Wahrscheinlichkeitstheorie mit Martingalen

Prof. Dr. Martin Keller-Ressel / Dr. Paolo Di Tella
Satz: Denis Hünniger

10. Februar 2016

Inhaltsverzeichnis

Einleitung und Wiederholung

0.1 Einleitung

- Vorgänge mit Zeitabhängigkeit und zufälliger Komponente:
  stochastische Prozesse
- wichtig in natur- und sozialwissenschaftlicher Modellierung, z.B.
  - Schwimmbewegung eines Einzellers
  - Bildung (oder Rückbildung) von Verbindungen in sozialen Netzwerken
  - Preisprozess einer Aktie

Frage: Abhängigkeitsstruktur (Ist morgen von heute abhängig?)
Bekannt: Folgen von iid ZV **aber** nicht allgemein genug
Deshalb: neue Abhängigkeitsstruktur sind **Martingale**:

- faires Spiel zwischen Personen A und B
- beste Vorhersage des zufälligen Wertes ist der momentane Wert
- neutraler stochastischer Prozess ohne systematischen Trend zum Auf- oder Abstieg

$\Rightarrow$ mathematisch reichhaltiges Objekt
Wichtigstes Beispiel in stetiger Zeit: **Brownsche Bewegung**

0.2 Bedingte Erwartung

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für eine ZV $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $p \in [1, \infty)$, definieren wir die L_p-**Norm**

$$\begin{aligned} \|X\|_p &:= \left(\mathbb{E}\left[|X|^p\right]\right)^{\frac{1}{p}} \in [0, \infty] \quad \text{und den Raum} \\ L^p(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}) &:= \left\{X : \Omega \to \mathbb{R} : \ X \text{ ist } \mathscr{A}\text{-mb und } \|X\|_p < \infty\right\}. \end{aligned}$$

Der Raum $L^p(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ist ein normierter Vektorraum, für $p \neq 2$ ein Banachraum und für $p = 2$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle X, Y \rangle_2 := \mathbb{E}[XY] = \int_\Omega XY \, d\mathbb{P}$.
$X, Y \in L^2$ heißen **orthogonal**, wenn gilt $\langle X, Y \rangle_2 = 0$.
Achtung: orthogonal $\neq$ unabhängig

Sei $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{A}$ eine Unter-σ-Algebra. Dann ist $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein abgeschlossener und isometrisch eingebetteter Unterraum von $L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Dabei heißt isometrisch eingebettet, dass $\|X\|_{L^2(\mathscr{F})} = \|X\|_{L^2(\mathscr{A})}$ gilt. Aus der Hilbertraumtheorie ist bekannt, dass jedes $X \in L^2(\mathscr{A})$ eine eindeutige Orthogonalprojektion auf dem Unterraum $L^2(\mathscr{F})$ hat. Diese heißt **bedingte Erwartung** (bzgl. $\mathscr{F}$), wir schreiben $\mathbb{E}^{\mathscr{F}}[X]$ oder $\mathbb{E}[X|\mathscr{F}]$. Als Orthogonalprojektion gilt

$$\|X - \mathbb{E}[X|\mathscr{F}]\|_2 = \inf_{Y \in L^2(\mathscr{F})} \|X - Y\|_2.$$

Interpretation: $\mathbb{E}[X|\mathscr{F}]$ ist die beste Schätzung für X mit Information aus $\mathscr{F}$.
Eigenschaften : $X, Y \in L^2(\mathscr{A})$

(a) $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{F}$: $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathscr{F}]|\mathscr{H}] = \mathbb{E}[X|\mathscr{H}]$ (Turmregel)

(b) $\mathbb{E}[aX + bY|\mathscr{F}] = a\,\mathbb{E}[X|\mathscr{F}] + b\,\mathbb{E}[Y|\mathscr{F}]$ (Linearität)

(c) $\mathbb{E}[XZ|\mathscr{F}] = Z \cdot \mathbb{E}[X|\mathscr{F}] \quad \forall Z \in L^\infty(\mathscr{F})$ (Pull-Out)

(d) $X \leq Y \Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathscr{F}] \leq \mathbb{E}[Y|\mathscr{F}]$ (Monotonie)

(e) $|\mathbb{E}[X|\mathscr{F}]| \leq \mathbb{E}[|X||\mathscr{F}]$ (Dreiecksungleichung)

Die bedingte Erwartung lässt sich eindeutig durch stetige Fortsetzung auf $L^1(\mathscr{A})$ erweitern. Die Eigenschaften (a)-(e) gelten weiterhin für $X, Y \in L^1(\mathscr{A}), Z \in L^1(\mathscr{F})$.
weitere Eigenschaft: Für $X \in L^1(\mathscr{A})$ und $Y \in L^1(\mathscr{F})$ sind äquivalent

(i) $Y = \mathbb{E}[X|\mathscr{F}]$ f.s.

(ii) $\int_A Y\,d\mathbb{P} = \int_A X\,d\mathbb{P} \quad \forall A \in \mathscr{F}$.

Für unabhängige ZV gilt außerdem: $X \perp\!\!\!\perp \mathscr{F} \Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathscr{F}] = \mathbb{E}[X]$.

Kapitel 1

Martingale

1.1 Beispiel. Spiel zwischen zwei Personen (Glücksspiel)
$(\xi_n)_n$ iid und in L^1 ... Gewinn im k-ten Zug
$S_n := \xi_1 + \ldots + \xi_n$ ... Gesamtgewinn nach dem n-ten Zug ($S_0 := 0$)
$\mathscr{F}_n := \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sigma(S_1, \ldots, S_n)$ ... Information aus dem Spiel bis zum n-ten Zug
$\Rightarrow \mathbb{E}[S_{n+k} | \mathscr{F}_n]$ ... Vorhersage vom zukünftigen Gesamtgewinn basierend auf bisherigen Spielverlauf
Berechnung:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_{n+k} | \mathscr{F}] &= \mathbb{E}[S_n + \xi_{n+1} + \ldots + \xi_{n+k} | \mathscr{F}] = \mathbb{E}[\underbrace{S_n}_{\mathscr{F}_n - mb} | \mathscr{F}] + \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}[\underbrace{\xi_{n+i}}_{\perp\!\!\!\perp \mathscr{F}} | \mathscr{F}] \\
&= S_n + \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}[\xi_{n+i}] = S_n + k \cdot \mathbb{E}[\xi_1] \\
&= \begin{cases} = S_n & \text{, falls } \mathbb{E}[\xi_1] = 0 \text{ ... faires Spiel} \\ \geq S_n & \text{, falls } \mathbb{E}[\xi_1] \geq 0 \text{ ... vorteilhaftes Spiel} \\ \leq S_n & \text{, falls } \mathbb{E}[\xi_1] \leq 0 \text{ ... nachteiliges Spiel} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Variation: variabler Einsatz erlaubt
$e_{n+1} = e_{n+1}(\xi_1, \ldots, \xi_n) \geq 0$ ... Einsatz im $(n+1)$-ten Zug (hängt von $\mathscr{F}_n$ ab)
neuer Gesamtgewinn: $\tilde{S}_n = e_1 \xi_1 + \ldots + e_n \xi_n$
Vorhersage:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\tilde{S}_{n+1} | \mathscr{F}_n] &= \mathbb{E}[\tilde{S}_n + e_{n+1}\xi_{n+1} | \mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[\tilde{S}_n | \mathscr{F}_n] + \mathbb{E}[e_{n+1}\xi_{n+1} | \mathscr{F}_n] \\
&\overset{pullout}{=} \tilde{S}_n + e_{n+1} \mathbb{E}[\xi_{n+1} | \mathscr{F}_n] \overset{ua}{=} \tilde{S}_n + e_{n+1} \cdot \mathbb{E}[\xi_1] \\
&= \begin{cases} = \tilde{S}_n & \text{, falls } \mathbb{E}[\xi_1] = 0 \\ \geq \tilde{S}_n & \text{, falls } \mathbb{E}[\xi_1] \geq 0 \\ \leq \tilde{S}_n & \text{, falls } \mathbb{E}[\xi_1] \leq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Variabler Einsatz ändert Grundcharakter des Spieles nicht.

1.2 Definition.

(a) Eine Indexmenge I heißt **aufsteigend geordnet**, wenn eine Ordnungsrelation $\leq$ auf I existiert, sodass

$$\forall t, s \in I \; \exists u \in I: \; s \leq u \; \wedge \; t \leq u.$$

Typischerweise: I totalgeordnet, z.B. $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{R}_{\geq 0}$ (I ... Zeitachse)

(b) Eine Familie $(\mathscr{F}_t)_{t\in I}$ von σ-Algebren heißt **Filtration**, wenn

$$s \leq t \Rightarrow \mathscr{F}_s \subseteq \mathscr{F}_t \quad \forall s, t \in I.$$

Interpretation: $\mathscr{F}_t$ ... zum Zeitpunkt t bekannte Information

Wir setzen außerdem $\mathscr{F}_\infty := \sigma(\mathscr{F}_t, t \in I)$.

(c) Eine Familie $(X_t)_{t\in I}$ von ZV heißt **adaptiert** an die Filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\in I}$, wenn X_t $\mathscr{F}_t$-mb ist für alle $t \in I$, d.h. $X_t^{-1}(\mathscr{B}(\mathbb{R})) \subseteq \mathscr{F}_t$.

Interpretation: X_t ist mit zum Zeitpunkt t verfügbare Information bekannt.

(d) Eine Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **vorhersehbar** (bzgl. einer Filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$), wenn e_n $\mathscr{F}_{n-1}$-mb ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

1.3 Definition (Martingal)**.** Sei $(X_t)_{t\in I}$ eine Familie von ZV und sei $(\mathscr{F}_t)_{t\in I}$ eine Filtration. Wenn gilt

(i) $(X_t)_t$ ist adaptiert bzgl. $(\mathscr{F}_t)_t$

(ii) $X_t \in L^1 \quad \forall t \in I$

(iii) $\mathbb{E}[X_t|\mathscr{F}_s] = X_s \quad \forall s, t \in I, s \leq t$,

dann heißt $(X_t)_t$ **Martingal**. Gilt statt (iii) die Eigenschaft

(iii)' $\mathbb{E}[X_t|\mathscr{F}_s] \geq X_s \quad \forall s, t \in I, s \leq t$,

dann heißt $(X_t)_t$ **Submartingal** bzw.

(iii)" $\mathbb{E}[X_t|\mathscr{F}_s] \leq X_s \quad \forall s, t \in I, s \leq t$,

dann heißt $(X_t)_t$ **Supermartingal**.

Beachte: unbedingter Erwartungswert $\mathbb{E}[X_t]$ fällt beim Supermartingal und steigt beim Submartingal.
Begründung: Sei $(X_t)_t$ Supermartingal, dann gilt

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_t|\mathscr{F}_s]] \leq \mathbb{E}[X_s] \quad \forall s \leq t$$

bzw. gilt für ein Submartingal $\mathbb{E}[X_t] \geq \mathbb{E}[X_s] \quad \forall s \leq t$.

1.4 Beispiel.

(a) $X_n := a_n,\ (a_n)_n$ aufsteigende Folge (deterministisch)
Dann ist $(X_n)_n$ ein Submartingal (bzgl. jeder Filtration).

(b) $S_n := \xi_1 + \ldots + \xi_n$ mit $(\xi)_{n\in\mathbb{N}}$ iid, $\xi_n \in L^1$ und $\mathscr{F}_n := \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Dann gilt

$$S_n = \begin{cases} \text{Martingal} & \text{, falls } \mathbb{E}[\xi_1] = 0 \\ \text{Submartingal} & \text{, falls } \mathbb{E}[\xi_1] \geq 0 \\ \text{Supermartingal} & \text{, falls } \mathbb{E}[\xi_1] \leq 0 \end{cases}.$$

(c) $S_n := \xi_1 + \ldots + \xi_n$ mit $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iid, $\mathbb{E}[\xi_1] = 0, \mathbb{V}[\xi_1] = \sigma^2$
Setzte $M_n := S_n^2 - n\sigma^2$ und $\mathscr{F}_n := \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Dann ist $(M_n)_n$ ein Martingal:

- adaptiert, da M_n eine mb Funktion von $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ist
- integrierbar, da $\mathbb{E}[S_n^2] = \|\xi_1 + \ldots + \xi_n\|_2^2 \ \leq\ (\|\xi_1\|_2 + \ldots + \|\xi_n\|_2)^2 < \infty$
- Martingaleigenschaft:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_n|\mathscr{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[S_n^2 - n\sigma^2|\mathscr{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[(S_{n-1}+\xi_n)^2 - \sigma^2 n|\mathscr{F}_{n-1}] \\ &= \mathbb{E}[S_{n-1}^2|\mathscr{F}_{n-1}] + 2\,\mathbb{E}[S_{n-1}\cdot\xi_n|\mathscr{F}_{n-1}] + \mathbb{E}[\xi_n^2|\mathscr{F}_{n-1}] - \sigma^2 n \\ &= S_{n-1}^2 + 2S_{n-1}\,\mathbb{E}[\xi_n] + \mathbb{E}[\xi_n^2] - \sigma^2 n = S_{n-1}^2 - (n-1)\sigma^2 \\ &= M_{n-1}. \end{aligned}$$

(d) Sei $X \in L^1(\mathscr{A})$, $(\mathscr{F}_t)_{t\in I}$ eine Filtration. Dann ist $M_t := \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_t]$ ein Martingal:

- adaptiert, klar
- integrierbar, da $\mathbb{E}[|M_t|] = \mathbb{E}[|\,\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_t|]] \leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[|X||\mathscr{F}_t]] = \mathbb{E}[|X|] < \infty$
- Martingaleigenschaft:
  $\mathbb{E}[M_t|\mathscr{F}_s] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_t]|\mathscr{F}_s]] = \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_s] = M_s.$

Bemerkung. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{n+k}|\mathscr{F}_n] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{n+k}|\mathscr{F}_{n+k-1}]|\mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[M_{n+k-1}|\mathscr{F}_n] \\ &= \underbrace{\ldots}_{k-mal} = M_n, \end{aligned}$$

d.h. es reicht $\mathbb{E}[M_n|\mathscr{F}_{n-1}] = M_{n-1}$ zu zeigen.

1.5 Eigenschaften. *Sei $(\mathscr{F}_t)_{t\in I}$ eine Filtration. Dann gilt*

(a) $(X_t)_t, (Y_t)_t$ *MG* $\Rightarrow$ $(aX_t + bY_t)_t$ *MG* $\forall a, b \in \mathbb{R}$

(b) $(X_t)_t, (Y_t)_t$ *Sub-(bzw. Super-)MG* $\Rightarrow$ $(aX_t+bY_t)_t$ *Sub-(bzw. Super-)MG* $\forall a, b \geq 0$

(c) $(X_t)_t, (Y_t)_t$ *Super-MG* $\Rightarrow$ $(X_t \wedge Y_t)_t$ *Super-MG*

(d) $(X_t)_t$ *MG,* ϕ *konvex,* $\phi(X_t) \in L^1$ $\Rightarrow$ $(\phi(X_t))_t$ *Sub-MG*

(e) $(X_t)_t$ *Sub-MG,* ϕ *konvex, monoton wachsend,* $\phi(X_t) \in L^1 \;\Rightarrow\; (\phi(X_t))_t$ *Sub-MG*

(f) $(X_t)_t$ *MG* $\;\Rightarrow\;$ $(X_t)_t$ *Sub- und Super-MG.*

Für (d) und (e) benötigen wir:

1.6 Lemma (bedingte Jensen-Ungleichung)**.** *Seien* $X \in L^1(\mathscr{A}), \mathscr{F} \subseteq \mathscr{A}$ *eine Sub-*σ*-Algebra und* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *konvex. Wenn* $\phi(X) \in L^1(\mathscr{A})$*, dann gilt*

$$\phi(\mathbb{E}[X\,|\mathscr{F}]) \le \mathbb{E}[\phi(X)\,|\mathscr{F}].$$

Beweis. Da ϕ konvex ist, ist ϕ das Supremum aller linearen Trägerfunktionen, d.h. $\phi(x) = \sup\{ax + b : \; a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } ax + b \le \phi(x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}\}$, daraus folgt

$$\phi(\mathbb{E}[X\,|\mathscr{F}]) = \sup_{a,b\in\mathbb{R}} \left(a\,\mathbb{E}[X\,|\mathscr{F}] + b\right) = \sup_{a,b\in\mathbb{R}} \mathbb{E}[aX + b\,|\mathscr{F}] \le \mathbb{E}[\phi(X)\,|\mathscr{F}]$$

□

zu 1.5.d:

$$\phi(X_s) = \phi\left(\mathbb{E}[X_t\,|\mathscr{F}_s]\right) \overset{Jensen}{\le} \mathbb{E}[\phi(X_t)\,|\mathscr{F}_s] \;\; \forall s, t \in I, s \le t$$

zu 1.5.e:

$$\phi(X_s) \le \phi\left(\mathbb{E}[X_t\,|\mathscr{F}_s]\right) \le \mathbb{E}[\phi(X_t)\,|\mathscr{F}_s] \;\; \forall s, t \in I, s \le t$$

Interpretation von σ-Algebren als Information:

- beobachtete ZV $X_1, \dots, X_n$ (z.B. erste n Züge eines Glücksspiels)
- abgeleitete Informationen: alle ZV der Form $Z_n = f(X_1, \dots, X_n)$ mit f mb (z.B. Dauer der längsten Gewinnserie), schreibe $\mathscr{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n)$

  $\Rightarrow$ Doob-Dynkin-Lemma: Z_n $\mathscr{F}_n$-mb $\Leftrightarrow$ $Z_n = f(X_1, \dots, X_n)$

  D.h. $\mathscr{F}_n$ repräsentiert alle aus $X_1, \dots, X_n$ ableitbaren Informationen und mit $Z_{n+1} = f(X_1, \dots, X_{n+1})$ erhält man $\mathscr{F}_n \subseteq \mathscr{F}_{n+1}$ (Informationsfluss).

1.7 Satz (Doob-Zerlegung)**.** *Sei* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^1$ *ein* $(\mathscr{F}_n)_n$*-adaptierter stochastischer Prozess. Dann gilt*

$$X_n = X_0 + M_n + A_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

mit $(M_n)_n \subseteq L^1, M_0 = 0$ *MG und* $(A_n)_n \subseteq L^1, A_0 = 0$ *vorhersehbar.*
Die Zerlegung (1.1) ist eindeutig bis auf Ununterscheidbarkeit, d.h. für eine weitere Zerlegung $X_n = X_0 + M_n' + A_n'$ *gilt* $\mathbb{P}[M_n = M_n', A_n = A_n' \;\forall n \in \mathbb{N}] = 1$*. Außerdem gilt:*

$$(X_n)_n \text{ Sub-MG} \;\Leftrightarrow\; (A_n)_n \text{ f.s. wachsend}$$
$$(X_n)_n \text{ Super-MG} \;\Leftrightarrow\; (A_n)_n \text{ f.s. fallend.}$$

Bemerkung. Für $I = \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt die Zerlegung (1.1) **Doob-Meyer-Zerlegung** und ist wesentlich schwieriger zu zeigen.

Beweis. Angenommen (1.1) gilt, dann folgt

$$\mathbb{E}[X_n - X_{n-1} | \mathscr{F}_{n-1}] = \underbrace{\mathbb{E}[M_n - M_{n-1} | \mathscr{F}_{n-1}]}_{=0} + \mathbb{E}[\underbrace{A_n - A_{n-1}}_{\mathscr{F}_{n-1}-mb} | \mathscr{F}_{n-1}] = A_n - A_{n-1} \tag{1.2}$$

$$\Rightarrow \; A_n = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[X_j - X_{j-1} | \mathscr{F}_{j-1}] \tag{1.3}$$

Definiere nun $(A_n)_n$ wie in (1.3). Dann ist offenbar $(A_n)_n$ vorhersehbar und in L^1. Aus (1.1) folgt $M_n := X_n - X_0 - A_n$. Dann ist $(M_n)_n$ adaptiert (klar), $(M_n)_n \subseteq L^1$ (da $(X_n)_n, (A_n)_n \subseteq L^1$) und es gilt die MG-Eigenschaft

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_n - M_{n-1} | \mathscr{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[X_n - X_{n-1} | \mathscr{F}_{n-1}] - \mathbb{E}[A_n - A_{n-1} | \mathscr{F}_{n-1}] \\ &\overset{(1.3)}{=} \mathbb{E}[X_n - X_{n-1} | \mathscr{F}_{n-1}] - \mathbb{E}[X_n - X_{n-1} | \mathscr{F}_{n-1}] = 0. \end{aligned}$$

Eindeutigkeit: Laut Vorüberlegung ist (1.3) auch notwendig, d.h. $A_n = A'_n \; \forall n \in \mathbb{N}$ und aus (1.1) folgt auch $M_n = M'_n \; \forall n \in \mathbb{N}$, also folgt

$$\mathbb{P}[A_n = A'_n, \, M_n = M'_n \; \forall n \in \mathbb{N}] = \mathbb{P}[\bigcap_{n=0}^{\infty} \{A_n = A'_n\} \cap \{M_n = M'_n\}] = 1.$$

Die Aussage zu Sub- und Super-MG folgt direkt aus (1.2). □

1.8 Lemma. *Sei $(M_n)_n$ ein MG bzgl. $(\mathscr{F}_n)_n$ mit $\mathbb{E}[M_n^2] < \infty \; \forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(M_n^2)_n$ ein Sub-MG und es gibt einen eindeutigen vorhersehbaren, wachsenden Prozess $(\langle M \rangle_n)_n$, den sogenannten* **Kompensator** *von $(M_n)_n$, sodass $(M_n^2 - \langle M \rangle_n)_n$ ein MG ist. Außerdem gilt*

$$\mathbb{E}[(M_n - M_{n-1})^2 | \mathscr{F}_{n-1}] = \langle M \rangle_n - \langle M \rangle_{n-1} \; \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Bermerkung.

- $\langle M \rangle$ enthält Informationen über die Kovarianzstruktur von M.
- Die Doob-Zerlegung von $(M_n^2)_n$ ist

$$M_n^2 = \underbrace{\left(M_n^2 - \langle M \rangle_n - M_0^2\right)}_{\text{Martingal}} + \underbrace{\langle M \rangle_n}_{\text{vorhersehbar}} + \underbrace{M_0^2}_{\text{Anfangswert}}.$$

Beispiel.
$(X_n)_n$ iid, $\mathbb{E}[X_n] = 0, \mathbb{V}[X_n] = \sigma^2$
$\Rightarrow S_n := X_1 + \ldots + X_n$ ist MG bzgl. $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.
$\Rightarrow$ Kompensator von $(S_n)_n$: $\mathbb{E}[(S_n - S_{n-1})^2 | \mathscr{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[X_n^2 | \mathscr{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[X_n^2] = \sigma^2$
$\overset{(1.4)}{\Rightarrow} \langle S \rangle_n = n\sigma^2 \overset{(1.8)}{\Rightarrow} S_n^2 - n\sigma^2$ ist MG

Beweis. Als konvexe Transformation von M ist $(M_n^2)_n$ ein Sub-MG. Die Martingaleigenschaft von $M_n^2 - \langle M \rangle_n$ und die Existenz und Eindeutigkeit von $\langle M \rangle$ folgt aus der Doob-Zerlegung von $(M_n^2)_n$. Es bleibt zu zeigen, dass (1.4) gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(M_n - M_{n-1})^2 \,|\mathscr{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[M_n^2 - 2M_n M_{n-1} + M_{n-1}^2 \,|\mathscr{F}_{n-1}] \\ &= \mathbb{E}[M_n^2 \,|\mathscr{F}_{n-1}] - \underbrace{2M_{n-1}\,\mathbb{E}[M_n \,|\mathscr{F}_{n-1}]}_{=2M_{n-1}^2} + \mathbb{E}[M_{n-1}^2 \,|\mathscr{F}_{n-1}] \\ &= \mathbb{E}[M_n^2 - M_{n-1}^2 \,|\mathscr{F}_{n-1}]\end{aligned}$$

Da wir wissen, dass $(M_n^2 - \langle M \rangle_n)_n$ ein MG ist, folgt

$$\mathbb{E}[M_n^2 - M_{n-1}^2 \,|\mathscr{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[\underbrace{\langle M \rangle_n - \langle M \rangle_{n-1}}_{vorhersehbar} \,|\mathscr{F}_{n-1}] = \langle M \rangle_n - \langle M \rangle_{n-1}.$$

□

1.9 Definition. Sei $(M_n)_n$ ein $(\mathscr{F}_n)_n$-(Sub-)MG und $(\vartheta_n)_n$ ein vorhersehbarer Prozess. Dann heißt

$$(\vartheta \bullet M)_n := \sum_{j=1}^{n} \vartheta_j (M_j - M_{j-1}), \quad (\vartheta \bullet M)_0 := 0$$

Martingaltransformation von M bzgl. ϑ.

Bemerkung.

- Analogie zum Einführungsbeispiel:

  $M_n - M_{n-1}$ ... Gewinn aus Runde n, ϑ_n ... Einsatz in Runde n

  $\Rightarrow$ $(\vartheta \bullet M)_n$ ... Gesamtgewinn mit Einsatz $(\vartheta_n)_n$

- Analogie zur Riemann-Summe:

  ϑ ... Integrand, M ... Integrator im Riemann-Stieltjes-Integral

1.10 Satz. *Sei $(M_n)_n \subseteq L^1$ adaptiert bzgl. $(\mathscr{F}_n)_n$ und $(\vartheta_n)_n$ vorhersehbar. Dann gilt*

(a) $|\vartheta_n| \leq K \ \forall n \in \mathbb{N}$, $(M_n)_n$ *MG* $\Rightarrow$ $(\vartheta \bullet M)_n$ *MG*

(b) $0 \leq \vartheta_n \leq K \ \forall n \in \mathbb{N}$, $(M_n)_n$ *Sub-MG* $\Rightarrow$ $(\vartheta \bullet M)_n$ *Sub-MG*

(c) $(\vartheta_n)_n \subseteq L^2$, $(M_n)_n \subseteq L^2$ *MG* $\Rightarrow$ $(\vartheta \bullet M)_n$ *MG*

(d) $(\vartheta_n)_n \subseteq L^2_+$, $(M_n)_n \subseteq L^2$ *Sub-MG* $\Rightarrow$ $(\vartheta \bullet M)_n$ *Sub-MG.*

Beweis.

