rho \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\rho(x, y, z) := \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

beschrieben wird. Dabei gibt  $D_\rho$  den maximal möglichen Definitionsbereich von  $\rho$  an.

*Hinweis: Nutzen Sie Zylinderkoordinaten.* 4

(c) Ermitteln Sie die  $x$ -Koordinate des Schwerpunkts von  $\mathcal{K}$ , wenn die in (b) eingeführte Massendichte zu Grunde gelegt wird. 1

Ergebnisse: (a)  $\mathcal{B}$  ist die obere Hälfte eines Ringes mit Innenradius  $r = 1$  und Außenradius  $R = 2$  (auf eine Abbildung wird hier verzichtet, in der studentischen Lösung muss diese natürlich vorkommen), (b) Masse des Körpers  $= \frac{5}{3}\pi$ , (c)  $x_S = 0$

5. (a) Die Seiten eines (nicht fairen) tetraederförmigen Würfels seien mit den Zahlen 1, 2, 3, 4 beschriftet. Beim Würfeln auf einem Tisch bleibt bei jedem Wurf eine Seite des Würfels auf der Tischplatte liegen. Die Zufallsgröße  $X$  gibt die Zahl auf dieser Seite an und besitzt folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$x_k$	1	2	3	4
$p_k = P(X = x_k)$	$p$	$p^2$	$\frac{p}{3}$	$\frac{p}{6}$

(a1) Bestimmen Sie alle Werte, die  $p$  annehmen darf. 2

(a2) Geben Sie die Werte  $F_X(2)$  und  $F_X(3,5)$  der Verteilungsfunktion von  $X$  an. 1

(a3) Berechnen Sie den Erwartungswert von  $X$ . 1

(b) Ein Fußballspieler hat in seiner Karriere 60% aller Elfmeter mit dem rechten und die restlichen 40% mit dem linken Fuß geschossen. Ein Blick in die Statistik verrät, dass 80% aller Elfmeter, die er mit rechts geschossen hat, auch zum Torerfolg führten. Führte er hingegen den Elfmeter mit dem linken Fuß aus, so konnte er nur in 70% der Fälle einen Treffer erzielen.

Definieren Sie geeignete Ereignisse zur Modellierung dieses Sachverhalts und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem zufällig ausgewählten Elfmeter dieses Spielers 4

(b1) der Ball im Tor landete,

(b2) der Ball mit dem rechten Fuß geschossen wurde, wenn der Elfmeter zum Tor führte,

(b3) der Ball mit dem linken Fuß geschossen wurde, wenn der Elfmeter nicht zum Tor führte.

(c) Gegeben sei eine normalverteilte Zufallsgröße  $X \sim \mathcal{N}(7, 4)$ . Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit  $P(X > 7)$ . 1

Ergebnisse: (a1)  $p = \frac{1}{2}$ , (a2)  $F_X(2) = \frac{1}{2}$ ,  $F_X(3,5) = \frac{11}{12}$ , (a3)  $E(X) = \frac{11}{6}$ , (b) Ereignisse  $R$  (Elfmeter mit rechtem Fuß geschossen) und  $T$  (Elfmeter führt zum Torerfolg), (b1)  $P(T) = \frac{19}{25}$ , (b2)  $P(R | T) = \frac{12}{19}$ , (b3)  $P(\bar{R} | \bar{T}) = \frac{1}{2}$ , (c)  $P(X > 7) = 0,5$