- adaptiert: klar
- integrierbar: Voraussetzungen stets so gewählt, dass $(\vartheta \bullet M)_n \subseteq L^1$ folgt (verwende Hölder: $\|XY\|_1 \leq \|X\|_p \|Y\|_q$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ p \in [1, \infty]$)
- (Sub-)MG-Eigenschaft:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\vartheta \bullet M)_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}] &= (\vartheta \bullet M)_{n-1} + \mathbb{E}[\vartheta_n (M_n - M_{n-1}) \,|\, \mathscr{F}_{n-1}] \\ &= (\vartheta \bullet M)_{n-1} + \vartheta_n \cdot\ \mathbb{E}[M_n - M_{n-1} \,|\, \mathscr{F}_{n-1}] = (\vartheta \bullet M)_{n-1}.\end{aligned}$$

□

1.11 Eigenschaften. *Sei $(\vartheta_n)_n$ vorhersehbar mit $|\vartheta_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Wir setzen $\mathcal{M}^2 := \{(X_n)_n :\ (X_n)_n$ MG, $(X_n)_n \subseteq L^2\}$. Dann gilt*

(a) $M \mapsto (\vartheta \bullet M)$ bildet $\mathcal{M}^2$ in $\mathcal{M}^2$ ab

(b) $M \mapsto (\vartheta \bullet M)$ und $\vartheta \mapsto (\vartheta \bullet M)$ sind linear

(c) $\langle \vartheta \bullet M \rangle_n = \vartheta^2 \bullet \langle M \rangle_n$

(d) $\mathbb{E}[(\vartheta \bullet M)_n^2] = \mathbb{E}[\vartheta^2 \bullet \langle M \rangle_n]$.

Beweis.

(a) Aus Satz 1.10 folgt: $(\vartheta \bullet M)_n$ ist MG und weiter gilt

$$\mathbb{E}[(\vartheta_j M_k)^2] \leq K^2 \cdot \mathbb{E}[M_k^2] < \infty \ \Rightarrow\ E[(\vartheta \bullet M)_n^2] < \infty$$

(b) trivial

(c) Wegen der Eindeutigkeit der Doob-Zerlegung reicht es zu zeigen, dass

(i) $\vartheta^2 \bullet \langle M \rangle$ ist vorhersehbar

(ii) $(\vartheta \bullet M)_n^2 - (\vartheta^2 \bullet \langle M \rangle)_n$ ist MG:

$$(\vartheta^2 \bullet \langle M \rangle)_n = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\vartheta_j^2}_{\mathscr{F}_{j-1}-mb} \underbrace{(\langle M_j \rangle - \langle M_{j-1} \rangle)}_{\mathscr{F}_{j-1}-mb} \text{ ist } \mathscr{F}_{n-1}\text{ -mb.}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\vartheta \bullet M)_n^2 - (\vartheta \bullet M)_{n-1}^2 \,|\, \mathscr{F}_{n-1}] &\overset{1.8}{=} \mathbb{E}[((\vartheta \bullet M)_n - (\vartheta \bullet M)_{n-1})^2 \,|\, \mathscr{F}_{n-1}] \\ &= \mathbb{E}[(\vartheta_n \cdot (M_n - M_{n-1}))^2 \,|\, \mathscr{F}_{n-1}] \\ &= \mathbb{E}[(M_n - M_{n-1})^2 \,|\, \mathscr{F}_{n-1}] \cdot \vartheta_n^2 \\ &\overset{1.8}{=} \vartheta_n^2\ (\langle M \rangle_n - \langle M \rangle_{n-1}) \\ &= (\vartheta^2 \bullet \langle M \rangle)_n - (\vartheta^2 \bullet \langle M \rangle)_{n-1}\end{aligned}$$

$\Rightarrow (\vartheta \bullet M)_n^2 - \vartheta^2 \bullet \langle M \rangle_n$ ist MG.

(d) $\mathbb{E}[(\vartheta \bullet M)_n^2 - \vartheta^2 \bullet \langle M \rangle_n] = \mathbb{E}[(\vartheta \bullet M)_0^2 - \vartheta^2 \bullet \langle M \rangle_0] = 0$

□

Kapitel 2

Stoppzeiten und Stoppen von stochastischen Prozessen

2.1 Definition (Stoppzeit)**.** Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum mit Filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Eine **Stoppzeit** ist ein zufälliger Zeitpunkt $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ mit der Eigenschaft

$$\{\tau \leq n\} \in \mathscr{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Interpretation: Zu jedem Zeitpunkt n wissen wir, ob τ bereits in der Vergangenheit liegt oder nicht.

typisches Beispiel: Eintrittszeiten $\tau(\omega) \coloneqq \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : \ X_n(\omega) \geq k\}$

2.2 Eigenschaften.

(a) τ *Stoppzeit* $\Leftrightarrow$ $\{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

(b) $\tau \equiv m$ *(deterministisch)* $\Rightarrow$ τ *Stoppzeit (bzgl. jeder Filtration)*

(c) σ, τ *Stoppzeiten* $\Rightarrow$ $\sigma \wedge \tau,\ \sigma \vee \tau,\ \sigma + \tau$ *Stoppzeiten*

(d) $(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *Stoppzeiten* $\Rightarrow$ $\inf_{i\in\mathbb{N}} \tau_i,\ \sup_{i\in\mathbb{N}} \tau_i$ *Stoppzeiten*

2.3 Definition. Sei $(X_n)_n$ ein $(\mathscr{F}_n)_n$–adaptierter SP und τ eine SZ. Wir setzen

$$\begin{aligned} X_\tau(\omega) &\coloneqq X_{\tau(\omega)}(\omega) \quad \text{auf } \{\tau < \infty\} \\ X_n^\tau(\omega) &\coloneqq X_{\tau(\omega)\wedge n}(\omega) = X_n(\omega) \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > n\}}(\omega) + X_\tau(\omega) \cdot \mathbb{1}_{\{\tau \leq n\}}(\omega) \end{aligned}$$

Bemerkung. $(X_n^\tau)_n$ ist ebenfalls $(\mathscr{F}_n)_n$–adaptiert.

2.4 Satz. *Sei $(X_n)_n$ ein $(\mathscr{F}_n)_n$–(Sub-)MG und τ eine SZ. Dann ist $(X_n^\tau)_n$ ebenfalls ein $(\mathscr{F}_n)_n$–(Sub-)MG. Insbesondere gilt*

$$\mathbb{E}[X_{n\wedge\tau}] = \mathbb{E}[X_0] \qquad \textit{(bzw. } \mathbb{E}[X_{n\wedge\tau}] \geq \mathbb{E}[X_0]\textit{)}.$$

Beweis. Verwende die Darstellung $X_n^\tau = \sum_{j=0}^{n-1} X_j \cdot \mathbb{1}_{\{\tau=j\}} + X_n \cdot \mathbb{1}_{\{\tau=n\}}$, daraus folgt die Adaptiertheit von $(X_n^\tau)_n$. Weiter gilt

- integrierbar: $\mathbb{E}[|X_n^\tau|] \le \mathbb{E}[|X_0|] + \mathbb{E}[|X_1|] + \ldots + \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$
- Martingaleigenschaft: Betrachte $\{\tau \ge n\} \in \mathscr{F}_{n-1}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_n^\tau|\mathscr{F}_{n-1}] &= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}[\underbrace{X_j \cdot \mathbb{1}_{\{\tau=j\}}}_{\mathscr{F}_j-mb}|\mathscr{F}_{n-1}] + \mathbb{E}[X_n \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{\{\tau\ge n\}}}_{\mathscr{F}_{n-1}-mb}|\mathscr{F}_{n-1}] \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} X_j \cdot \mathbb{1}_{\{\tau=j\}} + X_{n-1} \cdot \mathbb{1}_{\{\tau\ge n\}} \\
&= \sum_{j=0}^{n-2} X_j \cdot \mathbb{1}_{\{\tau=j\}} + X_{n-1} \cdot \mathbb{1}_{\{\tau\ge n-1\}} = X_{n-1}^\tau
\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Für ein MG $(X_n)_n$ gilt also $\mathbb{E}[X_{\tau\wedge n}] = \mathbb{E}[X_0]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Im Allgemeinen gilt aber **nicht** $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$.

2.5 Satz (Doob's Optional Stopping)**.** *Sei $(X_n)_n$ ein $(\mathscr{F}_n)_n$–(Sub-)MG und τ eine SZ mit $\mathbb{P}[\tau < \infty] = 1$. Dann gilt*

$$X_\tau \in L^1 \quad \textit{und} \quad \mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0] \quad (\textit{bzw. } \mathbb{E}[X_\tau] \ge \mathbb{E}[X_0])$$

in jedem der folgenden Fälle:

(a) τ beschränkt, d.h. $\exists K \ge 0 :$ $\mathbb{P}[\tau \ge K] = 1$

(b) X^τ beschränkt, d.h. $\exists K \ge 0 :$ $\mathbb{P}[\sup_n |X_n^\tau| \le K] = 1$

(c) $\mathbb{E}[\tau] < \infty$ und $\exists K \ge 0 :$ $\mathbb{P}[\sup_n |X_n^\tau - X_{n-1}^\tau| \le K] = 1$.

Beweis. Verwende $\mathbb{E}[X_{\tau\wedge n}] = \mathbb{E}[X_0]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $(*)$.

(a) Wähle $n \ge K$ in $(*)$ $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$

(b) Es gilt $\lim_{n\to\infty} X_{\tau\wedge n} = X_\tau$ f.s. Nach Voraussetzung ist $|X_{\tau\wedge n}| \le K$ und nach dem Satz von der dominierten Konvergenz gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_{\tau\wedge n}] = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} X_{\tau\wedge n}] = \mathbb{E}[X_\tau].$$

Gemeinsam mit $(*)$ folgt $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$.

(c) Es gilt

$$|X_n^\tau - X_0| \le \sum_{j=1}^{n\wedge\tau} |X_j - X_{j-1}| \le \tau \cdot K \in L^1$$

wegen $\mathbb{E}[\tau] < \infty$. Mit dominierter Konvergenz folgt damit

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\mathbb{E}[X_n^\tau - X_0]}_{=0 \textit{ wegen } (*)} = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} X_n^\tau - X_0] = \mathbb{E}[X^\tau - X_0],$$

d.h. $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$.

□

2.6 Beispiel (Simple Random Walk).
$(\xi_n)_n$ iid ZV, $\mathbb{P}[\xi_1 = 1] = \mathbb{P}[\xi_1 = -1] = \frac{1}{2}$, $X_n := \sum_{k=0}^n \xi_k$, $X_0 := 0$, $A, B \in \mathbb{N}$
Fragen:

1. Wahrscheinlichkeit, dass X den Wert A vor $-B$ erreicht
2. durchschnittliche Wartezeit, bis entweder A oder $-B$ erreicht wird

Definiere $\tau_A := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = A\}$, $\tau_B := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = -B\}$, $\tau := \tau_A \wedge \tau_B$. Wir zeigen zunächst $\mathbb{P}[\tau < \infty] = 1$:
Setze $E_k := \{\omega \in \Omega : X_n(\omega)$ ist wachsend für $(A+B)k \le n \le (A+B)(k+1)\}$.
Dann gilt für alle $\omega \in E_k$:

$$\tau(\omega) \le (A+B)(k+1) \quad \text{bzw.} \quad \tau(\omega) > (A+B)(k+1) \Rightarrow \omega \notin E_k$$

Sei $p = \mathbb{P}[E_0] \in (0,1)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\tau > n(A+B)] &\le \mathbb{P}[\bigcap_{k=0}^{n-1} E_k^c] = (1-p)^n \\ \Rightarrow \mathbb{P}[\tau = \infty] &\le \mathbb{P}[\tau \ge (A+B)n] \ \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$\overset{n\to\infty}{\Rightarrow} \mathbb{P}[\tau = \infty] = 0$, $\mathbb{P}[\tau < \infty] = 1 \Rightarrow \tau < \infty$ f.s.
Weiter gilt

$$\mathbb{E}[\tau] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[\tau \ge k] \le (A+B) \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k < \infty$$

Wir wissen, dass $(X_n)_n$ ein MG ist, d.h. $X^\tau = (X_{\tau\wedge n})_n$ ist auch ein MG und es gilt $X_{\tau\wedge n} \in [-B, A]$. Aus Satz 2.5 folgt $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0] = 0$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_\tau] &= \mathbb{E}[X_{\tau_A} \mathbb{1}_{\{\tau_A \le \tau_B\}} + X_{\tau_B} \mathbb{1}_{\{\tau_A > \tau_B\}}] = A\mathbb{P}[\tau_A \le \tau_B] - B\mathbb{P}[\tau_B < \tau_A] \\ &= Ap - B(1-p) = p(A+B) - B \end{aligned}$$

$\Rightarrow p = \frac{B}{A+B}$
Als Nächstes berechnen wir den Kompensator von X:

$$\underbrace{\mathbb{E}[(X_n - X_{n-1})^2 | \mathscr{F}_{n-1}]}_{=\mathbb{E}[\xi_n^2 | \mathscr{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[\xi_n^2] = 1} = \langle X \rangle_n - \langle X \rangle_{n-1}$$

$\Rightarrow \langle X \rangle_n = n \Rightarrow M_n := X_n^2 - n \Rightarrow |M_{\tau\wedge n}| \le \max\{A^2, B^2\} + \tau$
Wegen $\mathbb{E}[\tau] < \infty$ folgt aus dem Satz von der dominierten Konvergenz

$$\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} M_{\tau\wedge n}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[M_{\tau\wedge n}] = 0.$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_\tau] &= \mathbb{E}[X_\tau^2] - \mathbb{E}[\tau] = A^2\mathbb{P}[\tau_A \le \tau_B] + B^2\mathbb{P}[\tau_A > \tau_B] - \mathbb{E}[\tau] \\ &= \frac{A^2B + B^2A}{A+B} - \mathbb{E}[\tau] = AB - \mathbb{E}[\tau] \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{E}[\tau] = AB$

2.7 Lemma. *Sei $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_n)_n$ eine Filtration und τ eine $\mathscr{F}$−SZ (d.h. SZ bezüglich der Filtration $(\mathscr{F}_n)_n$). Wir definieren*

$$\mathscr{F}_\tau := \{A \in \mathscr{F}_\infty : \ A \cap \{\tau \le j\} \in \mathscr{F}_j, \ j \in \mathbb{N}_0\}.$$

Dann ist $\mathscr{F}_\tau$ eine Sub-σ-Algebra von $\mathscr{A}$ und heißt die zu τ **assoziierte σ-Algebra**.

2.8 Bemerkung. Seien S und T SZ. Dann gilt

(a) $S \le T$ f.s. $\ \Rightarrow\ \mathscr{F}_S \subseteq \mathscr{F}_T$

(b) $\{S < T\} \in \mathscr{F}_T \cap \mathscr{F}_S$

(c) $\mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T = \mathscr{F}_{S \wedge T}$.

Beweis.

(a) $A \in \mathscr{F}_S, \ j \in \mathbb{N}_0$

$$\Rightarrow \quad A \cap \{T \le j\} = (A \cap \{T \le j\}) \cap \{S \le T\} = \underbrace{A \cap \{S \le j\}}_{\in \mathscr{F}_j} \cap \underbrace{\{T \le j\}}_{\mathscr{F}_j} \in \mathscr{F}_j$$

$$\Rightarrow \quad A \in \mathscr{F}_T$$

(b) Übung

(c) "$\supseteq$" $\quad S \wedge T \overset{(a)}{\Rightarrow} \mathscr{F}_{S\wedge T} \subset \mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T$

"$\subseteq$" $\quad F \in \mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T, \ j \in \mathbb{N}_0$

$$\Rightarrow \ F \cap \{T \wedge S \le j\} = F \cap (\{S \le j\} \cup \{T \le j\}) = \underbrace{(F \cap \{S \le j\})}_{\in \mathscr{F}_j} \cup \underbrace{(F \cap \{T \le j\})}_{\in \mathscr{F}_j} \in \mathscr{F}_j$$

□

2.9 Satz (Doob's Optional Sampling)**.** *Sei $(X_n)_n \subseteq L^1$ ein $\mathscr{F}$−adaptierter SP. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) X *ist ein Sub-MG*

(ii) $\mathbb{E}[X_S] \le \mathbb{E}[X_T] \quad \forall S \le T$ *SZ f.s. beschränkt*

(iii) $\int_F X_S \, d\mathbb{P} \le \int_F X_T \, d\mathbb{P} \quad \forall F \in \mathscr{F}_S, \ S \le T$ *SZ f.s. beschränkt*

(iv) $X_S \le \mathbb{E}[X_T \,|\mathscr{F}_S] \quad \forall F \in \mathscr{F}_S, \ S \le T$ *SZ f.s. beschränkt.*

Beweis. Zunächst gilt $X_T \in L^1$, denn es gilt

$$\begin{aligned} T \text{ beschränkt} \quad &\Rightarrow \quad \exists N > 0 : \ \mathbb{P}[T > \bar{N}] = 0 \quad \forall \bar{N} \geq N \\ &\Rightarrow \quad \mathbb{E}[|X_T|] = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E}[|X_j| \mathbb{1}_{\{T=j\}}] = \sum_{j=0}^{N} \mathbb{E}[|X_j| \mathbb{1}_{\{T=j\}}] \leq \sum_{j=0}^{n} \underbrace{\mathbb{E}[|X_j|]}_{<\infty} \end{aligned}$$

$(i) \Rightarrow (ii)$: Aus der Doob-Zerlegung folgt

$$X_T - X_S = M_T + A_T - M_S - A_S \quad (*).$$

Da $T \geq S$ und A f.s. wachsend ist, folgt

$$A_T \geq A_S \ \text{ bzw. } \ A_T - A_S \geq 0 \qquad (**).$$

Mit $(*)$ und $(**)$ erhalten wir $X_T - X_S \geq M_T - M_S$.

$\Rightarrow \mathbb{E}[X_T - X_S] \geq \mathbb{E}[M_T] - \mathbb{E}[M_S] \overset{2.6}{=} \mathbb{E}[M_0] - \mathbb{E}[M_0] = 0$

$(ii) \Rightarrow (iii)$: $F \in \mathscr{F}_S \overset{2.8.b}{\subseteq} \mathscr{F}_t$
Setze $\rho := \mathbb{1}_F S + \mathbb{1}_{F^c} T$, dann gilt

$$\{\rho \leq j\} = \{\rho \leq j\} \cap (F \cup F^c) = (\underbrace{F \cap \{S \leq j\}}_{\in \mathscr{F}_j}) \cup (\underbrace{F^c \cap \{T \leq j\}}_{\in \mathscr{F}_j}) \in \mathscr{F}_j.$$

Weiter gilt $\rho \leq T$ $(= T\mathbb{1}_F + T\mathbb{1}_{F^c})$, d.h. $\mathbb{E}[X_\rho] = \mathbb{E}[X_S \mathbb{1}_F + X_T \mathbb{1}_{F^c}] \leq \mathbb{E}[X_T]$ und

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_S \mathbb{1}_F] \ &= \ \mathbb{E}[X_\rho] - \mathbb{E}[\mathbb{1}_{F^c} X_T] \leq \mathbb{E}[X_T] - \mathbb{E}[\mathbb{1}_{F^c} X_T] \\ &= \ \mathbb{E}[X_T \mathbb{1}_F] \qquad\qquad (\text{wobei } \mathbb{1}_F = 1 - \mathbb{1}_{F^c}) \end{aligned}$$

$(iii) \Leftrightarrow (iv)$: Eigenschaften bedingter Erwartung

$(ii) \Rightarrow (i)$: Setze $S := n-1$, $T := n$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$: Es gilt

$$\int_F X_S \, d\mathbb{P} \leq \int_F X_T \, d\mathbb{P} \ \Leftrightarrow \ X_S \leq \mathbb{E}[X_T | \mathscr{F}_S] \ \Rightarrow \ \mathbb{E}[X_S] \leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_T | \mathscr{F}_S]] = \mathbb{E}[X_T].$$

□

Kapitel 3

Martingalkonvergenz

Vorüberlegung: Betrachte eine Folge $(a_n)_n$ in $\mathbb{R}$. Es gilt:

$\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert nicht in $\bar{\mathbb{R}}$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\quad \liminf_{n\to\infty} a_n < \limsup_{n\to\infty} an \\
&\Leftrightarrow\quad \exists p, q \in \mathbb{Q}:\ \liminf_{n\to\infty} a_n < p < q < \limsup_{n\to\infty} a_n \\
&\Leftrightarrow\quad \exists p, q \in \mathbb{Q}:\ (a_n)_n \text{ überquert den Streifen } [p,q] \times \mathbb{N} \text{ unendlich oft} \\
&\Leftrightarrow\quad \exists p, q \in \mathbb{Q}:\ U[p,q] = \infty,
\end{aligned}$$

wobei $U[p,q]$ die Anzahl der aufsteigenden Überquerungen des Streifens $[p,q] \times \mathbb{N}$ ist, die sogenannten **Upcrossings**.

3.1 Definition. Sei $(X_n)_n$ ein $(\mathscr{F}_n)_n$–adaptierter SP, $p, q \in \mathbb{Q},\ p < q$ und $N \in \mathbb{N}$. Setze

$$\begin{aligned}
U_n[p,q] := \max\{k \in \mathbb{N}_0 \quad : \quad & \exists \text{ SZ } \sigma_i, \tau_i:\ 0 \le \sigma_1 < \tau_1 < \ldots < \sigma_k < \tau_k \le N \text{ und} \\
& X_{\sigma_i} < p < q < X_{\tau_i}\ \forall i \in \{1, \ldots, k\}\},
\end{aligned}$$

die sogenannte **Anzahl der Upcrossings** von $[p,q] \times [0,N]$.
Setze außerdem $U[p,q] := \sup_N U_N[p,q]$.

3.2 Lemma (Doob's Upcrossing)**.** *Sei $(X_n)_n$ ein Sub-MG, $p, q \in \mathbb{Q},\ p < q$. Dann gilt*

$$(q - p) \cdot \mathbb{E}[U_N[p,q]] \ \le\ \mathbb{E}[(X_N - p)^+].$$

Bemerkung. Wir setzen

$$X^+(\omega) := \max\{X(\omega), 0\},\ X^-(\omega) := -\min\{X(\omega), 0\}.$$

Daraus folgt $X = X^+ - X^-$ und $|X| = X^+ + X^-$.

Beweis. Sei $K(\omega) := U_N[p,q](\omega) \leq N$. Dann definieren wir rekursiv eine SZ durch $\tau_0 := 0, \sigma_j := \inf\{n \geq \tau_{j-1} : \ X_n < p\} \wedge N$ und $\tau_j := \inf\{n \geq \sigma_j : \ X_n > q\} \wedge N$ für $j \in \{1, \ldots, N\}$. Es gilt $\tau_{k+1} = \sigma_{k+2} = \tau_{k+2} = \ldots = \sigma_N = \tau_N = N$. Weiter gilt

$$(q-p)U_N[p,q] \leq (X_{\tau_1} - X_{\sigma_1}) + \ldots + (X_{\tau_k} - X_{\sigma_k}) \quad \text{und} \quad \min\{X_N - p, 0\} \leq X_N - X_{\sigma_{k+1}},$$

denn entweder gilt $\sigma_{k+1} < N$, dann ist $X_N - X_{\sigma_{k+1}} \geq X_N - p$ oder es gilt $\sigma_{k+1} = N$, dann ist $X_N - X_{\sigma_{k+1}} = 0$. Addieren der beiden Ungleichungen ergibt

$$(q-p)U_N[p,q] + \min\{X_n - p, 0\} \ \leq \ (X_{\tau_1} - p) + \sum_{j=2}^{k+1}(X_{\tau_j} - X_{\sigma_j}) \ = \ (X_{\tau_1} - p) + \sum_{j=2}^{n}(X_{\tau_j} - X_{\sigma_j}).$$

Bilden des Erwartungswertes und Umordnen der Summe liefert

$$\begin{aligned}(q-p)\,\mathbb{E}[U_N[p,q]] \ + \ \mathbb{E}[\min\{X_n - p, 0\}] \ &\leq \ -p + \sum_{j=1}^{N-1} \underbrace{\mathbb{E}[X_{\tau_j}] - \mathbb{E}[X_{\sigma_{j+1}}]}_{\leq\ 0} \ + \ \mathbb{E}[X_N] \\ &\leq \ \mathbb{E}[X_n - p].\end{aligned}$$

Beachte: $(X_n - p) - \min\{X_n - p, 0\} = (X_n - p)^+$

$\Rightarrow \ (q-p) \cdot \mathbb{E}[U_N[p,q]] \ \leq \ \mathbb{E}[(X_N - p)^+]$ □

3.3 Satz. *Sei $(X_n)_n$ ein $(\mathscr{F}_n)_n$–Sub-MG mit $\sup_n \mathbb{E}[X_n^+] < \infty$. Dann existiert eine ZV $X_\infty \in L^1$ mit*

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty \quad f.s.$$

Beweis. Nach unserer Vorüberlegung reicht es zu zeigen, dass gilt

$$\mathbb{P}[U[p,q] = \infty] = 0 \ \forall p, q \in \mathbb{Q}\, p < q,$$

denn in diesem Fall gilt

$$\mathbb{P}[\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \text{ existiert nicht in } \bar{\mathbb{R}}] \ \leq \ \mathbb{P}[\bigcup_{\substack{p,q\in\mathbb{Q} \\ p,q}} \{U[p,q] = \infty\}] = 0.$$

Wegen Lemma 3.2 gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[U[p,q]] \ &\leq \ \sup_N \mathbb{E}[U_N[p,q]] \leq \sup_N \frac{\mathbb{E}[(X_N - p)^+]}{q-p} \\ &\leq \ \frac{1}{q-p}(\sup_N \mathbb{E}[X_N^+] + |p|) < \infty \quad \forall p, q \in \mathbb{Q}, \ q < p\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{P}[U[p,q] = \infty] = 0 \ \forall p, q \in \mathbb{Q}, \ p < q$.

Also existiert $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ f.s. in $\bar{\mathbb{R}}$ (noch nicht in $\mathbb{R}$). Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\liminf_{n\to\infty} |X_n|] \ &\overset{Fatou}{\leq} \ \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|] \ \leq \ \liminf_{n\to\infty}(2\,\mathbb{E}[X_n^+] - \mathbb{E}[X_n]) \\ &\overset{Sub-MG}{\leq} \ \underbrace{2\sup_n \mathbb{E}[X_n^+]}_{<\ \infty} - \mathbb{E}[X_0] \ < \ \infty\end{aligned}$$

$\Rightarrow \ \mathbb{E}[|X_\infty|] < \infty$, d.h. $X_\infty \in (-\infty, \infty)$ f.s. □

Bemerkung. Aus Satz 3.3 folgt im Allgemeinen **nicht** L^1-Konvergenz.
Betrachte dazu den Simple Random Walk $(X_n)_n$ und die SZ $\tau_1 := \{n \in \mathbb{N} : X_n = 1\}$. Dann ist $Y_n := X_{n \wedge \tau_1}$ ein nach oben beschränktes MG, genauer $\mathbb{E}[Y_n^+] \leq 1$. Mit Satz 3.3 gilt, dass $Y_\infty = \lim_{n \to \infty} Y_n$ existiert mit $Y_\infty = X_{\tau_1} = 1$. Andererseits gilt $\mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}[Y_0] = 0$ und $Y_n \leq Y_\infty$ f.s., d.h. wir erhalten

$$\lim_{n \to \infty} \|Y_\infty - Y_n\|_1 = \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}[|Y_\infty - Y_n|] = 1,$$

also keine L^1-Konvergenz.

Kapitel 4

Gleichgradig integrierbare Martingale

Kapitel 3 zeigte uns:
Für ein MG $(X_n)_n$ folgt aus L^1-Beschränktheit (d.h. $\sup_n \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$) f.s. Konvergenz.

Frage: Wann gilt auch $X_n \xrightarrow{L^1} X$? (bzw. Darstellung $X_n = \mathbb{E}[X_\infty | \mathscr{F}_n]$)

L^2-Martingale

4.1 Definition. Ein MG $(X_n)_n$ heißt

(i) L^2-**Martingal**, wenn $\mathbb{E}[X_n^2] < \infty$

(ii) L^2-**beschränktes Martingal**, wenn $\sup_n \mathbb{E}[X_n^2] < \infty$.

4.2 Lemma. *Sei $(X_n)_n$ ein L^2-MG bzgl. $(\mathscr{F}_n)_n$. Dann gilt*

(a) $(X_m - X_l) \perp L^2(\mathscr{F}_l) \ \forall 0 \leq l \leq m$

(b) $\langle X_m - X_l, X_k - X_j \rangle_2 = 0 \ \forall 0 \leq j \leq k \leq l \leq m.$

Beweis. (a) Wähle $Z \in L^2(\mathscr{F}_l)$. Dann gilt

$$\langle X_m - X_l, Z\rangle_2 = \mathbb{E}[(X_m - X_l)\, Z] = \mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{E}[X_m - X_l | \mathscr{F}_l]}_{=\,0} \cdot Z] = 0$$

(b) Mit $Z := X_k - X_j \in L^2(\mathscr{F}_l)$ folgt aus (a) die Behauptung.

□

4.3 Korollar. *Sei $(X_n)_n$ ein L^2-MG. Dann gilt*

$$\mathbb{E}[X_n^2] = \mathbb{E}[X_0^2] + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2].$$

Beweis. Teleskopsumme: $X_n = X_0 + \sum_{k=1}^n (X_k - X_{k-1})$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X_n^2] \;=\; \mathbb{E}[(X_0 + \sum_{k=1}^{n}(X_k - X_{k-1}))^2] \overset{4.2}{=} \mathbb{E}[X_0^2] + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2]$$

□

4.4 Satz (Konvergenz von L^2-Martingalen)**.** *Sei $(X_n)_n$ ein L^2-MG. Dann gilt*

$$(X_n)_n \text{ ist } L^2\text{-beschränkt} \;\Leftrightarrow\; \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2] < \infty.$$

Ist das der Fall, dann gibt es $X_\infty \in L^2(\mathscr{F}_\infty)$ mit $X_n \longrightarrow X_\infty$ f.s. und in L^2. Außerdem gilt

$$X_n = \mathbb{E}[X_\infty \,|\, \mathscr{F}_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. $(X_n)_n$ ist L^2-beschränkt, denn aus Korollar 4.3 folgt

$$\sup_n \mathbb{E}[X_n^2] \;=\; \mathbb{E}[X_0^2] + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2] \;<\; \infty.$$

Damit ist $(X_n)_n$ auch L^1-beschränkt und aus Satz 3.3 folgt

$$\exists X_\infty \in L^1(\mathscr{F}_\infty) \text{ mit } \lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty \text{ f.s.}$$

Außerdem gilt für $j \le k$

$$\mathbb{E}[(X_k - X_j)^2] \overset{4.2}{\underset{4.3}{=}} \sum_{i=j+1}^{k} \mathbb{E}[(X_i - X_{i-1})^2] \overset{j,k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

also ist $(X_n)_n$ eine Cauchyfolge in L^2 und, da L^2 vollständig ist, existiert ein $Y \in L^2$, sodass $X_n \xrightarrow{L^2} Y$. Aus dem Teilfolgenkriterium folgt $Y = X_\infty$, d.h. $X_\infty \in L^2(\mathscr{F}_\infty)$. Schließlich folgt aus $X_n \xrightarrow{L^2} X_\infty$ auch $X_n \xrightarrow{L^1} X_\infty$ und weiter gilt für alle $j \le n$

$$\begin{aligned} \|\mathbb{E}[X_n \,|\, \mathscr{F}_j] - \mathbb{E}[X_\infty \,|\, \mathscr{F}_j]\|_{L^1} &= \mathbb{E}[|\mathbb{E}[X_n \,|\, \mathscr{F}_j] - \mathbb{E}[X_\infty \,|\, \mathscr{F}_j]|] \\ &\le \mathbb{E}[\mathbb{E}[|X_n - X_\infty| \,|\, \mathscr{F}_j]] = \mathbb{E}[|X_n - X_\infty|] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Also gilt $X_j = \mathbb{E}[X_n \,|\, \mathscr{F}_j] \xrightarrow{L^1} \mathbb{E}[X_\infty \,|\, \mathscr{F}_j] \;\Rightarrow\; X_j = \mathbb{E}[X_\infty \,|\, \mathscr{F}_j]$ □

Bemerkung. Ein MG $(X_n)_n$ der Form $X_n = \mathbb{E}[X_\infty \,|\, \mathscr{F}_n]$ heißt **abschließbar**.

Gleichgradige Integrierbarkeit

Motivation: Hinreichende und notwendige Bedingung für Abschließbarkeit von Martingalen

4.5 Definition. Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von ZV. Setze

$$\rho(R) := \sup_{i\in I} \mathbb{E}[|X_i|\mathbb{1}_{\{|X_i|\geq R\}}].$$

Die Familie heißt **gleichgradig integrierbar** (ggi), wenn $\lim_{R\to\infty}\rho(R) = 0$ gilt.

Interpretation: Masse im Verteilungsende verschwindet gleichmäßig für $R \to \infty$.

4.6 Lemma. *Es sei $X \in L^1(\mathscr{A})$. Dann gilt*

(a) $\{X\}$ ist ggi

(b) $\{\mathbb{E}[X|\mathscr{F}] : \mathscr{F}$ ist Unter-σ-Algebra von $\mathscr{A}\}$ ist ggi.

Beweis.

(a) $|X|\mathbb{1}_{\{|X|\geq R\}} \leq |X|$

$\Rightarrow \lim_{R\to\infty}\rho(R) = \lim_{R\to\infty}\mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_{\{|X|\geq R\}}] = \mathbb{E}[\lim_{R\to\infty}|X|\mathbb{1}_{\{|X|\geq R\}}] = 0$

(b) Sei $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{A}$ eine Unter-σ-Algebra. Setze $Y = \mathbb{E}[X|\mathscr{F}]$. Dann gilt

$$|Y| = |\mathbb{E}[X||\mathscr{F}]| \leq \mathbb{E}[|X||\mathscr{F}],$$

d.h. insbesondere gilt $\mathbb{E}[|Y|] \leq \mathbb{E}[|X|]$ und daraus folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|Y|\mathbb{1}_{\{|Y|\geq R\}}] &\leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[|X||\mathscr{F}]\underbrace{\mathbb{1}_{\{|Y|\geq R\}}}_{\mathscr{F}-mb}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_{\{|Y|\geq R\}}|\mathscr{F}]] \\ &= \mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_{\{|Y|\geq R\}}].\end{aligned}$$

Sei $K \geq 0$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_{\{|Y|\geq R\}}] = \underbrace{\mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_{\{|Y|\geq R\}\cap\{|X|>K\}}]}_{\leq \mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_{\{|X|>K\}}]} + \underbrace{\mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_{\{|Y|\geq R\}\cap\{|X|\leq K\}}]}_{\leq K\cdot\mathbb{P}[|Y|\geq R] \leq \frac{K}{R}\mathbb{E}[|Y|] \leq \frac{K}{R}\mathbb{E}[|X|]}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[|Y|\mathbb{1}_{\{|Y|\geq R\}}] \leq \mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_{\{|X|>K\}}] + \frac{K}{R}\mathbb{E}[|X|] \quad \forall K \geq 0 \\ \Rightarrow\ &\lim_{R\to\infty}\rho(R) \leq \lim_{R\to\infty}\left(\mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_{\{|X|>K\}}] + \frac{K}{R}\mathbb{E}[|X|]\right) = \mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_{\{|X|>K\}}] \xrightarrow{k\to\infty} 0 \\ \Rightarrow\ &\lim_{R\to\infty}\rho(R) = 0.\end{aligned}$$

□

4.7 Satz (Hinreichende Bedingung für gleichgradige Integrierbrarkeit). *Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von L^1-ZV. Dann gilt*

(a) *Wenn für ein $p > 1$ gilt $\sup_{i\in I} \mathbb{E}[|X_i|^p] < \infty$, dann ist $(X_i)_{i\in I}$ ggi.*

(b) *Wenn $Y \in L^1$ existiert mit $|X_i| \le |Y|$ für alle $i \in I$, dann ist $(X_i)_{i\in I}$ ggi.*

Beweis.

(a) Es gilt

$$\mathbb{E}[|X_i|\mathbb{1}_{\{|X_i|\ge R\}}] \;\le\; \mathbb{E}[|X_i|\frac{|X_i|^{p-1}}{R^{p-1}}\mathbb{1}_{\{|X_i|\ge R\}}] \;\le\; R^{1-p}\,\mathbb{E}[|X_i|^p]$$

und daraus folgt

$$\rho(R) \;\le\; \underbrace{R^{1-p}}_{\xrightarrow{R\to\infty} 0}\;\underbrace{\sup[|X_i|^p]}_{<\;\infty} \longrightarrow 0$$

(b) Es gilt

$$\mathbb{E}[|X_i|\mathbb{1}_{\{|X_i|\ge R\}}] \;\le\; \mathbb{E}[|Y|\mathbb{1}_{\{|X_i|\ge R\}}] \;\le\; \mathbb{E}[|Y|\mathbb{1}_{\{|Y|\ge R\}}],$$

denn $\{|X_i| \ge R\} \subseteq \{|Y_i| \ge R\}$, und daraus folgt

$$\rho(R) \le \mathbb{E}[|Y|\mathbb{1}_{\{|Y|\ge R\}}] \longrightarrow 0.$$

□

4.8 Satz. *Sei $(X_n)_n$ ggi und $X_n \longrightarrow X$ f.s. Dann gilt*

$$\mathbb{E}[|X_n - X|] \longrightarrow 0 \quad \textit{bzw.} \quad X_n \xrightarrow{L^1} X.$$

Beweis. Es gilt

$$\mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_{\{|X|\ge R\}}] \overset{Fatou}{\le} \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_{\{|X_n|\ge R\}}] \;\le\; \rho(R),$$

d.h. $X \in L^1$ und $\mathbb{E}[|X|] \le R + \rho(R)$ für alle $R \ge 0$. Des weiteren gilt

$$|X_n - X| \;\le\; \underbrace{|X_n - X|\mathbb{1}_{\{|X_n|\le R\}}}_{\le\; R+|X|} + \underbrace{|X_n|\mathbb{1}_{\{|X_n|\ge R\}}}_{\mathbb{E}[\cdot]\;\le\;\rho(R)} + \underbrace{|X|\mathbb{1}_{\{|X_n|\ge R\}}}_{\mathbb{E}[\cdot]\;\le\;\liminf_{n\to\infty}\mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_{\{|X_n|\ge R\}}]\;\le\;\rho(R)}$$

und damit $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|] \le 2\rho(R)$ für alle $R \ge 0$. Grenzübergang liefert

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|] = 0.$$

□

4.9 Satz. *Sei $(X_n)_n$ ein $(\mathscr{F}_n)_n$–MG. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\exists X_\infty \in L^1 : \ \mathbb{E}[|X_n - X_\infty|] \longrightarrow 0$

(ii) $\exists X_\infty \in L^1 : \ X_n = \mathbb{E}[X_\infty | \mathscr{F}_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $(X_n)_n$ *ist ggi.*

Beweis.
$(i) \Rightarrow (ii)$: Es gilt

$$\mathbb{E}[|\,\mathbb{E}[X_n|\mathscr{F}_k] - \mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_k]\,|] \overset{Jensen}{\leq} \mathbb{E}[\mathbb{E}[|X_n - X_\infty|\,|\mathscr{F}_k] = \mathbb{E}[|X_n - X_\infty|] \longrightarrow 0.$$

Außerdem gilt

$$X_k = \mathbb{E}[X_n|\mathscr{F}_k] \xrightarrow{L^1} \mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_k],$$

d.h. $X_k = \mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_k] \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Folgt aus Lemma 4.6.b.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Aus ggi folgt $\sup_n \mathbb{E}[|X_n|] \leq R + \rho(R)$ für alle $R \geq 0$. Nach Satz 3.3 gilt

$$\exists X_\infty \in L^1 : \ X_n \longrightarrow X_\infty \text{ f.s.}$$

Mit Satz 4.8 folgt $\mathbb{E}[|X_n - X_\infty|] \longrightarrow 0$. □

Kapitel 5

Martingalungleichungen

1. Doobs Maximalungleichung (Verallgemeinerung der Markovungleichung)
2. Doobs L^p-Ungleichung
3. Azumas Ungleichung (Beispiel einer Konzentrationsungleichung)

5.1 Satz (Doobs Maximalungleichung)**.** *Sei* $(M_n)_n$ *ein Sub-MG. Dann gilt*

$$\mathbb{P}[\max_{j\le n} M_j \ge r] \;\le\; \frac{1}{r}\,\mathbb{E}[M_n\,\mathbb{1}_{\{\max_{j\le n} M_j \ge r\}}] \;\le\; \frac{1}{r}\,\mathbb{E}[M_n^+] \quad \forall r>0,\; n\in\mathbb{N}.$$

Beweis. Sei $(M_n)_n$ ein Sub-MG. Dann gilt

$$\begin{aligned} & M_k \le \mathbb{E}[M_n\,|\mathscr{F}_k] && \forall k\le n \\ \Rightarrow\quad & \mathbb{1}_A\,M_k \le \mathbb{E}[\mathbb{1}_A\,M_n\,|\mathscr{F}_k] && \forall A\in\mathscr{F}_k,\; k\le n \\ \Rightarrow\quad & \mathbb{E}[\mathbb{1}_A\,M_k] \le \mathbb{E}[\mathbb{1}_A\,M_n] && \forall A\in\mathscr{F}_k,\; k\le n \end{aligned}$$

Definiere die SZ $\tau := \min\{n:\; M_n \ge r\}$. Dann gilt $\{\tau\le n\}\subseteq\{M_\tau\ge r\}$ und weiter $\{\tau\le n\} = \{\sup_{j\le n} M_j \ge r\}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} & r\,\mathbb{1}_{\{\tau\le n\}} \le M_\tau\,\mathbb{1}_{\{\tau\le n\}} = \sum_{k=0}^{n} M_k\,\mathbb{1}_{\{\tau=k\}} \\ \Rightarrow\quad & \mathbb{E}[r\,\mathbb{1}_{\{\tau\le n\}}] = r\mathbb{P}[\tau\le n] \le \sum_{k=0}^{n}\mathbb{E}[M_k\,\mathbb{1}_{\{\tau=k\}}] \le \sum_{k=0}^{n}\mathbb{E}[M_n\,\mathbb{1}_{\{\tau=k\}}] = \mathbb{E}[M_n\,\mathbb{1}_{\{\tau\le n\}}] \\ \Rightarrow\quad & r\mathbb{P}[\max_{j\le n} M_j\ge r] \le \mathbb{E}[M_n\,\mathbb{1}_{\{\max_{j\le n} M_j\ge r\}}] \le \mathbb{E}[M_n^+] \\ \Rightarrow\quad & \mathbb{P}[\max_{j\le n} M_j\ge r] \le \frac{1}{r}\,\mathbb{E}[M_n\,\mathbb{1}_{\{\max_{j\le n} M_j\ge r\}}] \le \frac{1}{r}\,\mathbb{E}[M_n^+] \end{aligned}$$

□

5.2 Satz (Doobs L^p-Ungleichung). *Sei $(M_n)_n$ ein positives Sub-MG (bzw. ein MG) und $p > 1$. Dann gilt*

$$\|M_n^*\|_p \;\le\; \frac{p}{p-1}\|M_n\|_p \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

wobei $M_n^* := \max_{j \le n} |M_j|$.

5.3 Lemma. *Seien $X, Y \ge 0$ ZV mit $\mathbb{E}[Y^p] < \infty$ für ein $p > 1$ und es gelte*

$$\lambda \mathbb{P}[X \ge \lambda] \;\le\; \mathbb{E}[Y \cdot \mathbb{1}_{\{X \ge \lambda\}}] \quad \forall \lambda \ge 0. \tag{5.1}$$

Dann gilt

$$\|X\|_p \;\le\; \frac{p}{p-1}\|Y\|_p.$$

Beweis. Wir setzen $X_n := X \wedge n$ und zeigen die Aussage zunächst für X_n. Wenn (5.1) für X gilt, so gilt dies auch für X_n. Außerdem gilt für alle $z \ge 0$

$$z^p = p\int_0^z x^{p-1}\,dx = p\int_0^\infty x^{p-1}\cdot \mathbb{1}_{\{x \le z\}}\,dx \quad \forall p \in (0,\infty).$$

Setze X_n für z ein und bilde den Erwartungswert:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_n^p] &= p\int_0^\infty x^{p-1}\mathbb{P}[X_n \ge x]\,dx \overset{(5.1)}{\le} p\int_0^\infty x^{p-2}\,\mathbb{E}[Y\,\mathbb{1}_{\{X_n \ge x\}}]\,dx \\
&= p\,\mathbb{E}[Y\cdot \int_0^\infty x^{p-2}\,\mathbb{1}_{\{X_n \ge x\}}\,dx] = \frac{p}{p-1}\,\mathbb{E}[Y\cdot X_n^{p-1}] \\
\Rightarrow \mathbb{E}[X_n^p] &\le \frac{p}{p-1}\,\mathbb{E}[Y\cdot X_n^{p-1}] \le \frac{p}{p-1}\,\mathbb{E}[Y^p]^{\frac{1}{p}}\cdot\, E[X_n^p]^{\frac{p-1}{p}} \\
\Rightarrow \|X_n\|_p &\le \frac{p}{p-1}\,\|Y\|_p
\end{aligned}$$

Schließlich gilt mit dem Lemma von Fatou

$$\|X\|_p \;\le\; \liminf_{n\to\infty}\|X_n\|_p \;\le\; \frac{p}{p-1}\|Y\|_p.$$

□

Beweis von Satz 5.2. Sei $(M_n)_n$ ein MG oder positives Sub-MG. Dann ist $(|M_n|)_n$ ein Sub-MG und daraus folgt mit Doobs Maximalungleichung

$$\mathbb{P}[M_n^* \ge r] \;\le\; \frac{1}{r}\,\mathbb{E}[|M_n|\,\mathbb{1}_{\{M_n^* \ge r\}}]$$

Wende nun Lemma 5.3 an mit $X = M_n^*$, $Y = |M_n|$ und $\lambda = r$, daraus folgt

$$\|M_n^*\|_p \;\le\; \frac{p}{p-1}\,\|M_n\|_p.$$

□

5.4 Satz (Azumas Ungleichung). *Sei $(X_n)_n$ ein MG mit $|X_n - X_{n-1}| \le c_n$, wobei $c_n > 0$ deterministisch ist. Dann gilt*

$$\mathbb{P}[|X_n - \mathbb{E}[X_n]| \ge \lambda] \;\le\; 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sum_{i=1}^n c_i^2}\right) \qquad \forall \lambda \ge 0.$$

Beweis. Betrachte die Funktion $f_\alpha(x) := e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist f_α konvex, also liegt der Graph von f_α für $|x| \le c$ unter der Verbindungslinie von $(-c, f(-c))$ und $(c, f(c))$. Die Gleichung der Verbindungslinie ist $y = \frac{f(-c)-f(c)}{2c}x + \frac{f(c)+f(-c)}{2}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
& e^{\alpha x} \le \frac{x}{2c}(e^{-\alpha c} - e^{\alpha c}) + \frac{1}{2}(e^{\alpha c} + e^{\alpha c}) \quad \forall |x| \le c \\
\Rightarrow \quad & \mathbb{E}[e^{\alpha(X_n - X_{n-1})} | \mathscr{F}_{n-1}] \le \frac{1}{2c_n} \underbrace{\mathbb{E}[X_n - X_{n-1} | \mathscr{F}_{n-1}]}_{=\,0}(e^{-\alpha c_n} - e^{\alpha c_n}) + \frac{1}{2}(e^{\alpha c_n} + e^{-\alpha c_n}) \\
= \quad & \cosh(\alpha c_n) \;\le\; \exp\left(\frac{\alpha^2 c_n^2}{2}\right).
\end{aligned}$$

n-malige Iteration liefert

$$\mathbb{E}[e^{\alpha(X_n - X_0)}] \;\le\; \exp(\frac{\alpha^2}{2} \underbrace{\sum_{i=0}^n c_n^2}_{=:\,D_n}).$$

Weiter gilt

$$\mathbb{P}[X_n - X_0 \ge \lambda] = \mathbb{P}[e^{\alpha(X_n - X_0)}] \le \exp(-\alpha\lambda + \frac{\alpha^2}{2} D_n) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Optimiere nun die rechte Seite über $\alpha \in \mathbb{R}$, wir erhalten $\alpha_* = \frac{\lambda}{D_n}$. Durch Einsetzen von α_* erhalten wir schließlich

$$\mathbb{P}[X_n - X_0 \ge \lambda] \;\le\; \exp(-\frac{\lambda^2}{2D_n})$$

und eine analoge Rechnung für $-(X_n - X_0)$ liefert die Behauptung. □

Kapitel 6

Rückwärtsmartingale und ihre Anwendung

6.1 Definition. Ein MG mit Indexmenge $-\mathbb{N}$ heißt **Rückwärtsmartingal** (RWM), d.h. $(X_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ mit

(i) X_{-n} ist $\mathscr{F}_{-n}$–mb für alle $n \in \mathbb{N}$

(ii) $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(iii) $\mathbb{E}[X_{-k}|\mathscr{F}_{-n}] = X_{-n}$ für alle $k \leq n$.

Oft definiert man $R_n := X_{-n}$ und $\mathscr{G}_n := \mathscr{F}_{-n}$. Dann ist $(\mathscr{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Filtration, sondern ein absteigende Folge von σ-Algebren, d.h. $\mathscr{G}_k \supseteq \mathscr{G}_n$ für $k \leq n$. Somit folgt $\mathbb{E}[R_k|\mathscr{G}_n] = R_n$ für alle $k \leq n$.

6.2 Satz (Konvergenz von Rückwärtsmartingalen). *Sei $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein RWM bzgl. $(\mathscr{G}_n)_n$ und sei $\mathscr{G}_\infty := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{G}_n$ die terminale σ-Algebra. Dann gilt*

$$\exists R_\infty \in L^1(\mathscr{G}_\infty): \lim_{n\to\infty} R_n = R_\infty \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|R_n - R_\infty|] = 0.$$

Bemerkung. Im Gegensatz zur Vorwärtskonvergenz gibt es hier **keine** Voraussetzungen.

Beweis. Betrachte das MG $M_{-n} := R_n$ bzgl. der Filtration $\mathscr{F}_{-n} := \mathscr{G}_n$. Sei $U_N[a,b]$ die Anzahl der Upcrossings von $[a,b]$ durch $(M_{-n})_{n\in\{0,\dots,N\}}$. Aus Doobs Uprcossing-Lemma folgt

$$\mathbb{E}[U_N[a,b]] \leq \frac{1}{b-a}\mathbb{E}[(M_0 - a)^+].$$

Mit monotoner Konvergenz folgt für alle

$$\mathbb{E}[U_\infty[a,b]] = \mathbb{E}[\lim_{N\to\infty} U_N[a,b]] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[U_N[a,b]] \leq \frac{1}{b-a}\mathbb{E}[(M_0 - a)^+] < \infty.$$

Wie im Beweis zur Vorwärtskonvergenz schlussfolgern wir, dass $\lim_{n\to\infty} M_{-n} =: M_\infty$ in $\bar{\mathbb{R}}$ f.s. existiert. Außerdem gilt $M_{-n} = \mathbb{E}[M_0|\mathscr{F}_{-n}]$ und aus dem Lemma 4.6.b folgt, dass $(M_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ ggi ist. Daraus folgt schließlich

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|M_{-n} - M_{-\infty}|] = 0 \text{ und } M_{-\infty} \in L^1(\mathscr{A}).$$

□

Beispiel. Seien $(X_n)_n$ iid und in $L^1(\mathscr{A})$. Wir setzen $R_n := \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$ und $\mathscr{G}_n := \sigma(R_n, R_{n+1}, \ldots)$. Dann ist $(R_n)_n$ ein RWM bzgl. $(\mathscr{G}_n)_n$.

Schritt 1: $\mathscr{G}_n = \sigma(R_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots)$
Wir stellen X_n dar als $X_n = n \cdot R_n - (n-1) \cdot R_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. jede mb Funktion von $(R_n, R_{n+1}, \ldots)$ lässt sich als mb Funktion von $(R_n, X_{n+1}, \ldots)$ darstellen und umgekehrt.

Schritt 2: $\mathbb{E}[X_j\,|\mathscr{G}_n] = \mathbb{E}[X_j\,|R_n] \quad \forall j \le n$
Zunächst bemerken wir, dass für $(X_n)_n$ iid gilt $\sigma(R_n) \perp\!\!\!\perp \sigma(X_{n+1}, \ldots)$. Weiter gilt, dass $\mathbb{E}[X_j\,|\mathscr{G}_n]$ jene $\mathscr{G}_n$–mb ZV Y ist mit

$$\mathbb{E}[X_j\,\mathbb{1}_G \cdot \mathbb{1}_H] \;=\; \mathbb{E}[Y\,\mathbb{1}_G \cdot \mathbb{1}_H] \quad \forall G \in \sigma(R_n),\; H \in \sigma(X_{n+1}, \ldots).$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_j\,\mathbb{1}_G\,\mathbb{1}_H] &\overset{ua}{=} \mathbb{E}[X_j\,\mathbb{1}_G] \cdot \mathbb{E}[\mathbb{1}_H] \;=\; \mathbb{E}[X_j\,\mathbb{1}_G] \cdot \mathbb{P}[H] \\
&\overset{tower}{=} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_j\,\mathbb{1}_G\,|\sigma(R_n)]] \cdot \mathbb{P}[H] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_j\,|\sigma(R_n)]\,\mathbb{1}_G] \cdot \mathbb{E}[\mathbb{1}_H] \\
&\overset{ua}{=} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_j\,|\sigma(R_n)]\,\mathbb{1}_G\,\mathbb{1}_H]
\end{aligned}$$

$\Rightarrow Y \;=\; \mathbb{E}[X_j\,|R_n]$

Schritt 3: $\mathbb{E}[X_1\,\mathbb{1}_B(R_n)] = \mathbb{E}[X_j\,\mathbb{1}_B(R_n)] \quad \forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$
Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_1\,\mathbb{1}_B(R_n)] &= \mathbb{E}[X_1\,\mathbb{1}_B(\frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n))] \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} x_1\,\mathbb{1}_B(\frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n))\,dG_n(x_1, \ldots, x_n) \\
&\overset{ua}{=} \int_{\mathbb{R}^n} x_j\,\mathbb{1}_B(\frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n))\,dG_n(x_1, \ldots, x_n) \\
&= \mathbb{E}[X_j\,\mathbb{1}_B(R_n)],
\end{aligned}$$

wobei $G_n(x_1, \ldots, x_n) = F_n(x_1) \cdot \ldots \cdot F_n(x_n)$.

Schritt 4: RWM-Eigenschaft
Es gilt

$$\begin{aligned}
R_n &= \mathbb{E}[R_n\,|R_n] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[X_j\,|R_n] = \mathbb{E}[X_1\,|R_n] \\
&\overset{(3)}{=} \mathbb{E}[X_1\,|R_n] = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}[X_j\,|R_n] \overset{(2)}{=} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}[X_j\,|\mathscr{G}_n] \\
&= \mathbb{E}[R_k\,|\mathscr{G}_n] \quad \forall k \le n.
\end{aligned}$$

6.3 Satz (Kolmogorovs 0-1-Gesetz)**.** *Seien $(X_n)_n$ ua ZV und $\mathscr{G}_n := \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$. Dann ist die terminale σ-Algebra $\mathscr{G}_\infty := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{G}_n$ trivial.*

Bemerkung. Eine σ-Algebra $\mathscr{F}$ heißt **trivial**, wenn gilt

$$A \in \mathscr{F} \;\Rightarrow\; \mathbb{P}[A] \in \{0,1\}.$$

Beweis. Sei $A \in \mathscr{G}_\infty$ und $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Es gilt $\mathscr{G}_\infty \subseteq \mathscr{F}_\infty$ und $\mathscr{G}_\infty \perp\!\!\!\perp \mathscr{F}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Definiere das ggi MG $M_n := \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \,|\mathscr{F}_n]$. Aus Satz 4.9 folgt

$$\exists M_\infty \in L^1(\mathscr{F}_\infty): \lim_{n\to\infty} M_n = M_\infty \quad \text{und} \quad M_N = \mathbb{E}[M_\infty \,|\mathscr{F}_n].$$

Wir zeigen, dass $M_\infty = \mathbb{1}_A$ f.s.:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[M_\infty \,|\mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \,|\mathscr{F}_n] \quad \forall n \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow\; & \int_{B_n} M_\infty \, d\mathbb{P} = \int_{B_n} \mathbb{1}_A \, d\mathbb{P} \quad \forall B_n \in \mathscr{F}_n, \; n \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow\; & \int_{B} M_\infty \, d\mathbb{P} = \int_{B} \mathbb{1}_A \, d\mathbb{P} \qquad \forall B \in \mathscr{F}_\infty \\
\Rightarrow\; & M_\infty = \mathbb{1}_A \text{ f.s. (da } A \in \mathscr{F}_\infty, \; M_\infty \in L^1(\mathscr{F}_\infty))
\end{aligned}$$

Andererseits gilt $M_n = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \,|\mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}[A]$ und daher

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\; & \mathbb{1}_A = M_\infty = \mathbb{P}[A] \quad \forall A \in \mathscr{G}_\infty \\
\Rightarrow\; & \mathbb{P}[A] \in \{0,1\} \qquad \forall A \in \mathscr{G}_\infty \\
\Rightarrow\; & \mathscr{G}_\infty \text{ ist trivial.}
\end{aligned}$$

□

Es folgen Anwendungen von Rückwärtsmartingalen:

6.4 Satz (Starkes Gesetz der großen Zahlen)**.** *Es seien $(X_n)_n \subseteq L^1$ iid ZV. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n) \;=\; \mathbb{E}[X_1] \;\; f.s.$$

Beweis. Setze $R_n := \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$ und $\mathscr{G}_n := \sigma(R_n, R_{n+1}, \ldots)$. Dann ist $(R_n)_n$ ein RWM bzgl. $(\mathscr{G}_n)_n$. Aus Satz 6.1 folgt $\lim_{n\to\infty} R_n = R_\infty \in L^1(\mathscr{G}_\infty)$ f.s. und in L^1. Mit Satz 6.2 folgt, dass $\mathscr{G}_\infty$ trivial ist, d.h. R_∞ ist f.s. konstant bzw. gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $R_\infty = c$ f.s. Aus der RWM-Eigenschaft folgt $\mathbb{E}[R_1 \,|\mathscr{G}_n] = R_n$ und damit

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\; & \mathbb{E}[R_1] \;=\; \mathbb{E}[R_n] \quad \forall n \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow\; & c \;=\; \mathbb{E}[R_\infty] \;=\; \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[R_n] \;=\; \mathbb{E}[R_1] \;=\; \mathbb{E}[X_1] \\
\Rightarrow\; & \lim_{n\to\infty} R_n \;=\; \mathbb{E}[X_1]
\end{aligned}$$

□

Beispiel (Wählermodell). Wähle $d, l \in \mathbb{N}$ und betrachte L^d Individuen auf einem regelmäßigen Gitter $\{0, \ldots, L-1\}^d$. Jedes Individuum hat eine Meinung 0 oder 1 (dafür oder dagegen). Der Zustand des Kollektivs lässt sich durch $x \in \{0,1\}^\Lambda$ darstellen, wobei $\Lambda := \{0, \ldots, L-1\}^d$, der Zustand des Individuums durch $x(i) \in \{0,1\}$ für $i \in \Lambda$. Zu jedem Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ übernimmt ein zufällig ausgewähltes Individuum I_n die Meinung eines zufällig ausgewählten Nachbarn $I_n + N_n$. (Addition modulo L)

Formulierung:
$(I_n, N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iid mit I_n gleichverteilt auf Λ und N_n gleichverteilt auf $\{\pm e_i\}_{1 \le i \le d}$
Der Meinungsprozess X_n ist eine Folge von Zuständen in $\{0,1\}^\Lambda$ mit

$$X_n(i) = \begin{cases} X_{n-1}(i) & , i \neq I_n \\ X_{n-1}(I_n + N_n) & , i = I_n \end{cases}$$

für alle $i \in \Lambda$.

Frage:

- Langzeitverhalten des Modells
- Entsteht Konsens?

Definiere M_n als die Anzahl der Individuen mit Meinung 1, d.h. $M_n := \sum_{i \in \Lambda} X_n(i)$ und setze $\mathscr{F}_n := \sigma(\{I_k, N_k\} : \ k \le n)$.

Behauptung: $(M_n)_n$ ist $\mathscr{F}_n$–MG.

- adaptiert (klar)
- integrierbar: $0 \le M_n \le L^d$ d.h. $(M_n)_n$ beschränkt, also in L^1
- MG-Eigenschaft: Es gilt $M_n - M_{n-1} = X_{n-1}(I_n + N_n) - X_{n+1}(I_n)$ und damit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_n - M_{n-1} | \mathscr{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[X_{n-1}(I_n + N_n) - X_{n-1}(I_n) | \mathscr{F}_{n-1}] \\ &\overset{ua}{=} \sum_{i \in \Lambda} X_{n-1}(i) \cdot \underbrace{\mathbb{P}[I_n + N_n = i]}_{= L^{-d}} - X_{n-1}(i) \cdot \underbrace{\mathbb{P}[I_n = i]}_{L^{-d}} = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $(M_n)_n$ ist beschränktes MG
$\Rightarrow$ $lim_{n \to \infty} M_n = M_\infty$ f.s. und in L^1

Wir zeigen $M_\infty \in \{0, L^d\}$, d.h. es treten im Grenzwert nur die extremen Zustände auf, dass alle Meinung 0 oder alle Meinung 1 haben.

Vorüberlegung:
Sei $x \in \{0,1\}^\Lambda$ keiner der zwei extremen Zustände, d.h. es gibt $i \neq j$ mit $X(i) \neq X(j)$. Dann gilt (i und j benachbart)

$$\mathbb{P}[X_n \neq X_{n-1} | X_{n-1} = x] \ge \mathbb{P}[I_n = i, \ I_n + N_n = j] = \mathbb{P}[I_n = i, \ N_n = j - i] \overset{ua}{=} L^{-d} \cdot \frac{1}{2d}.$$

Betrachte den Kompensator, dann gilt

- $(M_n - M_0)^2 - \langle M \rangle_n$ ist MG
- $\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^2 | \mathscr{F}_{k-1}]$
  $\Rightarrow \mathbb{E}[\langle M \rangle_n] = \mathbb{E}[(M_n - m_0)^2]$.

Daraus folgt

$$\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^2 | \mathscr{F}_{k-1}] = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}[X_k \neq X_{k-1} | \mathscr{F}_{k-1}],$$

d.h.

$$\mathbb{E}[\langle M \rangle_n] = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}[X_k \neq X_{k-1}] \geq L^{-d} \frac{1}{2d} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}[\underbrace{M_{k-1} \notin \{0, L^d\}}_{=:\ A_{k-1}}].$$

Weiter gilt

$$L^{2d} \geq \mathbb{E}[(M_n - M_0)^2] = \mathbb{E}[\langle M \rangle_n] \geq L^{-d} \frac{1}{2d} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}[A_{k-1}] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}[A_{k-1}] \leq L^{3d} \cdot 2d < \infty.$$

Aus Borel-Cantelli folgt, dass nur endlich viele Ereignisse $(A_k)_k$ f.s. eintreten, d.h.

$$\begin{aligned} &\exists N_0 : \Omega \to \mathbb{N} : \ M_k \in \{0, L^d\} \quad \forall k \geq N_0 \\ \Rightarrow \quad & M_\infty = \lim_{n \to \infty} M_n \in \{0, L^d\}. \end{aligned}$$

Im Grenzfall treten also nur die beiden Extremfälle auf.

6.5 Satz (Satz von Radon-Nikodym). *Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $\mathbb{Q}$ ein W-Maß mit $\mathbb{Q} << \mathbb{P}$. Dann existiert eine Dichte $X =: \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ von $\mathbb{Q}$ bzgl. $\mathbb{P}$, d.h.*

$$\mathbb{Q}[A] = \int_\Omega \mathbb{1}_A \cdot X \, d\mathbb{P} \quad \forall A \in \mathscr{A}.$$

Beweis. Wir zeigen das Resultat unter der Annahme, dass $\mathscr{A}$ abzählbar erzeugt ist, d.h.

$$\exists (A_i)_{i \in \mathbb{N}}, \ A_i \subseteq \Omega : \ \mathscr{A} = \sigma(\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}).$$

Definiere die Filtration $\mathscr{F}_n := \sigma(A_1, \ldots, A_n)$ (d.h. $\mathscr{A} = \mathscr{F}_\infty$). In jedem $\mathscr{F}_n$ gibt es eine endliche Teilmenge $\mathscr{Z}_n$ mit den Eigenschaften

- $C_1, C_2 \in \mathscr{Z}_n \ \Rightarrow \ C_1 = C_2$ oder $C_1 \cap C_2 = \varnothing$
- $C \in \mathscr{Z}_n, \ A \in \mathscr{F}_n$ mit $A \subseteq C \ \Rightarrow \ A \cap C \in \{\varnothing, C\}$.

Definiere X_n durch

$$X_n := \sum_{\substack{C \in \mathscr{Z}_n \\ \mathbb{P}[C] > 0}} \frac{\mathbb{Q}[C]}{\mathbb{P}[C]} \mathbb{1}_C .$$

Wir zeigen, dass $(X_n)_n$ ein $\mathscr{F}_n$–MG ist:

Sei $m \le n$ und $B \in \mathscr{F}_m$, dann gilt

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_B \cdot X_n] = \sum_{\substack{C \in \mathscr{Z}_n \\ \mathbb{P}[C]>0}} \frac{\mathbb{Q}[C]}{\mathbb{P}[C]} \cdot \mathbb{P}[\underbrace{C \cap B}_{C \subseteq B \ \vee \ C \cap B = \varnothing}] = \sum_{\substack{C \subseteq B \\ C \in \mathscr{Z}_n}} \mathbb{Q}[C] = \mathbb{Q}[B],$$

d.h. insbesondere folgt $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_n \cdot \mathbb{1}_\Omega] = \mathbb{Q}[\Omega] = 1$ und $\mathbb{E}[\mathbb{1}_B X_n] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_B X_m]$ für alle $m \le n,\ B \in \mathscr{F}_m$, daraus folgt $\mathbb{E}[X_n | \mathscr{F}_m] = X_m$.

Mit etwas Zusatzarbeit folgt, dass $(X_n)_n$ ggi ist. Also existiert $\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty$ f.s. und in L^1. Sei nun $B \in \mathscr{F}_n$, dann gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[X_\infty \cdot \mathbb{1}_B] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n \cdot \mathbb{1}_B] = \mathbb{Q}[B] && \forall B \in \mathscr{F}_n,\ n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \quad & \underbrace{\mathbb{E}[X_\infty \cdot \mathbb{1}_B]}_{= \int_\Omega X_\infty \cdot \mathbb{1}_B \, d\mathbb{P}} = \mathbb{Q}[B] && \forall B \in \mathscr{F}_\infty = \mathscr{A}, \end{aligned}$$

d.h. X_∞ ist Radon-Nikodym-Dichte. □

Kapitel 7

Fouriertransformation und charakteristische Funktionen

Ziel: Beweis des Zentralen Grenzwertsatzes (CLT) im $\mathbb{R}^d$
Plan:

1. Charakteristische Funktion und Fouriertransformation
2. Inversion der Fouriertransformation
3. Stetigkeitssatz

Wir interessieren uns für die **schwache Konvergenz** von Maßen.
Plan:

1. $\mu_n \longrightarrow \mu$ schwach $\Rightarrow$ $\hat{\mu_n} \longrightarrow \hat{\mu}$
2. $\hat{\mu_n} \longrightarrow \phi$ $\Rightarrow$ $\exists \mu \in \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^d):$ $\hat{\mu} = \phi$

Wir betrachten einen Messraum $(\Omega, \mathscr{A})$ und bezeichnen mit $\mathcal{M}_b(\mathbb{R}^d)$ den Raum der endlichen Maße in $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$. Wir wollen zunächst folgenden Satz beweisen:

7.1 Satz (Zentraler Grenzwertsatz)**.** *Sei $(X_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq L^2(\mathbb{R})$ eine Folge von iid ZV mit $\mathbb{E}[X_1] = 0, \mathbb{V}[X_1] = 1$ und setze $S_n := \sum_{i=1}^n X_j, n \geq 1$. Dann gilt*

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}_{0,1}.$$

Bemerkung.

1. $\frac{d\mathcal{N}_{0,1}}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$ ist die Dichte von $\mathcal{N}_{0,1}$.
2. "$\xrightarrow{d}$" ist die sogenannte **Konvergenz in Verteilung**: Sei $(\mu_n)_n \subseteq \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^d)$ und definiere $C_b(\mathbb{R}^d) := \{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \text{ stetig, beschränkt, messbar}\}$. Dann sagen wir, dass μ_n gegen μ **schwach konvergiert** ($\mu_n \xrightarrow{d} \mu$ bzw. $\mu_n \Longrightarrow \mu$), falls

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d\mu_n \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu \quad \forall f \in C_b(\mathbb{R}^d).$$

Seien $(X_n)_n$ und X ZV sowie F_{X_n}, F_X die zugehörigen Verteilungsfunktionen und $\mathbb{P}_{X_n}, \mathbb{P}_X$ die zugehörigen Verteilungen.

Definition. $X_n \xrightarrow{d} X \;:\Leftrightarrow\; \mathbb{P}_{X_n} \Longrightarrow \mathbb{P}_X$

Es sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $X_n \xrightarrow{d} X$

(ii) $\mathbb{E}[f(X_n)] \longrightarrow \mathbb{E}[f(X)] \quad \forall f \in C_b(\mathbb{R}^d)$

(iii) $F_{X_n} \longrightarrow F_X \quad \forall x \in D_{F_X}$, wo F_X stetig.

Beweis.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) Übung

(iii) $\Leftrightarrow$ (i) siehe *Billingsley: Convergence of Probability Measures* (1968) $\square$

3. Integration von $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Betrachte $u : \Omega \to \mathbb{R}, x \mapsto \operatorname{Re} f(x)$ und $v : \Omega \to \mathbb{R}, x \mapsto \operatorname{Im} f(x)$. Dann gilt: f ist mb $\Leftrightarrow$ u, v sind mb.

Definition. f ist μ-integrierbar $:\Leftrightarrow$ u, v sind μ-integrierbar.

Daher definieren wir $\int f d\mu := \int u d\mu + i \int v d\mu$ als das Integral von f bzgl. μ.

Wir bezeichnen mit $L^1_{\mathbb{C}}(\mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} : \; f \; \mu\text{-integrierbar}\}$ den Raum der komplex integrierbaren Funktionen. Es gelten folgende Eigenschaften:

(a) $f \mapsto \int f d\mu$ ist linear

(b) $\int \bar{f} d\mu = \overline{\int f d\mu}$

(c) Konvergenzsätze für Integrale gelten auch in $L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$.

Satz. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ integrierbar $\Leftrightarrow$ $|f|$ integrierbar
Es gilt dann $|\int f d\mu| \le \int |f| d\mu$.

Beweis. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ integrierbar $\Leftrightarrow$ $|f|$ integrierbar (Übung)

$\forall z \in \mathbb{C} : \; \operatorname{Re} z \le |z| \;\Rightarrow\; \operatorname{Re}\left(\overline{\int f d\mu}\, f\right) \le |\int f d\mu|\, |f|$

Integration liefert:

$$|\int f d\mu|^2 = \operatorname{Re}\left(\overline{\int f d\mu} \int f d\mu\right) = \int \operatorname{Re}\left(\overline{\int f d\mu}\; f\right) d\mu \le |\int f d\mu| \int |f| d\mu.$$

$\square$

Wir bezeichnen mit $L^p_{\mathbb{C}}(\mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} : \; |f|^p \in L^1_{\mathbb{C}}(\mu)\}, p \ge 1$, den Raum der p-integrierbaren komplexwertigen Funktionen.

Übung: $L^p_{\mathbb{C}}(\mu) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} : \; \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in L^p(\mu)\}$

7.2 Definition.

(a) Für jedes $\mu \in \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^d)$ definieren wir die **Fouriertransformation von** μ durch

$$\hat{\mu} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C},\ \hat{\mu}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} \exp(i\langle x, \xi\rangle)\mu(dx) \quad (\text{bzw. } \hat{\mu}(\xi) =: F(\mu)(\xi)).$$

Beachte: Für μ σ-endlich ist $\hat{\mu}$ nicht mehr wohldefiniert, da die konstanten Funktionen nicht mehr integrierbar sind.

(b) Für $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}, f \in L^1(dx)$, definieren wir die **Fouriertransformation von** f durch

$$\hat{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C},\ \hat{f} := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \exp(i\langle x, \xi\rangle)dx.$$

(c) Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ eine ZV mit Verteilung $\mathbb{P}_X$. Dann heißt

$$\phi_X(\xi) := \hat{\mathbb{P}}_X(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp(i\langle x, \xi\rangle)\mathbb{P}_X(dx) = \mathbb{E}[\exp(i\langle X, \xi\rangle)]$$

die **charakteristische Funktion** von X.

7.3 Bemerkung. Definition 7.2 ist konsistent, denn für $\mu << \lambda$ gibt es $f \in L^1(dx)$, $f \geq 0$ mit $\mu(dx) = f(x)dx$ (Satz von Radon-Nikodym) und daraus folgt $\hat{f} = \hat{\mu}$.

7.4 Satz (wichtiges Beispiel)**.**

(a) Für $\mathcal{N}_{0,1}$ *auf* $\mathbb{R}$ *gilt* $\hat{\mathcal{N}}_{0,1}(\xi) = \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)$.

(b) Für $\mathcal{N}_{\underline{0},I_d}$ *auf* $\mathbb{R}^d$ *gilt* $\hat{\mathcal{N}}_{\underline{0},I_d}(\xi) = \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{2}\right)$.

Beweis. (a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\phi(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{x^2}{2} + ix\xi\right)dx \\
\Rightarrow \phi'(\xi) &\overset{\substack{\text{Diff'barkeits-}\\ \text{lemma}}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ix \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\exp(ix\xi)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - i\frac{d}{dx}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\exp(ix\xi)\,dx \\
&\overset{\substack{\text{partielle}\\ \text{Integration}}}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) i\xi \exp(ix\xi)\,dx \\
&= -\xi\phi(\xi)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi(0) = 1 \\ \phi'(\xi) = -\xi\phi(\xi) \end{cases} \qquad \Rightarrow \phi(\xi) = \exp(-\tfrac{\xi^2}{2}).$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right)\exp\left(i\langle x,\xi\rangle\right)dx &= \prod_{j=1}^d\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-\frac{x_j^2}{2}\right)\exp\left(ix_j\xi_j\right)\frac{dx_j}{\sqrt{2\pi}}\\ &\overset{(a)}{=} \prod_{j=1}^d\exp\left(-\frac{\xi_j^2}{2}\right)\\ &= \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{2}\right).\end{aligned}$$

□

7.5 Satz (Eigenschaften der Fouriertransformation). *Es sei μ ein W-Maß auf $\mathbb{R}^d$ und sei $X\sim\mu$ eine ZV. Dann gilt*

(a) $\hat{\mu}(0)=\phi_X(0)=\mu(\mathbb{R}^d)=1$

(b) $|\hat{\mu}(\xi)|=|\phi_X(\xi)|\le\mu(\mathbb{R}^d)=1$

(c) $\xi\mapsto\hat{\mu}(\xi)$ *und* $\xi\mapsto\phi_X(\xi)$ *sind stetig*

(d) $\hat{\mu}(-A)=\overline{\hat{\mu}(A)}$*, wobei* $-A:=\{-a|\ a\in A\}$

(e) $\widehat{\mu\circ T^{-1}}(\xi)=\exp\left(i\langle b,\xi\rangle\right)\hat{\mu}(\lambda\xi)$ *mit* $T(y):=\lambda y+b,\ \lambda\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R}^d$ *und*

$\phi_{\lambda X+b}\ (\xi)\ =\exp\left(i\langle b,\xi\rangle\right)\phi_X(\lambda\xi)$

(f) $\mathbb{E}[|X|^k]<\infty\ \Rightarrow\ \partial^\alpha\hat{\mu}$ *existiert für alle* $|\alpha|\le k,\alpha\in\mathbb{N}_0^d$ *und es gilt*

$$\partial^\alpha\hat{\mu}(0)=i^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^d}x^\alpha\mu(dx)=i^{|\alpha|}\,\mathbb{E}[X^\alpha].$$

Dabei ist $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_d)\in\mathbb{N}_0^d$ *ein sogenannter* **Multiindex** *und wir definieren*

$$|\alpha|:=\sum_{j=1}^d\alpha_j,\quad \alpha!:=\prod_{j=1}^d\alpha_j!,\quad x^\alpha:=\prod_{j=1}^d x_j^{\alpha_j},\quad \partial^\alpha:=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_d^{\alpha_d}}.$$

Beweis. (a), (b), (d) klar

(c) $\xi\mapsto\exp(i\langle x,\xi\rangle)$ ist stetig für alle $x\in\mathbb{R}^d$ und $|\exp(\langle x,\xi\rangle)|\le 1\in L^1(\mu)$ wegen $\mu\in\mathcal{M}_b$. Aus dem Stetigkeitslemma folgt die Behauptung.

(e) Es gilt

$$\begin{aligned}\widehat{\mu\circ T^{-1}}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d}\exp(i\langle x,\xi\rangle)\,\mu\circ T^{-1}(dx)=\int_{\mathbb{R}^d}\exp(i\langle T(x),\xi\rangle)\,\mu(dx)\\ &= \exp(i\langle b,\xi\rangle)\int_{\mathbb{R}^d}\exp(i\langle\lambda x,\xi\rangle)\,\mu(dx)\\ &= \exp(i\langle b,\xi\rangle)\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d}\exp(i\langle x,\lambda\xi\rangle)\,\mu(dx)}_{=\ \hat{\mu}(\lambda\xi)}.\end{aligned}$$

(f) Es gilt $|x|^k \in L^1(\mu)$ wegen $X \sim \mu$ und $\mathbb{E}[|X|^k] < \infty$, weiter ist $|X^\alpha| \le |X|^{|\alpha|}$, denn

$$|X^\alpha| = |X_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot X_d^{\alpha_d}| \;\le\; |X|^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot |X|^{\alpha_d} = |X|^{|\alpha|}.$$

Schritt 1: Aus $|x|^k \in L^1(\mu)$ folgt $|x^\alpha| \in L^1(\mu)$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| \le k$ und damit

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |x^\alpha|\,\mu(dx) &\le \int_{\mathbb{R}^d} |x|^{|\alpha|}\,\mu(dx) \le \int_{\mathbb{R}^d} (1+|x|)^{|\alpha|}\,\mu(dx)\\ &\le \int_{\mathbb{R}^d} (1+|x|)^k\,\mu(dx) \le 2^{k-1}\Big(\mu(\mathbb{R}^d) + \int_{\mathbb{R}^d} |x|^k\,\mu(dx)\Big) < \infty.\end{aligned}$$

Schritt 2: Es gilt

$$\begin{aligned}\partial^\alpha \hat{\mu}(\xi) &= \partial^\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \exp(i\langle x,\xi\rangle)\,\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha \exp(i\langle x,\xi\rangle)\,\mu(dx)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (ix)^\alpha \exp(i\langle x,\xi\rangle)\,\mu(dx) = i^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} x^\alpha \exp(i\langle x,\xi\rangle)\,\mu(dx) < \infty,\end{aligned}$$

d.h. $\partial^\alpha \hat{\mu}(0) = i^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} x^\alpha\,\mu(dx) = i^{|\alpha|}\,\mathbb{E}[X^\alpha]$.

□

7.6 Bemerkung. Die Umkehrung von Satz 7.5.f gilt im Allgemeinen **nicht**. Aber für $d = 1$ gilt

$$\exists \partial^{2k}\hat{\mu}(0) \;\Rightarrow\; \mathbb{E}[X^{2k}] < \infty$$

(siehe *Shiryaev: Probability*, Kapitel 2, Paragraph 2, S.289)

7.7 Korollar. *Sei $f \in L^1(dx)$. Dann ist $\hat{f} \in C_b$ mit $|\hat{f}(\xi)| \le \|f\|_{L^1}$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ und weiter gilt*

(a) $g(x) = f(x+b),\ b \in \mathbb{R}^d \;\Rightarrow\; \hat{g}(\xi) = \exp(-i\langle b,\xi\rangle)\hat{f}(\xi) = \hat{f}(\xi - b)$

(b) $g(x) = \exp(i\langle x,b\rangle)f(x) \;\Rightarrow\; \hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi + b)$

(c) $g(x) = f(\theta x),\ \theta > 0 \;\Rightarrow\; \hat{g}(\xi) = \theta^{-d}\hat{f}(\frac{1}{\theta}\xi)$

(d) $g(x) = f(Rx),\ R \in SO(d,\mathbb{R}) \;\Rightarrow \hat{g}(\xi) = \hat{f}(R\xi)$

(e) $g(x) = (ix)^\alpha f(x) \in L^1(dx) \;\Rightarrow\; \hat{g}(\xi) = \partial^\alpha \hat{f}(\xi)$

(f) $g(x) = \partial^\alpha f(x) \in L^1(dx) \cap C_\infty^{|\alpha|} \;\Rightarrow\; \hat{g}(\xi) = (-i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$,
wobei $C_\infty^k(\mathbb{R}^d) := \left\{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} :\ \partial^\beta f \text{ stetig } \forall\,|\beta| \le k,\ \lim_{|x|\to\infty} \partial^\beta f(x) = 0\right\}$

Beweis. $\xi \mapsto \hat{f}(\xi)$ ist stetig gemäß Satz 7.5.c und es gilt

$$|\hat{f}(\xi)| = |\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\exp(i\langle x,\xi\rangle)\,dx| \le \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\,dx = \|f\|_{L^1}.$$

Rest: Übung □

Fouriertransformation und unabhängige Zufallsvariablen

Bekannt: $X \sim \mu, Y \sim \nu, X \perp\!\!\!\perp Y \quad \Rightarrow \quad X + Y \sim \mu * \nu$, wobei $\mu, \nu \in \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^d)$ und $\mu * \nu := (\mu \otimes \nu) \circ A^{-1}$ mit $A : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \ (x, y) \mapsto x + y$, die Faltung ist.

Man kann zeigen, dass für $f \in C_b$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f \, d(\mu * \nu) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x + y) \, \mu(dx) \, \nu(dy),$$

und damit

$$(\mu * \nu)(B) = \int_{\mathbb{R}^d} \mu(B - y) \, \nu(dy) = \int_{\mathbb{R}^d} \nu(B - x) \, \mu(dx).$$

7.8 Satz. *Seien $X \sim \mu$ und $Y \sim \nu$ mit $X \perp\!\!\!\perp Y$. Dann gilt*

$$\phi_{X+Y}(\xi) \ = \ \phi_X(\xi) \cdot \phi_Y(\xi) \quad \textit{bzw.} \quad \widehat{\mu * \nu} \ = \ \hat{\mu} \cdot \hat{\nu},$$

d.h. die Fouriertransformation trivialisiert die Faltung.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \phi_{X+Y}(\xi) &= \mathbb{E}[\exp(i\langle X + Y, \xi\rangle)] = \mathbb{E}[\exp(i\langle X, \xi\rangle) \exp(i\langle Y, \xi\rangle)] \\ &\overset{(*)}{=} \mathbb{E}[\exp(i\langle X, \xi\rangle)] \, \mathbb{E}[\exp(i\langle Y, \xi\rangle)] = \phi_X(\xi) \cdot \phi_Y(\xi), \end{aligned}$$

wobei in $(*)$ benutzt wurde, dass gilt

$$\widehat{\mu * \nu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \exp(i\langle x + y, \xi\rangle) \, \mu(dx) \, \nu(dy).$$

□

7.9 Bemerkung. Die Umkehrung von Satz 7.8 gilt im Allgemeinen **nicht**.

7.10 Satz (Caz)**.** *Seien X, Y $\mathbb{R}^d$-wertige ZV. Dann gilt*

$$X \perp\!\!\!\perp Y \ \Leftrightarrow \ \mathbb{E}[\exp(i\langle X, \xi\rangle + i\langle Y, \eta\rangle)] = \mathbb{E}[\exp(i\langle X, \xi\rangle)] \cdot \mathbb{E}[\exp(i\langle Y, \eta\rangle)] \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^d.$$

Beweis.
“ $\Rightarrow$ ” Setze $X^\xi := \langle X, \xi\rangle$ und $Y^\eta := \langle Y, \eta\rangle$ und wende Satz 7.8 an.
“ $\Leftarrow$ ” Folgt später. □

Kapitel 8

Inversion und Stetigkeit der Fouriertransformation

8.1 Definition.

(a) $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \operatorname{supp} f \text{ kompakt}\}$

(b) $S(\mathbb{R}^d) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |(1+|x|^2)^N \partial^\alpha u(x)| \le C(N,\alpha)\ \forall N \in \mathbb{N}_0, \alpha \in \mathbb{N}_0^d\}$
ist der Raum der **Schwartz-Funktionen** (rapidly decreasing functions).

8.2 Bemerkung. Es gilt

(a) $|\partial^\alpha u(x)| \ \le\ C_{N,\alpha} \cdot (1+|x|)^{-N} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

Insbesondere gilt $\partial^\beta u \in L^p(dx)$ mit $p \in [1,\infty]$, wenn $N = N(p)$ groß genug ist (z.B. $p = 1 \Rightarrow N > 1$).

(b) $\exp(-x^2) \in S(\mathbb{R})$

(c) $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset S(\mathbb{R}^d)$

(d) $|(1+|x|^2)^N \partial^\alpha| \le C_{N,\alpha} \ \Rightarrow\ |x^\beta \partial^\alpha u(x)| \le K_{\alpha,\beta} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

8.3 Satz. *Es gilt*

(a) $C_c^\infty \hookrightarrow S$ *und* $C_c^\infty \overset{\text{dicht}}{\hookrightarrow} L^p(dx)$

(b) $\forall K \subseteq \mathbb{R}^d$ *kompakt* $\exists (u_n) \subseteq C_c,\ 0 \le u_n \le 1 :\ u_n \downarrow \mathbb{1}_K$.

Beweis. Setze $U_n := \{x \in \mathbb{R}^d : d(x,K) < \frac{1}{n}\} = K + B_{\frac{1}{n}}(0)$. Dann ist U_n offen, $U_n \downarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = K$ und $\overline{U}_n$ ist kompakt. Definiere nun

$$u_n(x) := \frac{d(x,U_n^c)}{d(x,U_n^c) + d(x,K)} = \begin{cases} 1 & , x \in K \\ 0 & , x \in U_n^c \end{cases} .$$

Dann ist u_n stetig und es gilt $u_n \downarrow \mathbb{1}_K$, da $U_n \downarrow K$. $\square$

8.4 Satz. *Sei $u \in S$. Dann ist $\hat{u} \in S$.*

Beweis. Sei $u \in S$. Dann ist $u \in L^1(dx)$ und damit ist nach Korollar 7.6 $\hat{\mu}(\xi)$ wohldefiniert. Damit gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$

$$\partial^\beta(\underbrace{(ix)^\alpha u(x)}_{:=\ g(x)\in S(\mathbb{R}^d)}) = \sum_{|\gamma|\leq|\beta|} p_{\alpha,\beta,\gamma}(x)\partial^\gamma u(x),$$

wobei $p_{\alpha,\beta,\gamma}$ ein Polynom ist nach der Leibniz-Regel, d.h. $\partial^\beta g \in S$. Weiter gilt

$$(-i\xi)^\beta \partial^\alpha \hat{u}(\xi) \overset{7.6.e}{=} (-i\xi)^\beta \hat{g}(\xi) \overset{7.6.f}{=} \widehat{\partial^\beta g}(\xi)$$

und damit

$$|(-i\xi)^\beta \partial^\alpha \hat{u}(\xi)| = |\widehat{\partial^\beta g}(\xi)| \leq \|\partial^\beta g\|_{L^1(dx)} < \infty \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d,$$

d.h. $\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d} |(-i\xi)^\beta \partial^\alpha \hat{u}(\xi)| < \infty$. □

8.5 Korollar (Riemann-Lebesgue-Lemma)**.**
Definiere $C_\infty(\mathbb{R}^d) := \{u \in C(\mathbb{R}^d) : \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0\}$. Dann ist die Fouriertransformation eine Abbildung von $L^1(dx)$ in C_∞.

Beweis. Sei $u \in L^1(dx)$. Dann ist $\hat{u} \in C_b$ nach Korollar 7.6. Wegen Satz 8.3.a ist S dicht in $L^1(dx)$, d.h. es gibt eine Folge $(u_n) \subseteq S$, sodass $u \longrightarrow u_n$ in L^1 gilt. Sei $\varepsilon > 0$. Damit gilt

$$|\hat{u}(\xi)| \leq |\hat{u}(\xi) - \hat{u_n}(\xi)| + |\hat{u_n}(\xi)| \overset{7.6}{=} \underbrace{\|u_n - u\|_{L^1}}_{<\ \varepsilon} + \underbrace{|\hat{u_n}(\xi)|}_{\longrightarrow 0\ (|\xi|\to\infty)}$$

$$\Rightarrow \limsup_{|\xi|\to\infty} |\hat{u}(\xi)| \leq \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\limsup_{|\xi|\to\infty} |\hat{u}(\xi)| = 0$. □

8.6 Satz (Inversion der Fouriertransformation)**.** *Sei $u \in S$. Dann ist die Fouriertransformation $\hat{u}$ invertierbar und die Umkehrabbildung $\check{u}$ ist definiert durch*

$$\check{u}(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} u(\xi) \exp(-i\langle x, \xi\rangle)\, d\xi.$$

Beweis. Seien $u, v \in S$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(\xi) v(\xi) \exp(-i\langle x,\xi\rangle)\, d\xi &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} u(y)\exp(i\langle y,\xi\rangle)\, dy\, v(\xi)\exp(-i\langle x,\xi\rangle)\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} v(\xi)\exp(i\langle y-x,\xi\rangle)\, d\xi\, u(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{v}(y-x) u(y)\, dy \overset{z:=y-x}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{v}(z) u(z+x)\, dz.
\end{aligned}$$

Setze $v(x) := (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \exp(-\frac{\varepsilon^2|x|^2}{2})$. Dann ist gemäß Satz 7.4 und Korollar 7.6.c

$$\hat{v}(\xi) = \varepsilon^{-d} \exp(-\frac{|\xi\varepsilon^{-1}|^2}{2})$$

und damit gilt mit $z := y\varepsilon^{-1}$

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(\xi) \exp(-\varepsilon^2 \frac{|x|^2}{2}) \exp(i\langle x,\xi\rangle)\, d\xi &= \varepsilon^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-\frac{|y\varepsilon^{-1}|^2}{2}) u(x+y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-\frac{|z|^2}{2}) u(\varepsilon z + x)\, dz.\end{aligned}$$

Aus dominierter Konvergenz folgt schließlich

$$\begin{aligned}&(2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(\xi) \exp(-\varepsilon^2 \frac{|x|^2}{2}) \exp(i\langle x,\xi\rangle)\, d\xi \\ \xrightarrow{\varepsilon\downarrow 0}\ &(2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(\xi) \exp(-i\langle x,\xi\rangle)\, d\xi = (2\pi)^{\frac{d}{2}} u(x),\end{aligned}$$

also gilt $\check{\hat{u}} = u$ und analog erhält man $\hat{\check{u}} = u$. □

8.7 Satz (Plancherel)**.** *Sei $f \in L^1(dx)$, $\mu \in \mathcal{M}_b$. Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x)\, \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\, \hat{\mu}(\xi)\, d\xi.$$

Beweis. Sei $f \in L^1(dx)$. Dann ist $\hat{f} \in C_b$ nach Korollar 7.6, also insbesondere $\hat{f} \in L^1(\mu)$ und ferner gilt $|\hat{\mu}(\xi)| \le \hat{\mu}(0) = \mu(\mathbb{R}^d) < \infty$. Also sind die Integrale wohldefiniert. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x)\, \mu(dx) &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) \exp(i\langle x,\xi\rangle)\, d\xi\, \mu(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) \int_{\mathbb{R}^d} \exp(i\langle x,\xi\rangle)\, \mu(dx)\, d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\mu}(\xi) f(\xi)\, d\xi.\end{aligned}$$

□

8.8 Satz. *Seien $\mu, \nu \in \mathcal{M}_b$ mit $\hat{\mu} = \hat{\nu}$. Dann ist $\mu = \nu$.*

Beweis. Sei $u \in S$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}\, d\mu \overset{8.7}{=} \int_{\mathbb{R}^d} u\hat{\mu}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} u\hat{\nu}\, d\xi \overset{8.7}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}\, d\nu.$$

Da die Fouriertransformation für Funktionen eine Bijektion von S nach S ist und weiter $\hat{u} \in S$ und $C_c^\infty \subset S$ gilt, folgt

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} \phi\, \nu \quad \forall \phi \in C_c^\infty.$$

Da $\overline{C_c^\infty}^{\|\cdot\|_\infty} = C_\infty$ und $C_c \subset C_\infty$ ist, gibt es für alle $\phi \in C_\infty$ eine Folge $(\phi_n)_n \subset C_c^\infty$, sodass gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|\phi - \phi_n\| = 0.$$

Daraus folgt

$$|\int_{\mathbb{R}^d} \phi\, d\mu - \int_{\mathbb{R}^d} \phi_n\, d\mu| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\phi - \phi_n|\, d\mu \leq \|\phi - \phi_n\|_\infty\, \mu(\mathbb{R}^d)$$

und damit

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} \phi\, d\nu \quad \forall \phi \in C_c.$$

Sei nun $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt, dann lässt sich wie im Beweis von Satz 8.3.b eine Folge $(\phi_j)_j \subset C_c$ konstruieren, sodass gilt $\phi_j \downarrow \mathbb{1}_K$. Mit monotoner Konvergenz folgt daraus schließlich

$$\mu(K) = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \phi_j\, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \phi_j\, d\nu = \nu(K)$$

und aus dem Maßeindeutigkeitssatz folgt die Behauptung. □

8.9 Korollar. *Seien $f, g \in L^1(dx)$ mit $\hat{f} = \hat{g}$. Dann ist $f = g$ λ–f.ü.*

Beweis. O.b.d.A. seien $f, g \geq 0$. Dann gilt mit $\mu = f\,dx$ und $\nu = g\,dx$

$$\hat{f} = \hat{g} \;\Leftrightarrow\; \hat{\mu} = \hat{\nu} \;\overset{8.8}{\Rightarrow}\; \mu = \nu \;\Leftrightarrow\; \int_B f - g\, dx = 0 \;\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \;\Leftrightarrow\; f = g \text{ f.ü.}$$

□

Nun sind wir in der Lage, den Satz von Caz vollständig zu beweisen:

Beweis von Satz 7.10. Seien X, Y ZV mit Randverteilungen μ_X, μ_Y und definiere $Z := (X, Y)$ mit gemeinsamer Verteilung μ_Z. Dann gilt

$$X \perp\!\!\!\perp Y \;\Leftrightarrow\; \mu_Z = \mu_X \cdot \mu_Y \quad \text{(siehe \textit{Shiryaev: Probability}, Kapitel 2, Paragraph 5).}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
& \phi_Z(\xi,\eta) = \phi_X(\xi) \cdot \phi_Y(\eta) \\
\Leftrightarrow\;& \hat{\mu}_Z(\xi,\eta) = \hat{\mu}_X(\xi) \cdot \hat{\mu}_Y(\eta) \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^d \\
\overset{8.8}{\Rightarrow}\;& \mu_Z(\xi,\eta) = \mu_X(\xi) \cdot \mu_Y(\eta) \;\; \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^d \\
\Rightarrow\;& X \perp\!\!\!\perp Y
\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Seien $X = (X_1, X_2)$ und $Y = (Y_1, Y_2)$. Dann gibt uns der Satz von Caz ein Kriterium für die Unabhängigkeit von X und Y aber **nicht** für die Unabhängigkeit der Koordinaten X_1 und X_2 bzw. Y_1 und Y_2.

8.10 Satz (Lévy)**.** *Sei $\mu \in \mathcal{M}_b(\mathbb{R})$ und $a < b$. Dann gilt*

$$\frac{1}{2}\mu(\{a\}) + \mu((a,b)) + \frac{1}{2}\mu(\{b\}) = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{\exp(-ia\xi) - \exp(-ib\xi)}{i\xi} \hat{\mu}(\xi)\, d\xi.$$

8.11 Satz (Stetigkeitssatz von Lévy)**.** *Sei $(\mu_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$, wobei $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d) := \{\mu \in \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^d) : \mu(\mathbb{R}^d) = 1\}$. Dann gilt*

(a) $\mu_n \Longrightarrow \mu \;\Rightarrow\; \mu \in \mathcal{M}_1$ und $\hat{\mu}_n \longrightarrow \hat{\mu}$ gleichmäßig auf Kompakta

(b) $\hat{\mu}_n(\xi) \longrightarrow \phi(\xi)\ \forall \xi \in \mathbb{R}^d$ mit ϕ stetig in $0 \;\Rightarrow\; \exists \mu \in \mathcal{M}_1 : \hat{\mu} = \phi$ und $\mu_n \Longrightarrow \mu$.

Um den Satz 8.11 zu beweisen, benötigen wir den Begriff der Straffheit (tightness) von Maßen:

8.12 Definition (Straffheit)**.** Eine Folge $(\mu_n)_n \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$ heißt **straff** (bzw. **tight**), wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K = K_\varepsilon \text{ kompakt} : \ \mu_n(K^c) \le \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

8.13 Lemma. *Sei $(\mu_n)_n \subset \mathcal{M}_1$ mit $\mu_n \Longrightarrow \mu$. Dann ist $\mu \in \mathcal{M}_1$ und $(\mu_n)_n$ ist straff.*

Beweis. Zunächst gilt

$$1 = \mu_n(\mathbb{R}^d) = \int_{\mathbb{R}^d} 1\, \mu_n(dx) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^d} 1\, \mu(dx) = \mu(\mathbb{R}^d),$$

d.h. $\mu \in \mathcal{M}_1$. Weiter ist $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ ein polnischer Raum und damit ist μ regulär, also gilt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K \subset \mathbb{R}^d \text{ kompakt} : \ \mu(K^c) \le \varepsilon.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es $L \subset \mathbb{R}^d$ kompakt, sodass $\mu(L^c) \le \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Wähle nun $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt so, dass $L \subset K^\circ$ gilt und sei $\chi \in C_c$, sodass $\mathbb{1}_L \le \chi \le \mathbb{1}_K$ gilt (vgl. Beweis von Satz 8.3). Dann folgt $\mathbb{1}_{L^c} \ge 1 - \chi \ge \mathbb{1}_{K^c}$ und daher

$$\mu_n(K^c) \le \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{1 - \chi}_{\in\, C_b} d\mu_n \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^d} 1 - \chi\, d\mu \le \mu(L^c) \le \frac{\varepsilon}{2},$$

d.h. es gibt ein $N = N_\varepsilon$, sodass für alle $n \ge N$ gilt $\mu_n(K^c) \le \frac{\varepsilon}{2}$. Für die endlich vielen Maße $\mu_1, \ldots, \mu_{N-1}$ vergrößere ggf. K $(N-1)$-mal, dann gilt o.E. $\mu_j(K^c) \le \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $j = 1, \ldots, N-1$ und daraus folgt schließlich

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(K^c) \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

d.h. $(\mu_n)_n$ ist straff. □

Nun können wir Teil (a) von Satz 8.11 beweisen:

Beweis von Satz 8.11. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es nach Lemma 8.13 ein $K = K_\varepsilon \subset \mathbb{R}^d$ kompakt mit $\mu_n(K^c) \leq \varepsilon$. Dann gilt für alle $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$ mit $|\eta - \xi| < \delta$

$$\begin{aligned} |\hat{\mu}_n(\eta) - \hat{\mu}_n(\xi)| &\leq \underbrace{\int_K |1 - \exp(i\langle x, \xi - \eta\rangle)|\, \mu_n(dx)}_{\leq\, \varepsilon} \\ &\quad + \underbrace{\int_{K^c} |1 - \exp(i\langle x, \xi - \eta\rangle)|\, \mu_n(dx)}_{\leq\, 2\mu_n(K^c)\, \leq\, 2\varepsilon} \leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Weiter gilt, da $\hat{\mu}$ stetig ist, für alle $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$ mit $|\eta - \xi| < \delta$

$$|\hat{\mu}(\xi) - \hat{\mu}(\eta)| \leq \varepsilon,$$

sodass wir schliesslich erhalten

$$\begin{aligned} |\hat{\mu}_n(\eta) - \hat{\mu}(\eta)| &\leq |\hat{\mu}_n(\eta) - \hat{\mu}_n(\xi)| + |\hat{\mu}_n(\xi) - \hat{\mu}(\xi)| + |\hat{\mu}(\xi) - \hat{\mu}(\eta)| \\ &\leq 4\varepsilon + |\hat{\mu}_n(\xi) - \hat{\mu}(\xi)| \xrightarrow{n\to\infty} 4\varepsilon \end{aligned}$$

und da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

8.14 Korollar. *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $\mathbb{R}^d$-wertigen ZV mit $X_n \sim \mu_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wenn*

(i) $\lim_{n\to\infty} \hat{\mu}_n(\xi) = \phi(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d$

(ii) $\xi \mapsto \phi(\xi)$ *ist stetig in* $\xi = 0$

gelten, dann existiert eine ZV X und $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$, sodass $X \sim \mu$ und $X_n \xrightarrow{d} X$ (bzw. $\mu_n \Longrightarrow \mu$) und $\hat{\mu}(\xi) = \phi(\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ gilt.

Kapitel 9

Zentrale Grenzwertsätze

Wir betrachten die Abbildung $x \mapsto e^{ix}$ für $x \in \mathbb{R}$. Mit dem Satz von Taylor erhalten wir die Taylorentwicklung

$$e^{ix} = \sum_{j=0}^{n} \frac{(ix)^j}{j!} + \rho_n(x) \tag{9.1}$$

mit Taylor-Restglied ρ_n. Offenbar gilt

$$\rho_n(x) = e^{ix} - \sum_{j=0}^{n} \frac{(ix)^j}{j!} = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(ix)^j}{j!}$$

und es gilt folgende Abschätzung:

9.1 Lemma. *Es gilt*

$$|\rho_n(x)| \le \frac{2|x|^n}{n!} \wedge \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Beweis.
1.Schritt: Es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^x \rho_n(t)\,dt &= \int_0^x e^{it}\,dt - \sum_{j=0}^{n} \int_0^x \frac{(it)^j}{j!}\,dt \\ &= \frac{1}{i}(e^{ix}-1) - \frac{1}{i}\sum_{j=0}^{n} \frac{(ix)^{j+1}}{(j+1)!} = \frac{1}{i}\rho_{n+1}(x) \end{aligned}$$

2.Schritt: vollständige Induktion
Induktionsanfang: $|\rho_0(x)| = |e^{ix}-1| \le 2 \wedge |\int_0^x e^{it}\,dt| \le 2 \wedge |x|$
Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} |\rho_{n+1}(x)| &\overset{1.Schritt}{=} |i\int_0^x \rho_n(t)\,dt| \le \int_0^{|x|} |\rho_n(t)|\,dt \\ &\overset{IA}{\le} \int_0^{|x|} \frac{2|t|^n}{n!} \wedge \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}\,dt = 2\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \wedge \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!} \end{aligned}$$

□

9.2 Lemma. *Sei* $X \in L^2(\mathbb{P})$ *mit* $X \sim \mu, \mathbb{E}[X] = 0, \mathbb{V}[X] = \sigma^2 > 0$. *Dann gilt*

(a) $|\mathbb{E}[\exp(i\xi x)] - 1 - i\xi\,\mathbb{E}[X] + \frac{1}{2}\xi^2\,\mathbb{V}[X]| \;=\; |\mathbb{E}[\rho_2(\xi X)]| \;\leq\; \xi^2\,\mathbb{E}[X^2 \wedge \frac{|\xi||X|^3}{6}]$

(b) $|\mathbb{E}[\rho_2(\xi \frac{X}{s})]| \;\leq\; \frac{\xi^2}{s^2}\int_{\{|x|>\varepsilon s\}} x^2\,\mu(dx) + \frac{|\xi|^3\sigma^2\varepsilon}{6s^2} \qquad \forall \varepsilon, s > 0.$

Beweis.

(a) Folgt aus (9.1) und Lemma 9.1.

(b) Wende (a) an:

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}[\rho_2(\xi\frac{X}{s})]| &\leq \xi^2\,\mathbb{E}[\frac{X^2}{s^2} \wedge \frac{|\xi||X|^3}{6s^3}] = \xi^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{s^2} \wedge \frac{|\xi||x|^3}{6s^3}\,\mu(dx) \\
&\leq \xi^2\left(\frac{1}{s^2}\int_{\{|x|>\varepsilon s\}} x^2\,\mu(dx) + \int_{\{|x|\leq\varepsilon s\}} \frac{|x^3||\xi|}{6s^3}\,\mu(dx)\right) \\
&\leq \xi^2\left(\frac{1}{s^2}\int_{\{|x|>\varepsilon s\}} x^2\,\mu(dx) + \frac{|\xi|\varepsilon s}{6s^3}\int_{\{|x|\leq\varepsilon s\}} x^2\,\mu(dx)\right) \\
&\leq \frac{\xi^2}{s^2}\left(\int_{\{|x|>\varepsilon s\}} x^2\,\mu(dx) + \frac{|\xi|\varepsilon}{6s^2}\right).
\end{aligned}$$

□

9.3 Lemma. *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{R}$ *mit* $a_n \longrightarrow a$. *Dann gilt*

$$\left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^n \longrightarrow e^{-a}.$$

Beweis.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{x} \overset{l'Hospital}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{1-x}}{1} = -1$

2. $\ln\left(\left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^n\right) = n\ln\left(1 - \frac{a_n}{n}\right) = a_n \frac{\ln\left(1-\frac{a_n}{n}\right)}{\frac{a_n}{n}} \longrightarrow -a$

3. $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\exp\left(\ln\left(\left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^n\right)\right) \longrightarrow e^{-a}$

□

9.4 Satz (Zentraler Grenzwertsatz). *Sei* $(X_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset L^2(\mathbb{P})$ *iid mit* $\mathbb{E}[X_1] = 0$ *und* $\mathbb{V}[X_1] = \sigma^2 > 0$. *Definiere* $G_n := \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{j=1}^n X_j$. *Dann gilt*

$$G_n \xrightarrow{d} G \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Beweis. Sei $G_n \sim \mu_n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}_n(\xi) &= \mathbb{E}\left[\exp(i\frac{\xi}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{j=1}^n X_j)\right] \overset{iid}{=} \left(\mathbb{E}[\exp(i\frac{\xi}{\sigma\sqrt{n}}X_1)]\right)^n \\
&= \left(1 + i\frac{\xi}{\sigma\sqrt{n}}\underbrace{\mathbb{E}[X_1]}_{=0} - \frac{\xi^2}{2\sigma^2 n}\underbrace{\mathbb{E}[X_1^2]}_{=\sigma^2} + \mathbb{E}[\rho_2(\frac{\xi}{\sigma\sqrt{n}}X_1)]\right)^n \\
&= \left(1 - \frac{\xi^2}{2n} + n\frac{\mathbb{E}[\rho_2(\frac{\xi}{\sigma\sqrt{n}}X_1)]}{n}\right)^n.
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$|\rho_2(\frac{\xi}{\sigma\sqrt{n}}X_1)| \overset{9.1}{\leq} \frac{\xi^2}{\sigma^2 n}X_1^2 \wedge \frac{|\xi|^2|X_1|^3}{\sigma^3 n^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{\xi^2}{\sigma^2 n}X_1^2 \leq \frac{\xi^2}{\sigma^2}X_1^2 \in L^1(\mathbb{P})$$

und mit dominierter Konvergenz folgt

$$\mathbb{E}[\rho_2(\frac{\xi}{\sigma\sqrt{n}}X_1)] \longrightarrow 0 \ \text{ bzw. } \ n\,\mathbb{E}[\rho_2(\frac{\xi}{\sigma\sqrt{n}}X_1)] \longrightarrow 0.$$

Daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty}\hat{\mu}_n(\xi) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\xi^2}{2n}\right)^n \overset{9.3}{=} e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

und, da die Abbildung $\xi \mapsto e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ stetig ist, gibt es gemäß Korollar 8.14 eine ZV $G \sim \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, sodass $G_n \xrightarrow{d} G \sim \mu$ gilt mit $\hat{\mu}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$. Aus Satz 8.8 folgt schließlich $\mu = \mathcal{N}(0,1)$. □

9.5 Definition. Sei $(X_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset L^2(\mathbb{P})$ ua mit $\mathbb{E}[X_j] = 0, \mathbb{V}[X_j] = \sigma_j^2 > 0$ und $X_j \sim \mu_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Wir setzen $s_n^2 := \sum_{j=1}^n \sigma_j^2$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir sagen, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(i) die **Lindeberg-Bedingung (L)** erfüllt, wenn

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n^2}\sum_{j=1}^n \int_{\{|x|>\varepsilon\sigma_j\}} x^2\,\mu_j(dx) = 0 \quad \forall\varepsilon > 0$$

(ii) die **klassische Lindeberg-Bedingung (L')** erfüllt, wenn

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n^2}\sum_{j=1}^n \int_{\{|x|>\varepsilon s_n\}} x^2\,\mu_j(dx) = 0 \quad \forall\varepsilon > 0$$

(iii) die **Feller-Bedingung (F)** erfüllt, wenn

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leq j\leq n}\frac{\sigma_j}{s_n} = 0$$

(iv) die **asymptotische Vernachlässigbarkeit (A)** erfüllt, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big[|X_j| \geq \varepsilon s_n\big] = 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

9.6 Lemma. *Es gilt*

$$(L) \Leftrightarrow (L') \Rightarrow (F) \Rightarrow (A).$$

Beweis.
$(F) \Rightarrow (A)$: Wende die Tschebyscheff-Ungleichung an:

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| \geq \alpha] \leq \frac{\mathbb{V}[X]}{\alpha^2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}[|X_j| \geq \varepsilon s_n] = \mathbb{P}[|X_j - \mathbb{E}[X_j]| \geq \varepsilon s_n] \leq \frac{\mathbb{V}[X_j]}{(\varepsilon s_n)^2} = \frac{\mathbb{E}[X^2]}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\sigma_j}{s_n}\right)^2 \xrightarrow{(F)} 0$$

$(L') \Rightarrow (F)$: Seien $\varepsilon > 0$ und $1 \leq j \leq n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_j^2}{s_n^2} &= \frac{1}{s_n^2}\mathbb{E}[X_j^2] = \frac{1}{s_n^2}\int_{\mathbb{R}} x^2\,\mu_j(dx) \\
&= \frac{1}{s_n^2}\left(\int_{\{|x|>\varepsilon s_n\}} x^2\,\mu_j(dx) + \int_{\{|x|\leq\varepsilon s_n\}} x^2\,\mu_j(dx)\right) \\
&\leq \frac{1}{s_n^2}\big((\varepsilon s_n)^2 \underbrace{\mu_j(\{|x| \leq \varepsilon s_n\})}_{\leq\, 1}\big) + \frac{1}{s_n^2}\int_{\{|x|>\varepsilon s_n\}} x^2\,\mu_j(dx) \\
&= \varepsilon^2 + \frac{1}{s_n^2}\int_{\{|x|>\varepsilon s_n\}} x^2\,\mu_j(dx) \\
&\leq \varepsilon^2 + \frac{1}{s_n^2}\sum_{j=1}^n \int_{\{|x|>\varepsilon s_n\}} x^2\,\mu_j(dx) \xrightarrow{(L')} 0
\end{aligned}$$

$(L) \Rightarrow (L')$: Aus $S_n \geq \sigma_j$ für alle $1 \leq j \leq n$ folgt $\{|x| > \varepsilon s_n\} \subseteq \{|x| > \varepsilon\sigma_j\}$ und damit

$$0 \leq \frac{1}{s_n^2}\sum_{j=1}^n \int_{\{|x|>\varepsilon s_n\}} x^2\,\mu_j(dx) \leq \frac{1}{s_n^2}\sum_{j=1}^n \int_{\{|x|>\varepsilon\sigma_j\}} x^2\,\mu_j(dx) \xrightarrow{(L)} 0.$$

$(L') \Rightarrow (L)$: Sei $\delta > 0$ klein. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s_n^2}\sum_{j=1}^n \int_{\{|x|>\varepsilon\sigma_j\}} x^2\,\mu_j(dx) &= \frac{1}{s_n^2}\left(\sum_{j:\,\sigma_j\leq\delta s_n} x^2\,\mu_j(dx) + \sum_{j:\,\sigma_j>\delta s_n}\int_{\{|x|>\varepsilon\sigma_j\}} x^2\,\mu_j(dx)\right) \\
&\leq \frac{1}{s_n^2}\left(\sum_{j:\,\sigma_j\leq\delta s_n}\int_{\mathbb{R}} x^2\,\mu_j(dx) + \sum_{j=1}^n\int_{\{|x|>\delta\varepsilon s_n\}} x^2\,\mu_j(dx)\right) \\
&= \underbrace{\frac{1}{s_n^2}\sum_{j:\,\sigma_j\leq\delta s_n}\sigma_j^2}_{\leq\,\delta^2} + \frac{1}{s_n^2}\sum_{j=1}^n\int_{\{|x|>\delta s_n\}} x^2\,\mu_j(dx) \\
&\leq \delta^2 + \frac{1}{s_n^2}\sum_{j=1}^n\int_{\{|x|>\underbrace{\varepsilon\delta}_{=:\,\tilde\varepsilon}\, s_n\}} \xrightarrow{(L')} 0.
\end{aligned}$$

Da $\delta > 0$ beliebig war, folgt

$$\frac{1}{s_n^2}\sum_{j=1}^n \int_{\{|x|>\varepsilon\sigma_j\}} x^2\,\mu_j(dx) \;\longrightarrow\; 0.$$

□

9.7 Definition (Zentraler Grenzwertsatz)**.** Sei $(X_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset L^2(\mathbb{P})$. Wir sagen, dass $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ den **Zentralen Grenzwertsatz** erfüllt, wenn

$$\frac{\sum_{j=1}^n X_j - a_n}{b_n} \;\xrightarrow{d}\; G \sim \mathcal{N}(0,1)$$

gilt, wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$ sind.

9.8 Satz (Lindeberg)**.** *Sei $(X_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset L^2(\mathbb{P})$ ua mit $\mathbb{E}[X_j] = 0, \mathbb{V}[X_j] = \sigma_j > 0$ für $j \in \mathbb{N}$ und setze $G_n := \frac{1}{s_n}\sum_{j=1}^n X_j$. Wenn $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Lindeberg-Bedingung erfüllt, gilt*

$$G_n \;\xrightarrow{d}\; G \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Beweis.
1.Schritt: Seien $a_j, b_j \in \mathbb{C}$ mit $|a_j| \le 1, |b_j| \le 1, j = 1,\dots,n$.Dann gilt

$$\left|\prod_{j=1}^n a_j - \prod_{j=1}^n b_j\right| \;\le\; \sum_{j=1}^n |a_j - b_j|,$$

denn setze $A := \prod_{j=1}^n a_j, B := \prod_{j=1}^n b_j$, dann folgt

$$\begin{aligned}
|Aa_{n+1} - Bb_{n+1}| &\le |Aa_{n+1} - Ba_{n+1}| + |Ba_{n+1} - Bb_{n+1}| \\
&= |A - B||a_{n+1}| + |a_{n+1} - b_{n+1}||B| \\
&\le |A - B| + |a_{n+1} - b_{n+1}| \\
&\le \sum_{j=1}^n |a_j - b_j| + |a_{n+1} - b_{n+1}|.
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt aus vollständiger Induktion.

2.Schritt: Seien $(G_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ua und $G_j \sim \mathcal{N}(0,\sigma_j)$. Dann gilt $G^{(n)} := \sum_{j=1}^n G_j \sim \mathcal{N}(0, s_n^2)$ und $\frac{G^{(n)}}{s_n} \sim \mathcal{N}(0,1)$ und weiter

$$\frac{1}{s_n^2}\sum_{j=1}^n \int_{\{|x|>\varepsilon s_n\}} x^2\,\mathcal{N}_{0,\sigma_j}(dx) \;\longrightarrow\; 0, \tag{9.2}$$

denn

$$\begin{aligned}
0 \quad &\leq \quad \frac{1}{s_n^2}\int_{\{|x|>\varepsilon s_n\}} x^2\, \mathcal{N}_{0,\sigma_j}(dx) \\
&= \quad \frac{1}{\sigma_j\sqrt{2\pi}}\int_{\{|x|>\varepsilon s_n\}} \frac{x^2}{s_n^2}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma_j^2})\,dx \\
&\overset{y\,=\,x\sigma_j^{-1}}{=} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\{|y|>\varepsilon\frac{s_n}{\sigma_j}\frac{\sigma_j^2}{s_n^2}\}} y^2\exp(-\frac{y^2}{2})\,dy \\
&\leq \quad \frac{\sigma_j^2}{s_n^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\{|y|>\varepsilon\min\frac{s_n}{\sigma_j}\}} y^2\exp(-\frac{y^2}{2})\,dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum_{j=1}^n \frac{1}{s_n^2}\int_{\{|x|>\varepsilon s_n\}} x^2\,\mathcal{N}_{0,\sigma_j}(dx) \quad &\leq \quad \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_j^2}{s_n^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\{|y|>\min\frac{s_n}{\sigma_j}\}} y^2\exp(-\frac{y^2}{2})\,dy \\
&= \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\mathbb{1}_{\{|y|>\min\frac{s_n}{\sigma_j}\}}(y)}_{=:\,I_n}\,\underbrace{y^2\exp(-\frac{y^2}{2})}_{=:\,I}\,dy
\end{aligned}$$

Da (L) gilt, gilt wegen Lemma 9.6 auch (F), d.h.

$$\max_{1\leq j\leq n}\frac{\sigma_j}{s_n}\longrightarrow 0 \quad\text{bzw.}\quad \min_{1\leq j\leq n}\frac{s_n}{\sigma_j}\longrightarrow\infty$$

und daraus folgt

$$I_n\longrightarrow 0 \quad\text{bzw.}\quad I_nI\longrightarrow 0 \quad\text{und}\quad |I_nI|\leq I\in L^1(dy).$$

Die Behauptung (9.2) folgt schließlich aus dominierter Konvergenz.

3.Schritt: Es gilt $|\phi_{G_n}(\xi)-\phi_{G^{(n)}}(\xi)|\longrightarrow 0$, denn:
Zunächst gilt

$$\mathbb{E}[\exp(i\xi\frac{G_j}{s_n})]-1+\frac{1}{2}\frac{\sigma_j^2}{s_n^2}\overset{(9.1)}{=}\mathbb{E}[\rho_2(\xi\frac{G_j}{s_n})]$$

und

$$\mathbb{E}[\exp(i\xi\frac{X_j}{s_n})]-1+\frac{1}{2}\frac{\sigma_j^2}{s_n^2}\overset{(9.1)}{=}\mathbb{E}[\rho_2(\xi\frac{X_j}{s_n})]. \tag{9.3}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \left|\mathbb{E}[\exp(i\xi G_n)] - \mathbb{E}[\exp(i\xi \frac{G^{(n)}}{s_n})]\right| \\
\overset{ua}{=} \quad & \left|\prod_{j=1}^n \mathbb{E}[\exp(i\xi \frac{X_j}{s_n})] - \prod_{j=1}^n \mathbb{E}[\exp(i\xi \frac{G_j}{s_n})]\right| \\
\overset{1.Schritt}{\leq} \quad & \sum_{j=1}^n \left|\mathbb{E}[\exp(i\xi \frac{X_j}{s_n})] - \mathbb{E}[\exp(i\xi \frac{G_j}{s_n})]\right| \\
\overset{(9.3)}{\leq} \quad & \sum_{j=1}^n |\,\mathbb{E}[\rho_2(\xi \frac{X_j}{s_n})]\,| + |\,\mathbb{E}[\rho_2(\xi \frac{G_j}{s_n})]\,| \\
\overset{(9.2)}{\leq} \quad & \sum_{j=1}^n \frac{\xi^2}{s_n^2}\left(\int_{\{|x|>\varepsilon s_n\}} x^2\,\mu_j(dx) + \frac{|\xi|^3\varepsilon\sigma_j^2}{6s_n^2} + \int_{\{|x|>\varepsilon s_n\}} x^2\,\mathcal{N}_{0,\sigma_j}(dx) + \frac{|\xi|^3\varepsilon\sigma_j^2}{6s_n^2}\right) \\
= \quad & \frac{|\xi|^3\varepsilon}{3} + \xi^2(\underbrace{\frac{1}{s_n^2}\sum_{j=1}^n \int_{\{|x|>\varepsilon s_n\}} x^2\,\mu_j(dx)}_{\overset{(L)}{\longrightarrow}\,0} + \underbrace{\frac{1}{s_n^2}\sum_{j=1}^n \int_{\{|x|>\varepsilon s_n\}} x^2\,\mathcal{N}_{0,\sigma_j}(dx)}_{\overset{2.Schritt}{\longrightarrow}\,0}).
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
& |\phi_{G_n}(\xi) - \hat{\mathcal{N}}_{0,1}(\xi)\,| \;\longrightarrow\; \frac{|\xi|^3}{3}\varepsilon \quad \forall\varepsilon > 0 \\
\Rightarrow \quad & |\phi_{G_n}(\xi) - \hat{\mathcal{N}}_{0,1}(\xi)\,| \;\longrightarrow\; 0 \\
\overset{8.14}{\Rightarrow} \quad & \exists G \in L^2(\mathbb{P}):\ \hat{\mu}_G(\xi) = \hat{\mathcal{N}}_{0,1}(\xi) \quad \text{und} \quad G_n \xrightarrow{d} G \overset{8.8}{\sim} \mathcal{N}(0,1).
\end{aligned}$$

□

9.9 Korollar. *Sei $\delta > 0$ und $(X_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset L^{2+\delta}(\mathbb{P})$ ua mit $\mathbb{E}[X_j] = 0, \mathbb{V}[X_j] = \sigma_j > 0$ für $j \in \mathbb{N}$ und es gelte die* **Lyapunov-Bedingung**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[|X_j|^{2+\delta}] \;=\; 0.$$

Dann gilt

$$\frac{1}{s_n}\sum_{j=1}^n X_j \;\xrightarrow{d}\; G \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s_n^2}\sum_{j=1}^n \int_{\{|x|>\varepsilon s_n\}} x^2\,\mu_j(dx) \quad & \leq \quad \frac{1}{s_n^2}\sum_{j=1}^n \int_{\{|x|>\varepsilon s_n\}} x^2 \left|\frac{x}{\varepsilon s_n}\right|^\delta \mu_j(dx) \\
& \leq \quad \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[|X_j|^{2+\delta}] \;\longrightarrow\; 0.
\end{aligned}$$

Aus Satz 9.7 folgt die Behauptung. □

9.10 Satz (Feller). *Sei $(X_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset L^2(\mathbb{P})$ ua mit $\mathbb{E}[X_j] = 0$ und $\mathbb{V}[X_j] = \sigma_j > 0$ für $j \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$(ZGS) \;+\; (F) \;\Leftrightarrow\; (L).$$

Beweis.
„$\Leftarrow$“ Folgt aus Lemma 9.6 und Satz 9.7.
„$\Rightarrow$“ Aus Lemma 9.6 folgt $(F) \Rightarrow (A)$, also zeigen wir

$$(A) \;+\; (ZGS) \;\Rightarrow\; (L').$$

1.Schritt: Es gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \frac{1}{2}$

$$|\ln(1+z) - z| \;\leq\; 2|z|^2$$

und weiter gilt auch $1 - \cos(t) \;\leq\; \frac{1}{2}t^2$.
2.Schritt: Es gilt

$$\begin{aligned}
|\,\mathbb{E}[\exp(i\xi\frac{X_j}{s_n})] - 1\,| \;&\leq\; \int_{\{|x|>\varepsilon s_n\}} |\exp(i\frac{\xi x}{s_n}) - 1|\, d\mu_j + \int_{\{|x|\leq\varepsilon s_n\}} |\exp(i\frac{\xi x}{s_n}) - 1|\, d\mu_j \\
&\leq\; 2\int_{\{|x|>\varepsilon s_n\}} d\mu_j + \int_{\{|x|\leq\varepsilon s_n\}} \frac{|\xi x|}{s_n}\, d\mu_j \\
&\leq\; \underbrace{2\,\mathbb{P}[|X_j| > \varepsilon s_n] + |\xi|\varepsilon}_{=:\ \varepsilon_n} \;\xrightarrow{(A)}\; |\xi|\varepsilon.
\end{aligned}$$

3.Schritt: Setze $G_n := \frac{1}{s_n}\sum_{j=1}^n X_j$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& |\ln\phi_{G_n}(\xi) - \sum_{j=1}^n (\phi_{\frac{X_j}{s_n}}(\xi) - 1)\,| \\
=\;\; & |\sum_{j=1}^n \ln(\mathbb{E}[\exp(i\xi\frac{X_j}{s_n}) - 1] + 1) - \mathbb{E}[\exp(i\xi\frac{X_j}{s_n}) - 1]\,| \\
\overset{1.Schritt}{\leq}\;\; & 2\sum_{j=1}^n |\,\underbrace{\mathbb{E}[\exp(i\xi\frac{X_j}{s_n}) - 1]}_{=:\ z}\,|^2 \\
\overset{|z|\,<\,\frac{1}{2}}{\leq}\;\; & 2\max_{1\leq j\leq n} |\,\mathbb{E}[\exp(i\xi\frac{X_j}{s_n}) - 1\,| \sum_{j=1}^n |\,\mathbb{E}[\exp(i\xi\frac{X_j}{s_n}) - 1]\,| \\
\leq\;\; & 2\varepsilon_n \sum_{j=1}^n |\,\mathbb{E}[\exp(i\xi\frac{X_j}{s_n}) - 1]\,| \;=\; 2\varepsilon_n \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[\rho_0(i\xi\frac{X_j}{s_n})] \\
\overset{(9.1)}{\leq}\;\; & 2\varepsilon_n \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[|\xi|\frac{|X_j|}{s_n}] \;\leq\; 2\frac{\xi^2\varepsilon_n}{s_n}\sum_{j=1}^n \sigma_j^2 \;=\; 2\xi^2\varepsilon_n \;\longrightarrow\; 0.
\end{aligned}$$

4.Schritt: Es gilt schließlich die klassische Lindeberg-Bedingung, denn

$$\frac{\xi^2}{2s_n^2}\sum_{j=1}^n \int_{\{|x|>\varepsilon s_n\}} \frac{x^2}{s_n}\,\mu_j(dx) = \ldots$$

$$\ldots = \;\mathrm{Re}\,(\underbrace{\frac{\xi^2}{2} + \ln\phi_{G_n}(\xi)}_{=:\ A_n \xrightarrow{(ZGS)} 0} \underbrace{- \ln\phi_{G_n}(\xi) + \sum_{j=1}^n (\phi_{\frac{X_j}{s_n}}(\xi) - 1)}_{=:\ B_n \xrightarrow{3.Schritt} 0} \underbrace{- \sum_{j=1}^n \int_{\ldots} \exp(i\xi\frac{X_j}{s_n}) - 1\, d\mu_j}_{=:\ C_n \xrightarrow{2.Schritt} 0}\,)$$

□

Multivariate Normalverteilung und multivariater Grenzwertsatz

Im Folgenden sei stets $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ symmetrisch, positiv semidefinit und $\mu \in \mathbb{R}^d$.

9.11 Definition. Sei $\nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$. Wir bezeichnen ν als **Normalverteilung**, wenn

$$\hat{\nu}(\xi) = \exp(i\langle\mu,\xi\rangle - \frac{1}{2}\xi^T\Sigma\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d$$

gilt und schreiben $\mathcal{N}(\mu,\Sigma) := \mathcal{N}_{\mu,\Sigma} := \nu$.

9.12 Satz. $\mathcal{N}(\mu,\Sigma)$ *besitzt genau dann eine Dichte* f *bzgl.* λ^d, *wenn* Σ *positiv definit ist. Genauer gilt*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d|\Sigma|}}\exp(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)) \quad (x \in \mathbb{R}^d), \tag{9.4}$$

wir schreiben $\mathcal{N}(\mu,\Sigma)(dx) := f(x)\,dx$.

Beweis. Wir zeigen hier nur:

$$\nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d) \text{ hat Dichte } f \text{ wie in (10.1)} \quad \Rightarrow \quad \nu = \mathcal{N}(\mu,\Sigma).$$

Da Σ positiv definit ist, ist Σ invertierbar, d.h. $|\Sigma| \neq 0$ und damit ist f wohldefiniert. Weiter gilt $f \geq 0, f \in L^1(\lambda^d)$, also können wir $\nu(dx) := f(x)\,dx$ definieren. Daraus folgt $\nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$ und es gilt

$$\begin{aligned}
\hat{\nu}(\xi) = \hat{f}(\xi) \quad &= \quad \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d|\Sigma|}}\int_{\mathbb{R}^d}\exp(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\exp(i\langle x,\xi\rangle))\,dx \\
\left(y := \Sigma^{-\frac{1}{2}}(x-\mu)\right) \quad &= \quad \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}}\exp(i\langle\xi,\mu\rangle)\int_{\mathbb{R}^d}\exp(-\frac{1}{2}|y|^2)\exp(i\langle\Sigma^{\frac{1}{2}}\xi,y\rangle)\,dy \\
&= \quad \exp(i\langle\xi,\mu\rangle - \frac{1}{2}\xi^T\Sigma\xi) \quad = \quad \hat{\mathcal{N}}(b,\Sigma).
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt aus Satz 8.8. □

9.13 Satz. *Sei* $X \in L^2(\mathbb{P})$ *eine* $\mathbb{R}^d$*-wertige ZV. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) l^TX *ist eine eindimensionale normalverteilte ZV für alle* $l \in \mathbb{R}^d$

(ii) Es existieren $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ *symmetrisch, positiv semidefinit und* $\mu \in \mathbb{R}^d$, *sodass gilt*

$$\mathbb{E}[\exp(i\langle\xi,X\rangle)] \;=\; \exp(i\langle\mu,\xi\rangle - \frac{1}{2}\xi^T\Sigma\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Beweis.
$(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $\langle l, X\rangle \sim \mathcal{N}(\mu_l, \sigma_l^2)$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[\exp(i\xi\langle \mu, X\rangle)] \;=\; \exp(i\mu_l\xi - \frac{1}{2}\xi^2\sigma_l^2). \tag{9.5}$$

Weiterhin gilt

$$\mu_l \;=\; \mathbb{E}[\langle l, X\rangle] \;=\; \langle l, \underbrace{\mathbb{E}[X]}_{=:\;\mu}\rangle \;\text{ und }\; \sigma_l^2 \;=\; \mathbb{V}[\langle l, X\rangle] \;=\; \sum_{j,k=1}^{d} l_j l_k \mathrm{Cov}[X_j, X_k] \;=:\; l^T\Sigma l.$$

Setzen wir in (10.2) nun $\xi = 1$, so folgt

$$\mathbb{E}[\exp(i\langle l, X\rangle)] \;=\; \exp(\langle l, \mu\rangle - \frac{1}{2}l^T\Sigma l).$$

$(ii) \Rightarrow (i)$: Zur Erinnerung $l \otimes \xi := (l_1\xi_1, \ldots, l_d\xi_d)^T$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\; \mathbb{E}[\exp(i\xi\langle l, X\rangle)] = \mathbb{E}[\exp(i\langle l \otimes \xi, X\rangle)] \;=\; \exp(i\xi\langle l, \mu\rangle)\exp(-\frac{1}{2}\xi^2\langle l, \Sigma l\rangle) \\
&\Rightarrow\; \langle l, X\rangle \;\sim\; \mathcal{N}(l^T\mu, l^T\Sigma l)
\end{aligned}$$

□

Eigenschaften:

(a) Seien $X \perp\!\!\!\perp Y$ und $X \sim \mathcal{N}_d(\mu_X, \Sigma_X), Y \sim \mathcal{N}_d(\mu_Y, \Sigma_Y)$. Dann gilt

$$(X, Y) \sim \mathcal{N}_{2d}\left(\begin{pmatrix}\mu_X \\ \mu_Y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\Sigma_X & \Sigma_{XY} \\ \Sigma_{XY} & \Sigma_Y\end{pmatrix}\right).$$

(b) Sei $(X, Y) \sim \mathcal{N}_{2d}\left(\begin{pmatrix}\mu_X \\ \mu_Y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\Sigma_X & \Sigma_{XY} \\ \Sigma_{XY} & \Sigma_Y\end{pmatrix}\right)$. Dann gilt

(1) $\Sigma_{XY} = 0 \quad\Rightarrow\quad X \perp\!\!\!\perp Y$,
(2) $X \sim \mathcal{N}_d(\mu_X, \Sigma_X), Y \sim \mathcal{N}_d(\mu_Y, \Sigma_Y)$.

Frage: Seien $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2), Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ und es gelte $\mathrm{Cov}[X, Y] = 0$. Folgt daraus schon $X \perp\!\!\!\perp Y$?

$\Rightarrow$ **Nein**, denn aus X, Y normalverteilt folgt im Allgemeinen nicht, dass (X, Y) normalverteilt ist.

(c) $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma), S := AX + b \quad\Rightarrow\quad S \sim \mathcal{N}(b + A\mu, A\Sigma A^T)$
Falls $|A\Sigma A^T| \neq 0$ gilt, so besitzt X eine Dichte.

9.14 Lemma (Cramér-Wold)**.** *Seien $X^{(n)}, X$ $\mathbb{R}^d$-wertige ZV. Dann gilt*

$$X^{(n)} \xrightarrow{d} X \quad \Leftrightarrow \quad \langle t, X^{(n)} \rangle \xrightarrow{d} \langle t, X \rangle \quad \forall t \in \mathbb{R}^d.$$

9.15 Satz (Multivariater zentraler Grenzwertsatz)**.** *Sei $(X_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset L^2(\mathbb{P})$ eine Folge von $\mathbb{R}^d$-wertigen iid ZV mit $\mu = \mathbb{E}[X_1] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[X_{11}] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[X_{1d}] \end{pmatrix}$ und $\Sigma = (Cov[X_{1l}, X_{1m}])_{l,m}$. Dann gilt*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n (X_j - \mu) \xrightarrow{d} G \sim \mathcal{N}(\underline{0}, \Sigma).$$

Beweis. Wegen Lemma 10.4 genügt es zu zeigen, dass

$$\langle l, \sum_{j=1}^n \frac{X_j - \mu}{\sqrt{n}} \rangle \xrightarrow{d} \langle l, G \rangle$$

für alle $l \in \mathbb{R}^d$ gilt. Dazu setzen wir $G^{(n)} := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \langle l, X_j - \mu \rangle$. Dann sind die ZV $\langle l, X_j - \mu \rangle$ iid mit $\mathbb{E}[\langle X_1 - \mu \rangle] = 0$ und $\mathbb{V}[\langle l, X_1 - \mu \rangle] = \langle l, \Sigma l \rangle$. Daraus folgt schließlich aus Satz 9.4

$$G^{(n)} \xrightarrow{d} \sqrt{\langle l, \Sigma l \rangle}\, \tilde{G},$$

wobei $\tilde{G} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, und damit die Behauptung. □

Kapitel 10

Brownsche Bewegung: Definition und Eigenschaften

Sei im Folgenden $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

10.1 Definition. Sei $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration.

(i) $\mathbb{F}$ heißt **vollständig** (in $\mathcal{F}$), wenn

$$\mathcal{F}_t \supseteq \mathcal{N}(\mathbb{P}) \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{bzw. } \mathcal{F}_0 \supseteq \mathcal{N}(\mathbb{P}))\ ,$$

wobei $\mathcal{N}(\mathbb{P})$ die Menge alle $\mathbb{P}$-Nullmengen ist:

$$\mathcal{N}(\mathbb{P}) := \{B \subseteq \Omega | \ \exists A \in \mathcal{F} : \ A \supseteq B,\ \mathbb{P}[A] = 0\}.$$

(ii) $\mathbb{F}$ heißt **rechtsstetig**, wenn

$$\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon} \ = \ \mathcal{F}_t.$$

(iii) $\mathbb{F}$ erfüllt die **üblichen Bedingungen** (kurz: ü.B.), wenn $\mathbb{F}$ vollständig und rechtsstetig ist.

Bemerkung: Nach Definition 11.1 sind Nullmengen im Allgemeinen nicht messbar.

Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $\mathbb{F}$ die ü.B. erfüllt, denn sonst können wir zur Filtration $\tilde{\mathbb{F}} = (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ übergehen, wobei $\tilde{\mathcal{F}}_t := \mathcal{F}_{t+} \vee \mathcal{N}(\mathbb{P}) := \sigma(\mathcal{F}_{t+} \cup \mathcal{N}(\mathbb{P}))$. Dann erfüllt $\tilde{\mathbb{F}}$ die ü.B.

10.2 Definition. Sei X ein stochastischer Prozess.

(i) Die Abbildung $t \mapsto X_t(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ heißt **Pfad** von X.

(ii) X heißt **stetig**, wenn seine Pfade stetig sind für alle $\omega \in \Omega$.

Beispiel: Definiere den SP Y durch

$$Y_t(\omega) := \begin{cases} X_t(\omega) & , \ \omega \in \Omega_0 \\ 0 & , \ \omega \notin \Omega_0 \end{cases},$$

wobei $\Omega_0 := \{\omega \in \Omega : \ t \mapsto X_t(\omega) \text{ stetig}\}$ und $\mathbb{P}[\Omega_0] = 1$. Dann ist Y stetig **aber** nur $\mathbb{F}$-adaptiert, wenn $\mathbb{F}$ vollständig in $\mathcal{F}$ ist.

10.3 Definition. Seien X und Y stochastische Prozesse.

(i) X und Y heißen **gleich**, wenn

$$X_t(\omega) \ = \ Y_t(\omega) \quad \forall t \geq 0, \omega \in \Omega.$$

(ii) X heißt eine **Modifikation** von Y, wenn

$$\mathbb{P}[X_t = Y_t] \ = \ 1 \quad \forall t \geq 0.$$

(iii) X und Y heißen **ununterscheidbar**, wenn

$$\mathbb{P}[X_t = Y_t \ \forall t \geq 0] \ = \ 1.$$

Bemerkung: Es gilt $(iii) \Rightarrow (ii)$, aber im Allgemeinen gilt **nicht** $(ii) \Rightarrow (iii)$, dafür muss zusätzlich gefordert werden, dass X und Y **cadlag** sind, d.h.

(i) links- und rechtsseitige Grenzwerte $X_{t-}(\omega)$, $X_{t+}(\omega)$ existieren für alle $t \geq 0$,

(ii) $\forall t \geq 0 : \quad X_t(\omega) = X_{t+}(\omega) \quad ,\omega \in \Omega \quad$ (für Y analog).

Zur Erinnerung:
Eine ZV $\tau : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ heißt **Stoppzeit**, wenn $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ für alle $t \geq 0$ gilt.

Beispiel: Sei $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und X ein adaptierter, stetiger SP mit Werten in $\mathbb{R}^d$. Wir definieren die sogenannte **Eintrittszeit**

$$\tau_B := \inf\{t \geq 0 : \ X_t \in B\}.$$

Dann gilt:

(a) Falls B abgeschlossen ist, so ist τ_B eine SZ,

(b) Falls B offen und $\mathbb{F}$ rechtsstetig ist, so ist τ_B eine SZ.

(siehe Skript „Stochastische Analysis “ von Keller-Ressel, Satz 1.7)

10.4 Definition. Ein SP B mit Werten in $\mathbb{R}$ heißt **Brownsche Bewegung**, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(B0) $B_0 = 0$ f.s.

(B1) $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ für alle $0 \le s \le t$

(B2) $(B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ ist ua für alle $0 \le t_1 < \dots < t_n$ und $n \in \mathbb{N}$

(B3) $t \mapsto B_t(\omega)$ ist stetig für alle $\omega \in \Omega$.

Bemerkung: Aus $(B0)$ und $(B1)$ folgt

$$B_{t-s} \sim B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s).$$

Bemerkung: Es gilt

(i) $\mathbb{F}^B = (\mathcal{F}_t^B)_{t\ge 0}$ ist rechtsstetig, wobei $\mathcal{F}_t^B := \sigma(B_s :\ 0 \le s \le t) \vee \mathcal{N}(\mathbb{P})$

(ii) $(B2) \iff (B2.1) \quad B_t - B_s \perp\!\!\!\perp \tilde{\mathcal{F}}_s^B := \sigma(B_s :\ 0 \le s \le t) \quad \forall 0 \le s \le t$

(iii) Wenn $(B0), (B1)$ und $(B2.1)$ erfüllt sind, dann existiert eine Modifikation W von B mit den Eigenschaften

  (1) W ist adaptiert

  (2) W ist eine Brownsche Bewegung.

(iv) Die Existenz einer Bronwschen Bewegung ist noch nicht klar!

10.5 Definition. Ein SP X mit Werten in $\mathbb{R}$ heißt **Gauß-Prozess**, wenn

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \sim \mathcal{N}(\mu_{t_1,\dots,t_n}, \Sigma_{t_1,\dots,t_n}) \quad \forall 0 \le t_1 < \dots t_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

10.6 Satz. *Sei B eine Brownsche Bewegung. Dann ist $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ normalverteilt für alle $0 \le t_1 < \dots < t_n$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $\mu_{t_1,\dots,t_n} = 0$ und $\Sigma_{t_1,\dots,t_n} = (t_j \wedge t_i)_{i,j=1,\dots,n}$.*

Beweis. Es gilt $\mathbb{E}[B_t] = 0$ und

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}[B_t, B_s] &= \mathbb{E}[B_t B_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s)B_s + B_s^2] \\
&= \mathbb{E}[(B_t - B_s)B_s] + \mathbb{E}[B_s^2] = \mathbb{E}[B_t - B_s]\,\mathbb{E}[B_s] + s = s = t \wedge s.
\end{aligned}$$

Seien nun $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$. Dann gilt

$$\tilde{B} := \begin{pmatrix} B_{t_1} - B_{t_0} \\ B_{t_2} - B_{t_1} \\ \vdots \\ B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{t_1} \\ B_{t_2} \\ \vdots \\ B_{t_n} \end{pmatrix} =: AB$$

und weiter

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\exp(i\langle \xi, \tilde{B}\rangle)] &= \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}[\exp(i\xi_j(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})] \\ &= \prod_{j=1}^{n} \exp\left(-\frac{\xi_j^2(t_j - T_{j-1})}{2}\right) = \mathbb{E}[\exp(i\langle \xi, X\rangle)],\end{aligned}$$

wobei $X \sim \mathcal{N}(\underline{0}, \operatorname{diag}(t_1, t_2 - t_1, \dots, t_n - t_{n-1}))$. Schließlich gilt $|A| = 1$, d.h. A ist invertierbar, also ist $B = A^{-1}\tilde{B}$ und damit folgt

$$B \sim \mathcal{N}(0, \underbrace{A^{-1}\operatorname{diag}(t_1, t_2 - t_1, \dots, t_n - t_{n-1})(A^{-1})^T}_{=\ (t_j \wedge t_i)_{i,j=1,\dots,n}}).$$

□

10.7 Satz. *Sei X ein stetiger Gauß-Prozess derart, dass für alle $0 \le t_1 < \dots < t_n$*

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \sim \mathcal{N}(\underline{0}, (t_j \wedge t_i)_{i,j=1,\dots,n}).$$

Dann ist X eine Brownsche Bewegung.

Beweis. Sei $D := \operatorname{diag}(t_1, t_2 - t_1, \dots, t_n - t_{n-1})$ und A wie im vorherigen Beweis. Dann gilt

$$\tilde{X} := \begin{pmatrix} X_{t_1} \\ X_{t_2} - X_{t_1} \\ \vdots \\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_{t_1} \\ X_{t_2} \\ \vdots \\ X_{t_n} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(\underline{0}, \underbrace{A(t_j \wedge t_i)_{i,j}A^T}_{=\ D}),$$

da $\tilde{X}$ nach Voraussetzung normalverteilt ist. □

10.8 Satz. *Sei B eine Brownsche Bewegung. Dann sind folgende SP auch Brownsche Bewegungen:*

(a) $(-B_t)_{t\ge 0}$ *(Symmetrie)*

(b) $(cB_{\frac{t}{c^2}})_{t\ge 0}$ *für alle $c > 0$ (Scaling)*

(c) $(W_t)_{t\ge 0}$ *mit* $W_t := \begin{cases} tB_{\frac{1}{t}} & , t > 0 \\ 0 & , t = 0 \end{cases}$ *(Zeitinversion)*

(d) $(B_{t-s} - B_s)_{t\ge 0}$ *für alle $s > 0$ (Renewal).*

10.9 Korollar. *Sei B eine Brownsche Bewegung. Dann gilt*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = 0 \quad f.s.$$

Beweis. Es gilt
$$\lim_{t\to\infty}\frac{B_t}{t} = \lim_{t\to 0} tB_{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to 0} W_t = 0,$$
wobei W wie in Satz 11.8 definiert ist. □

10.10 Definition. Sei $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ eine Abbildung und sei $[a,b]\subset\mathbb{R}$ ein Intervall.

(i) Wir definieren die **totale Variation**
$$V_a^b f := \sup_{\pi\in\Pi}\sum_{j=1}^{n}|f(x_{j+1}-f(x_j)|,$$
wobei Π die Menge der Partitionen von $[a,b]$ ist, wir schreiben
$$\pi = \{a = x_0 < \ldots < x_n = b\}\in\Pi.$$

(ii) f heißt von **endlicher totaler Variation**, wenn $V_a^b f < \infty$ für alle $[a,b]\subset\mathbb{R}$.

10.11 Bemerkung. Ein Ziel der stochastischen Analysis ist es, einen Integralbegriff zu definieren, sodass für eine Brownsche Bewegung $B = (B_t)_{t\geq 0}$ das Integral
$$\int_0^t f(s)\,dB_s \tag{10.1}$$
für eine zumindest beschränkte Funktion $f\in C_b$ sinnvoll ist. Im klassischen Sinne (als Riemann-Stieltjes-Integral) ist (10.1) nicht definiert, da B nicht von endlicher Variation ist, d.h. B ist an keiner Stelle differenzierbar.

10.12 Satz. *Die Pfade der Brownschen Bewegung sind f.s. von unendlicher Variation, d.h. für eine Folge von Partitionen $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\Pi$ von $[0,T]$ mit $|\pi_n|\longrightarrow 0$ (wobei $|\pi| := \max_{1\leq j\leq n-1}|x_{j+1}-x_j|$) gilt*
$$\exists A\in\mathcal{F},\mathbb{P}[A]=1: \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{t_j\in\pi_n}|B_{t_{j+1}}(\omega)-B_{t_j}(\omega)| = \infty \quad \forall\omega\in A.$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage nur für die Folge (π_n) von Partitionen, definiert durch $\pi_n := \{Tk^{-n}: k = 0,\ldots,n\}$. Definiere dazu den SP $V = (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch
$$V_n := \sum_{i=0}^{2^n-1}|\underbrace{B_{\frac{T(i+1)}{2^n}} - B_{\frac{Ti}{2^n}}}_{\sim B_{\frac{T}{2^n}}\sim\mathcal{N}(0,\frac{T}{2^n})}|.$$

Dann gilt
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[V_n] &= \sum_{i=0}^{2^n-1}\mathbb{E}[|B_{\frac{T(i+1)}{2^n}} - B_{\frac{Ti}{2^n}}|] = \sum_{i=0}^{2^n-1}\mathbb{E}[|B_{\frac{T}{2^n}}|] = 2^n\,\mathbb{E}[|B_{\frac{T}{2^n}}|]\\ &\overset{10.8}{=} 2^n\sqrt{T}2^{-\frac{n}{2}}\,\mathbb{E}[|B_1|] = 2^{\frac{n}{2}}\sqrt{\frac{2T}{\pi}}\end{aligned}$$

und außerdem $\mathbb{V}[V_n] = T$. Sei nun $\lambda \in \mathbb{R}$. Aus der Tschebyscheff-Ungleichung folgt

$$\mathbb{P}[|V_n - 2^{\frac{n}{2}}\sqrt{\frac{2T}{\pi}}| \geq \lambda] \;\leq\; \frac{T}{\lambda^2}.$$

Setzen wir $\lambda := \frac{\sqrt{T}}{2} 2^{\frac{n}{2}}$, folgt also

$$\mathbb{P}[|V_n - 2^{\frac{n}{2}}\sqrt{\frac{2T}{\pi}}| \geq \frac{\sqrt{T}}{2}2^{\frac{n}{2}}] \;\leq\; \frac{4}{2^n}$$

bzw. durch Summieren auf beiden Seiten

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[|V_n - 2^{\frac{n}{2}}\sqrt{\frac{2T}{\pi}}| \geq \frac{\sqrt{T}}{2}2^{\frac{n}{2}}] \;\leq\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2^n} \;<\; \infty.$$

Nach dem Lemma von Borel-Cantelli gibt es daher ein $A \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}[A] = 1$, sodass

$$\forall \omega \in A\, \exists N(\omega) \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N(\omega): \quad 2^{\frac{n}{2}}\sqrt{T}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} - \frac{1}{2}\right) \;\leq\; V_n \;\leq\; 2^{\frac{n}{2}}\sqrt{T}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} + \frac{1}{2}\right),$$

d.h. $V_n \longrightarrow \infty$ f.s. □

10.12.1 Satz. *Sei $\pi := \{s = t_0 < \ldots < t_m = t\}$ eine Partition von $[s,t]$ und B eine BB. Setze*

$$S_\pi \;:=\; \sum_{k=0}^{m-1} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 \;.$$

Dann gilt

$$\lim_{|\pi| \to 0} S_\pi \;=\; t - s \quad \textit{in } L^2(\mathbb{P}) \;.$$

Beweis. Setze $\tau := t - s = \sum_{k=0}^{m-1}(t_{k+1} - t_k)$. Dann gilt

$$S_\pi - \tau = \sum_{k=0}^{m-1} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 - (t_{k+1} - t_k).$$

Aus der Unabhängigkeit von B folgt daraus

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(S_\pi - \tau)^2] \;&=\; \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{E}[((B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 - (t_{k+1} - t_k))^2] \\
&=\; \sum_{k=0}^{m-1} (t_{k+1} - t_k)^2 \underbrace{\mathbb{E}\left[\left(\frac{(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2}{t_{k+1} - t_k} - 1\right)^2\right]}_{=:\, c}.
\end{aligned}$$

Da $c > 0$ unabhängig von $k \in \mathbb{N}$ ist (wegen $\frac{B_{t_{k+1}} - B_{t_k}}{\sqrt{t_{k+1} - t_k}} \sim \mathcal{N}(0,1)$), folgt schließlich

$$\mathbb{E}[(S_\pi - \tau)^2] \;\leq\; c \max_{0 \leq j \leq m-1} |t_{j+1} - t_j| \sum_{k=0}^{m-1} |t_{k+1} - t_k| \;=\; c|\pi|(t - s) \;\longrightarrow\; 0 \quad (|\pi| \longrightarrow 0).$$

□

10.12.2 Korollar. *Sei B eine BB. Dann sind die Pfade von B f.s. von unendlicher Variation.*

Beweis. Sei $\pi := \{s = t_0 < \ldots < t_m = t\}$ eine Partition von $[s,t]$ und sei S_π wie im vorherigen Satz definiert. Dann gilt

$$\lim_{|\pi|\to 0} S_\pi = t - s \quad \text{in } L^2(\mathbb{P})$$

und weiter

$$0 \le S_\pi \le \max_{0\le j\le m-1} |B_{t_{j+1}} - B_{t_j}| \sum_{k=0}^{m-1} |B_{t_{k+1}} - B_{t_k}|.$$

Aus der Stetigkeit von B folgt

$$\lim_{|\pi|\to 0} \max_{0\le j\le m-1} |B_{t_{j+1}} - B_{t_j}| = 0.$$

Angenommen, die Pfade von B sind von endlicher Variation über $[s,t]$ für alle $\omega \in A$, wobei $A \in \mathcal{F}$ so ist, dass $\mathbb{P}[A] > 0$. Dann folgt daraus

$$\lim_{|\pi|\to 0} \sum_{k=0}^{m-1} |B_{t_{k+1}} - B_{t_k}| = 0$$

und damit

$$\lim_{|\pi|\to 0} S_\pi = t - s = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad t = s,$$

im Widerspruch zu $s < t$. Daraus folgt schließlich die Behauptung. □

Brownsche Bewegung in $\mathbb{R}^d$

10.13 Definition. Eine **d-dimensionale Brownsche Bewegung** ist ein SP $B = (B_t)_{t\ge 0}$ mit Werten in $\mathbb{R}^d$ mit den folgenden Eigenschaften:

(B0') $B_0 = 0$ f.s.

(B1') $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(\underline{0}, (t-s)I)$

(B2') $(B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ ist ua für alle $0 \le t_1 < \ldots < t_n$ und $n \in \mathbb{N}$

(B3') $t \mapsto B_t(\omega)$ ist stetig für alle $\omega \in \Omega$.

Bemerkung: Um Unabhängigkeit in $\mathbb{R}^d$ zu zeigen, ist es nützlich zu wissen, dass

$$X \perp\!\!\!\perp Y \overset{Def.}{\Leftrightarrow} \mathcal{F}_\infty^X \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_\infty^Y \Leftrightarrow (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \perp\!\!\!\perp (Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n}) \quad \forall 0 \le t_1 < \ldots < t_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

10.14 Satz. *Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein d-dimensionaler SP. Dann erfüllt X (B0')-(B2') genau dann, wenn*

$$\mathbb{E}[\exp(i\sum_{j=1}^{n}\langle\xi_j, X_{t_j} - X_{t_{j-1}}\rangle + i\langle\xi_0, X_{t_0}\rangle)] = \exp(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^2(t_j - t_{j-1})) \tag{10.2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < \ldots < t_n$, $\xi_0, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}^d$ gilt. Falls X zusätzlich stetig ist, ist X eine BB.

Beweis. Erfülle X die Eigenschaften (B0')-(B2'). Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[\exp(i\sum_{j=1}^{n}\langle\xi_j, X_{t_j} - X_{t_{j-1}}\rangle + i\langle\xi_0, X_{t_0}\rangle)] \\
\overset{(B0')+(B2')}{=} & \prod_{j=1}^{n}\mathbb{E}[\exp(i\langle\xi_j, X_{t_j} - X_{t_{j-1}}\rangle)] \\
\overset{(B1')}{=} & \prod_{j=1}^{n}\mathbb{E}[\exp(i\langle\xi_j, X_{t_j - t_{j-1}}\rangle)] \\
\overset{(B1')}{=} & \prod_{j=1}^{n}\mathbb{E}[\exp(-\frac{1}{2}|\xi_j|^2(t_j - t_{j-1}))] \\
= & \mathbb{E}[\exp(\sum_{j=1}^{n} -\frac{1}{2}|\xi_j|^2(t_j - t_{j-1}))].
\end{aligned}$$

Erfülle X nun die Gleichung (10.2). Sei $k \in \{1, \ldots, n\}$ und $\xi_j = 0$ für $j \neq k$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[\exp(i\langle\xi_k, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}\rangle)] = \exp(-\frac{1}{2}|\xi_k|^2(t_k - t_{k-1})),$$

d.h. (B1') ist erfüllt. Außerdem folgt $\mathbb{E}[\exp(i\langle\xi_0, X_0\rangle)] = 1$ aus (10.2), d.h. $X_0 = 0$ f.s. und (B3') ist erfüllt. Schließlich gilt offenbar auch (B2'), woraus die Behauptung folgt. □

10.15 Korollar. *Sei $(B^1, \ldots, B^d)$ eine d-dimensionale BB. Dann sind $(B^j)_{j=1,\ldots,d}$ ua 1-dimensionale BB.*

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $0 = t_0 < \ldots < t_n$. Da $B = (B^1, \ldots, B^d)$ eine d-dimensionale BB ist, ist nach Satz 10.14 die Gleichung (10.2) erfüllt. Setze $\xi_j := z_j e_k$, wobei $z_j \in \mathbb{R}$ und $e_k \in \mathbb{R}^d$ der k-te Einheitsvektor ist. Dann gilt

$$\langle\xi_j, B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\rangle = z_j(B^k_{t_j} - B^k_{t_{j-1}})$$

und daraus folgt

$$\exp(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} z_j^2(t_j - t_{j-1})) = \mathbb{E}[\exp(i\sum_{j=1}^{n}\langle\xi_j, B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\rangle)] = \mathbb{E}[\exp(i\sum_{j=1}^{n} z_j(B^k_{t_j} - B^k_{t_{j-1}}))],$$

d.h. B^k ist eine 1-dimensionale BB für alle $k = 1, \ldots, d$.
Um die Unabhängigkeit zu zeigen, bemerken wir zunächst

$$\{(B^k_{t_1}, \ldots, B^k_{t_n}) : \ 0 \le t_1 < \ldots < t_n,\ n \in \mathbb{N}\}_{k=1,\ldots,d} \ ua \ \Leftrightarrow \ (B^k_{t_l})_{k=1,\ldots,d} \ ua$$

und aus der Gleichheit $B^k_{t_l} = \sum_{j=1}^l (B^k_{t_j} - B^k_{t_{j-1}})$ folgt schließlich

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp(i\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^d \xi^k_j (B^k_{t_j} - B^k_{t_{j-1}}))] &= \exp(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^d (\xi^k_j)2(t_j - t_{j-1})) \\ &= \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^d \mathbb{E}[\exp(i\xi^k_j(B^k_{t_j} - B^k_{t_{j-1}}))], \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. □

10.16 Satz. *Ein d-dimensionaler SP* $(B^1, \ldots, B^d)$ *ist genau dann eine BB, wenn* $(B^j)_{j=1,\ldots,d}$ *ua* 1*-dimensionale BB sind.*

Beweis. Eine Richtung haben wir schon in Korollar 10.15 gezeigt.
Seien also $n \in \mathbb{N}, 0 \le t_0 < \ldots < t_n$ und $\xi^k_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$. Da $B = (B^1, \ldots, B^d)$ eine d-dimensionale BB ist, erfüllt B nach Satz 10.14 die Gleichheit (10.2) und daraus folgt

$$\mathbb{E}[\exp(i\sum_{j=1}^n \xi^k_j (B^k_{t_j} - B^k_{t_{j-1}}))] = \exp(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n (\xi^k_j)^2 (t_j - t_{j-1})).$$

Aus der Unabhängigkeit von $(B^j)_{j=1,\ldots,d}$ folgt die Behauptung. □

Konstruktion der Brownschen Bewegung

Vorbereitung:

1. $(L^2([0,1]), \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle_2 := \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$$

   und der Norm

$$\|f\|_2 := \left(\int_0^1 f(t)^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Zwei Funktionen $f, g \in L^2([0,1])$ sind orthogonal zueinander, wenn $\langle f, g\rangle_2 = 0$ gilt. Eine abzählbare Folge $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen in $L^2([0,1])$ heißt Orthonormalbasis (ONB), wenn

   (i) $\langle \psi_m, \psi_n\rangle_2 = \delta_{mn} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$

   (ii) $\operatorname{span}(\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ ist dicht in $L^2([0,1])$.

Sei $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine ONB und $f \in L^2([0,1])$. Dann ist f von der Form

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \psi_k \rangle_2 \psi_k,$$

d.h. es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \| f - \sum_{k=0}^{n} \langle f, \psi_k \rangle_2 \psi_k \|_2 = 0.$$

Da $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine ONB ist, gilt für $f, g \in L^2([0,1])$ die Parcevalsche Gleichung

$$\langle f, g \rangle_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \psi_k \rangle \langle g, \psi_k \rangle.$$

Konstruktion:

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine ONB von $L^2([0,1])$. Für unseren Ansatz wählen wir eine Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von iid standardnormalverteilten ZV (d.h. $Z_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$). Dann definieren wir einen SP $X = (X_t)_{0\le t\le 1}$ durch

$$X_t := \sum_{n=0}^{\infty} Z_n \int_0^t \psi_n(x)\, dx. \tag{10.3}$$

Wir werden zeigen, dass unter gewissen Voraussetzungen X eine Brownsche Bewegung ist. Dazu verfahren wir wie folgt:

1. Die Reihe (10.3) konvergiert,
2. X ist ein Gauß-Prozess,
3. $\mathbb{E}[X_t] = 0$ und $\mathrm{Cov}[X_t, X_s] = t \wedge s$,
4. $t \mapsto X_t(\omega)$ ist stetig für alle $\omega \in \Omega$.

Aus Satz 10.7 folgt dann, dass X eine BB ist.

Angenommen es gilt

$$\mathbb{E}[\sum_{n=0}^{\infty} Z_n \int_0^t \psi_n(x)\, dx] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[Z_n \int_0^t \psi_n(x)\, dx].$$

Dann folgt daraus

$$\mathbb{E}[X_t] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[Z_n] \int_0^t \psi_n(x)\, dx = 0$$

und außerdem

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}[X_t, X_s] &= \mathbb{E}[\sum_{n=0}^{\infty} Z_n \int_0^t \psi_n(x)\, dx \cdot \sum_{k=0}^{\infty} Z_k \int_0^s \psi_k(x)\, dx] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[Z_n Z_k] \int_0^t \psi_n(x)\, dx \int_0^s \psi_k(x)\, dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle \mathbb{1}_{[0,t]}, \psi_n \rangle_2 \langle \mathbb{1}_{[0,s]}, \psi_n \rangle_2 \\ &= \langle \mathbb{1}_{[0,t]}, \mathbb{1}_{[0,s]} \rangle_2 = \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,t\wedge s]}(x)\, dx = t \wedge s. \end{aligned}$$

Für weitere Überlegungen benötigen wir die folgende Definition:

10.17 Definition.

(i) Sei $\psi \in L^2([0,1])$ und definiere

$$\mathcal{T}_\psi \ := \ \{\psi_{jk}(t) := 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j t - k) : \ t \in [0,1], \, j \in \mathbb{N}, \, k = 0, \dots, 2^j - 1\}.$$

Falls $\mathcal{T}_\psi \subseteq L^2([0,1])$ eine ONB ist, heißt ψ ein **Wavelet**.

(ii) Setze $\psi(t) := \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2})}(t) - \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}(t)$. Dann heißt ψ ein **Haar-Wavelet** und $\mathcal{T}_\psi$ eine **Haar-Basis**.

Bemerkung:

(i) Der Beweis, dass $\mathcal{T}_\psi$, wobei ψ ein Haar-Wavelet ist, tatsächlich eine ONB ist, findet man in *Wojtaszczyk: A mathematical introduction to wavelets* (1997, Kapitel 1, Paragraph 1).

(ii) Durch eine Umparametrisierung

$$n := 2^j + k, \quad H_0(t) := 1, \quad H_n(t) := \psi_{jk}(t)$$

erhält man die ONB $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und vermeidet so Doppelindizes.

(iii) Lässt man in Definition 10.17 für $\mathcal{T}_\psi$ die Indizes $j, k \in \mathbb{Z}$ zu, so erhält man eine ONB auf $L^2(\mathbb{R})$, für $j \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$ erhält man eine ONB auf $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Sei nun $\mathcal{T}_\psi$ eine Haar-Basis. Dann gilt

$$\psi_{jk}(t) \ = \ 2^{\frac{j}{2}}(\mathbb{1}_{[\frac{k}{2^j}, \frac{2k+1}{2^{j+1}})}(t) - \mathbb{1}_{[\frac{2k+1}{2^{j+1}}, \frac{k+1}{2^j})}(t))$$

und

$$\{\psi_{jk} \neq 0\} \ = \ [\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}].$$

Daraus folgt

$$|H_n(t)| \ \leq \ 2^{\frac{j}{2}}.$$

Definieren wir außerdem die sogenannten Schauder-Funktionen

$$\phi_{jk}(t) \ := \ \int_0^t \psi_{jk}(x)\, dx,$$

dann erhalten wir

$$|\sum_{k=0}^{2^j-1} \int_0^t \psi_{jk}(x)\, dx| \ \leq \ \frac{1}{2} 2^{-\frac{j}{2}}.$$

Damit können wir schließlich folgendes Lemma formulieren:

10.18 Lemma. *Sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von iid standardnormalverteilten ZV. Dann gilt*

$$\exists C = C(\omega), \, \mathbb{P}[C < \infty] = 1 : \quad |Z_n| \ \leq \ C\sqrt{\ln n} \quad \forall n \geq 2.$$

Beweis. Sei $x \geq 1$. Dann gilt

$$\mathbb{P}[|Z_n| \geq x] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp(-\frac{u^2}{2})\, du \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^\infty u \exp(-\frac{u^2}{2})\, du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}),$$

d.h. für $n \geq 2$ und $\alpha > 1$ gilt

$$\mathbb{P}[|Z_n| \geq \underbrace{\sqrt{2\alpha \ln n}}_{\geq 1}] \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp(-\alpha \ln n) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} n^{-\alpha}$$

und daraus folgt

$$\sum_{n=2}^\infty \mathbb{P}[|Z_n| \geq \sqrt{2\alpha \ln n}] \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=2}^\infty n^{-\alpha} < \infty.$$

Aus dem Lemma von Borel-Cantelli folgt schließlich

$$\mathbb{P}[|Z_n| \geq \sqrt{2\alpha \ln n} \text{ u.o.}] = 0.$$

Setzen wir $C := \sup_{n\geq 2} |Z_n| \cdot (\ln n)^{-\frac{1}{2}}$, dann ist $C < \infty$ f.s. und damit ist die Behauptung gezeigt. □

10.19 Satz. *Sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von iid standardnormalverteilten ZV und sei $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Haar-Basis von $L^2([0,1])$. Dann konvergiert die Reihe*

$$B_t := \sum_{n=0}^\infty Z_n \int_0^t H_n(x)\, dx, \quad t \in [0,1]$$

f.s. gleichmäßig auf $[0,1]$. Der SP $B = (B_t)_{0\leq t\leq 1}$ ist eine BB.

Beweis. Sei $J \in \mathbb{N}$ und $M \geq 2^J$. Aus Lemma 10.18 folgt dann

$$\begin{aligned}\sum_{n=M}^\infty |Z_n| \int_0^t H_n(x)\, dx &\leq C \sum_{n=M}^\infty \sqrt{\ln n}\, |\int_0^t H_n(x)\, dx| \\ &\leq C \sum_{j=J}^M \sqrt{j+1}\, 2^{-\frac{j}{2}} \xrightarrow{J\to\infty} 0 \quad \forall t \in [0,1].\end{aligned}$$

Setze $B_t^N := \sum_{n=0}^N Z_n \int_0^t H_n(x)\, dx$. Dann sind die Abbildungen $t \mapsto B_t^N(\omega)$ stetig für alle $\omega \in \Omega$. Da außerdem $(B_t^N)_{N\in\mathbb{N}}$ f.s. gleichmäßig gegen B_t konvergiert, folgt auch die Stetigkeit der Abbildungen $t \mapsto B_t(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$. Weiter ist B ein Gauß-Prozess, denn für $0 \leq t_1 < \ldots < t_n \leq 1$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\exp(i \sum_{k=1}^n \xi_k B_{t_k})] &= \mathbb{E}[\exp(i \sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^n \xi_k Z_j \int_0^{t_k} h_j(x)\, dx)] \\ &= \prod_{j=1}^\infty \mathbb{E}[\exp(i \sum_{k=1}^n \xi_k Z_j \int_0^{t_k} H_j(x)\, dx)] \\ &= \prod_{j=1}^\infty \exp(-\frac{1}{2}(\sum_{k=1}^n \xi_k \int_0^{t_k} H_j(x)\, dx)^2) \\ &= \exp(-\frac{1}{2} \underbrace{\sum_{j=1}^\infty (\sum_{k=1}^n \xi_k \int_0^{t_k} H_j(x)\, dx)^2)}_{=:\, I}\end{aligned}$$

(wobei benutzt wurde $Z_j \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow a \cdot Z_j \sim \mathcal{N}(0,a^2)$). Weiter gilt

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k \int_0^{t_k} H_j(x)\,dx \right)^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \langle_2 \xi_k \mathbb{1}_{[0,t_k)}, H_j \rangle_2 \langle \xi_l \mathbb{1}_{[0,t_l)}, H_j \rangle_2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \xi_k \xi_l \langle \mathbb{1}_{[0,t_k)}, \mathbb{1}_{[0,t_l)} \rangle_2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \xi_k \xi_l (t_l \wedge t_k).
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\mathbb{E}[\exp(i \sum_{k=1}^{n} \xi_k B_{t_k})] = \exp(-\frac{1}{2} \xi^T (t_k \wedge t_j)_{j,k} \xi)$$

und aus Satz 8.8. folgt schließlich $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}) \sim \mathcal{N}(\underline{0}, (t_k \wedge t_j)_{j,k})$. Gemäß Satz 10.7 ist B schließlich eine BB auf $[0,1]$. $\square$

Bemerkung: Wir haben die Brownsche Bewegung nur auf dem Intervall $[0,1]$ konstruiert. Durch Verschiebung und stetiges „Verkleben“ erhält man aber leicht eine Brownsche Bewegung auf ganz $\mathbb{R}_+$.

Kapitel 11

Brownsche Bewegung bezüglich einer Filtration

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Wir wiederholen zunächst einen Satz aus der Wahrscheinlichkeitstheorie:

11.1 Satz (Zusammenfassen von ua σ-Algebren)**.** *Sei $(E_i)_{i\in I}$, $E_i \subseteq \mathcal{F}$, eine ua Familie von $\cap$-stabilen Mengen und sei $(I_j)_{j\in J}$ eine Zerlegung von I in paarweise disjunkte Mengen I_j. Setze $\mathcal{A}_j := \sigma(\bigcup_{i\in I_j} E_i)$. Dann ist $(\mathcal{A}_j)_{j\in J}$ ua.*

Beweis. siehe *Bauer: Wahrscheinlichkeitstheorie*, Satz 6.5. □

11.2 Definition. Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein SP mit Werten in $\mathbb{R}^d$ und sei $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration.

(i) X besitzt **unabhängige Zuwächse**, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 = t_0 < \ldots < t_n$ der Vektor $(X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ ua ist.

(ii) X besitzt **unabhängige Zuwächse bzgl. einer Filtration** $\mathbb{F}$, wenn

(1) X ist adaptiert

(2) $X_t - X_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s \quad \forall 0 \leq s < t$.

Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein SP. Dann definieren wir folgende Filtrationen:

(i) $\tilde{\mathbb{F}}^X := (\tilde{\mathcal{F}}_t^X)_{t\geq 0}$, wobei $\tilde{\mathcal{F}}_t^X := \sigma(X_s : s \leq t)$

(ii) $\tilde{\mathbb{F}}_+^X := (\tilde{\mathcal{F}}_{t+}^X)_{t\geq 0}$, wobei $\tilde{\mathcal{F}}_{t+}^X := \bigcap_{\varepsilon>0} \tilde{\mathcal{F}}_{t+\varepsilon}^X$

(iii) $\mathbb{F}^X := (\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$, wobei $\mathcal{F}_t^X := \tilde{\mathcal{F}}_{t+}^X \vee \mathcal{N}(\mathbb{P})$.

Hierbei gilt die Teilmengenbeziehung $\tilde{\mathbb{F}}^X \subset \tilde{\mathbb{F}}_+^X \subset \mathbb{F}^X$.

11.3 Satz. *Sei X ein SP. Dann gilt*

(a) Besitzt X ua Zuwächse bzgl. $\mathbb{F}$, dann besitzt X ua Zuwächse.

(b) X besitzt genau dann ua Zuwächse bzgl. $\tilde{\mathbb{F}}^X$, wenn X ua Zuwächse besitzt.

Beweis.

(a) Besitze X ua Zuwächse bzgl. $\mathbb{F}$- Wir beweisen Die Aussage durch vollständige Induktion:

IA: Für $n = 1$ gilt offenbar $X_{t_1} - X_{t_0} \perp\!\!\!\perp \mathbb{F}_{t_0}$. Daraus folgt die Unabhängigkeit von $(X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0})$, da X_{t_0} $\mathcal{F}_{t_0}$-mb ist, d.h. $\sigma(X_{t_0}) \subseteq \mathcal{F}_{t_0}$.

IV: Sei $(X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ ua.

IS: Nach Voraussetzung gilt $X_{t_{n+1}} - X_{t_n} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_{t_n}$ und wegen $\sigma(X_{t_0}, \ldots, X_{t_n}) \subseteq \mathcal{F}_{t_n}$ gilt auch $X_{t_{n+1}} - X_{t_n} \perp\!\!\!\perp \sigma(X_{t_0}, \ldots, X_{t_n})$. Nach Induktionsvoraussetzung ist damit $(X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_{n+1}} - X_{t_n})$ ua.

(b) Für $0 = t_0 < \ldots < t_n = s \le t$ gilt

$$X_t - X_s \perp\!\!\!\perp \sigma(X_{t_0}, \ldots, X_{t_n}) \overset{(*)}{=} \sigma(X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$$

(Zu $(*)$: X_{t_j} lässt sich schreiben als $X_{t_j} = \sum_{k=1}^{j}(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) + X_{t_0}$).

Aus Satz 11.1 folgt damit

$$\bigcup_{0=t_0<\ldots<t_n=s} \sigma(X_{t_0}, \ldots, X_{t_n}) \perp\!\!\!\perp X_t - X_s,$$

d.h. $X_t - X_s \perp\!\!\!\perp \tilde{\mathcal{F}}_s^X$.

□

11.4 Definition. Sei $\mathbb{F}$ eine Filtration. Eine **Brownsche Bewegung bzgl.** $\mathbb{F}$ ist ein SP $B = (B_t)_{t\ge0}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(B0") $B_0 = 0$ f.s.

(B1") $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$

(B2") B besitzt ua Zuwächse bzgl. $\mathbb{F}$

(B3") $t \mapsto B_t(\omega)$ ist stetig für alle $\omega \in \Omega$.

Kurz: B ist eine $\mathbb{F}$-BB / $(B_t, \mathcal{F}_t)_{t\ge0}$ ist eine BB / $(B, \mathbb{F})$ ist eine BB.

Bemerkung: Für einen SP $X = (X_t)_{t\ge0}$ gilt folgende Äquivalenz:

$$X \text{ ist } \mathbb{F}\text{-adaptiert} \overset{Def.}{\Leftrightarrow} X_t \text{ ist } \mathcal{F}_t\text{-mb } \forall t \ge 0 \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{F}}_t^X \subseteq \mathcal{F}_t \forall t \ge 0.$$

11.5 Lemma. *Sei $(B, \mathbb{F})$ eine BB. Dann ist B eine BB.*

Beweis. Folgt aus Satz 11.3. □

11.6 Satz. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) B *ist eine BB.*

(ii) $(B, \tilde{\mathbb{F}}^B)$ *ist eine BB.*

(iii) $(B, \mathbb{F}^B)$ *ist eine BB.*

Beweis.
$(i) \Leftrightarrow (ii)$: Folgt aus Satz 11.3.
$(iii) \Rightarrow (ii)$: klar wegen $\tilde{\mathbb{F}}^B \subseteq \mathbb{F}^B$
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Der Beweis erfolgt in zwei Schritten:
Schritt 1: $B_{t+s} - B_t \perp\!\!\!\perp \tilde{\mathcal{F}}^B_{t+}$ $\forall s,t \geq 0$
Sei $t \geq 0$ und $A \in \tilde{\mathcal{F}}^B_{t+} = \bigcup_{\varepsilon>0} \tilde{\mathcal{F}}^B_{t+\varepsilon}$. Setze $\xi := \mathbb{1}_A$. Dann ist ξ $\tilde{\mathcal{F}}^B_{t+\frac{1}{n}}$-mb für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gilt für alle $s \geq 0$ wegen (ii)

$$\xi \perp\!\!\!\perp B_{t+\frac{1}{n}+s} - B_{t+\frac{1}{n}}.$$

Setze nun $\eta_n := B_{t+\frac{1}{n}+s} - B_{t+\frac{1}{n}}$ und $\eta := B_{t+s} - B_t$. Dann folgt

$$\varphi_{(\eta,\xi)}(u,v) = \varphi_{\eta_n}(u) \cdot \varphi_\xi(v) \quad \forall u,v \in \mathbb{R},$$

wobei $\varphi_Z(u) := \mathbb{E}[\exp(i\langle \xi, Z\rangle)]$. Weiter gilt (da B stetige Pfade besitzt)

$$\eta_n \Longrightarrow \eta \quad \text{und} \quad (\eta_n, \xi) \Longrightarrow (\eta, \xi).$$

Daraus folgt

$$\varphi_{\eta_n}(u) \longrightarrow \varphi_\eta(u) \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \varphi_{(\eta_n,\xi)}(u,v) \longrightarrow \varphi_{(\eta,\xi)}(u,v) \quad \forall u,v \in \mathbb{R}.$$

Also ist $\eta \perp\!\!\!\perp \xi$ für alle $\xi \in \tilde{\mathcal{F}}^B_{t+\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$ und schließlich folgt

$$B_{t+s} - B_t \perp\!\!\!\perp \tilde{\mathcal{F}}^B_{t+}. \tag{11.1}$$

Schritt 2: $B_{t+s} - B_t \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}^B_t$ $\forall s,t \geq 0$
Sei $A \in \mathcal{F}^B$. Dann gibt es nach Definition von $\mathbb{F}^B$ ein $\tilde{A} \in \mathcal{F}^B_{t+}$ und $N \in \mathcal{N}(\mathbb{P})$, sodass $A = \tilde{A} \cup N$ gilt. Damit gilt auch $\tilde{A} \perp\!\!\!\perp B_{t+s} - B_t$ für alle $s,t \geq 0$ und die Behauptung folgt aus Schritt 1. □

Bemerkung: Im Beweis des Satzes 11.6 in (11.1) wurde Folgendes verwendet:
Sei X eine ZV und $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra. Dann gilt

$$X \perp\!\!\!\perp \xi \quad \xi\ \mathcal{F}\text{-mb} \Rightarrow X \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}.$$

Beweis. Setze $E := \{\mathbb{1}_A : A \in \mathcal{F}\}$. Dann ist E ein multiplikationsstabiler Erzeuger von $\mathcal{F}$ und aus einer modifizierten Version von Satz 11.1 folgt die Behauptung.

Martingaleigenschaft der Brownschen Bewegung

Sei $(B, \mathbb{F})$ eine BB. dann ist B ein Martingal bzgl. $\mathbb{F}$, denn:

(i) adaptiert: klar per Definition

(ii) integrierbar: klar wegen $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$ $\forall t \geq 0$

(iii) Martingaleigenschaft: Es gilt

$$\mathbb{E}[B_t \,|\mathcal{F}_s] \;=\; \mathbb{E}[B_t - B_s + B_s \,|\mathcal{F}_s] \;=\; E[B_t - B_s] + B_s \;=\; B_s.$$

Weiter gilt wegen $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$, dass $|B_t|^p \in L^1(\mathbb{P})$ für alle $t \geq 0$ und $p \in [0, \infty)$. Mit der Jensen-Ungleichung erhalten wir somit für $s \leq t$

$$|B_s|^p \;=\; |\,\mathbb{E}[B_t \,|\mathcal{F}_s]\,|^p \;\leq\; \mathbb{E}[|B_t|^p \,|\mathcal{F}_s],$$

d.h. $|B|^p := (|B_t|^p)_{t \geq 0}$ ist ein Submartingal. Nun lässt sich analog zum diskreten Fall eine Martingalungleichung für die Brownsche Bewegung formulieren:

11.7 Satz (Doobs L^p-Ungleichung)**.** *Sei $b = (B_t)_{t \geq 0}$ eine BB. Dann gilt*

$$\mathbb{E}[\sup_{0 \leq s \leq t} |B_s|^p] \;\leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{E}[|B_s|^p] \;=\; \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|B_t|^p] \quad \forall t \geq 0,\, p \in (1, \infty).$$

Beweis. Sei $t \geq 0$ und setze $\pi_n := \{\frac{tk}{2^n} :\; k = 1, \ldots, 2^n\}$. Dann gilt

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{s \in \pi_n} B_s \;=\; \sup_{0 \leq s \leq t} B_t \tag{11.2}$$

und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt gemäß Doobs L^p-Ungleichung im diskreten Fall

$$\mathbb{E}[\sup_{s \in \pi_n} |B_s|^p] \;\leq\; \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{s \in \pi_n} \mathbb{E}[|B_s|^p] \;\leq\; \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|B_t|^p]$$

bzw.

$$\liminf_{n \to \infty} \mathbb{E}[\sup_{s \in \pi_n} |B_s|^p] \;\leq\; \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|B_t|^p]. \tag{11.3}$$

Aus dem Lemma von Fatou folgt schließlich

$$\mathbb{E}[\sup_{0 \leq s \leq t} |B_s|^p] \overset{(11.2)}{=} \mathbb{E}[\liminf_{n \to \infty} \sup_{s \in \pi_n} |B_s|^p] \;\leq\; \liminf_{n \to \infty} \mathbb{E}[\sup_{s \in \pi_n} |B_s|^p] \overset{(11.3)}{\leq} \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|B_t|^p].$$

□

(Starke) Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung

Sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine BB und definiere den SP $W^a = (W_t^a)_{t\geq 0}$ $(a > 0)$ durch

$$W_t^a \;:=\; B_{t+a} - B_a.$$

Dann folgt aus Satz 10.8, dass W^a eine BB ist. Für eine BB $(B, \mathbb{F})$ gilt außerdem, dass der SP $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$, definiert durch

$$Z_t \;:=\; \exp\left(iuB_t + \frac{u^2}{2}t\right) \quad (u \in \mathbb{R}), \tag{11.4}$$

ein $\mathbb{F}$-Martingal ist, denn für $s \leq t$ gilt (Adaptiertheit und Int'barkeit sind klar)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_t \,|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[\exp(iu(B_t - B_s) + \frac{u^2}{2}(t-s))\,|\mathcal{F}_s]\,Z_s \\
&= \mathbb{E}[\exp(iu(B_t - B_s))\,|\mathcal{F}_s]\exp(\frac{u^2}{2}(t-s))\,Z_s \\
&= \mathbb{E}[\exp(iu(B_t - B_s))]\exp(\frac{u^2}{2}(t-s))\,Z_s \\
&= \exp(-\frac{u^2}{2}(t-s))\exp(\frac{u^2}{2}(t-s))\,Z_s \\
&= Z_s.
\end{aligned}$$

11.8 Satz. *Sei $(B, \mathbb{F})$ eine BB. Dann ist $(W^a, \mathbb{F}^a)$ eine BB, wobei $\mathbb{F}^a = (\mathcal{F}_t^a)_{t\geq 0}$ definiert ist durch $\mathcal{F}_t^a := \mathcal{F}_{t+a}$. Außerdem gilt*

$$W^a \;\perp\!\!\!\perp\; \mathcal{F}_a \qquad \textit{(d.h. } \tilde{\mathcal{F}}_\infty^{W^a} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_a \textit{).}$$

Beweis. Sei Z definiert wie in (11.4). Dann ist Z ein $\mathbb{F}$-Martingal, d.h.

$$\mathbb{E}[\exp(iuB_{t+a} + \frac{u^2}{2}(t+a))\,|\mathcal{F}_a] \;=\; \exp(iB_a + \frac{u^2}{2}a)$$

und damit gilt für alle $u \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[\exp(iu(B_{t+a} - B_a))\,|\mathcal{F}_a] \;=\; \exp(\frac{u^2}{2}a - \frac{u^2}{2}(a+t)) \;=\; \exp(-\frac{u^2}{2}t),$$

also folgt $B_{t+a} - B_a \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_a$. Damit erhalten wir mit vollständiger Induktion (wie in Satz 11.3) für $0 = t_0 < \ldots < t_n$

$$\underbrace{(B_{t_1+a} - B_a, B_{t_2+a} - B_{t_1+a}, \ldots, B_{t_n+a} - B_{t_{n-1}+a})}_{= \;(W_{t_1}^a, W_{t_2}^a - W_{t_1}^a, \ldots, W_{t_n}^a - W_{t_{n-1}}^a)} \;\perp\!\!\!\perp\; \mathcal{F}_a,$$

d.h. es gilt $W^a \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_a$. $\square$

Bemerkung: Im Beweis von Satz 11.8 haben wir Folgendes verwendet:
Sei X eine ZV und $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra. Falls $\mathbb{E}[\exp(iuX)\,|\mathcal{F}]$ deterministisch ist, so gilt $X \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $X \perp\!\!\!\perp \xi$ für alle $\mathcal{F}$-mb ZV ξ gilt. Sei also ξ $\mathcal{F}$-mb. Dann gilt für alle $u, v \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[\exp(iu\xi + ivX)] = \mathbb{E}[\exp(iu\xi)\,\mathbb{E}[\exp(ivX)\,|\mathcal{F}]] = \mathbb{E}[\exp(iu\xi)] \cdot \mathbb{E}[\exp(ivX)],$$

d.h. es gilt $X \perp\!\!\!\perp \xi$, woraus die Behauptung folgt.

11.9 Korollar. *Die Brownschen Bewegungen $B = (B_t)_{0 \le t \le a}$ und W^a sind ua.*

Beweis. Nach Satz 11.8 gilt

$$\tilde{\mathcal{F}}_\infty^B = \sigma(B_t :\ 0 \le t \le a) \subseteq \mathcal{F}_a \perp\!\!\!\perp \tilde{\mathcal{F}}_\infty^{W^a}.$$

□

Bemerkung: Für einen SP X gilt

$$X \text{ ist } \mathbb{F}\text{-adaptiert} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\mathbb{F}}^X \subseteq \mathbb{F}.$$

Interpretation der Markoveigenschaft:

Wir haben gezeigt, dass $B = (B_t)_{0 \le t \le a}$ und W^a ua Brownsche Bewegungen sind. Außerdem gilt für alle $t \ge 0$

$$B_{t+a} = (B_{t+a} - B_a) + B_a = \underbrace{W_t^a}_{\perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_a} + \underbrace{B_a}_{\perp\!\!\!\perp W_t^a},$$

d.h. anstatt von B_0 aus zu starten und bis B_{t+a} in $t+a$ Zeiteinheiten voranzuschreiten, können wir ebenso von B_0 bis B_a in a Zeiteinheiten und dann von B_a bis B_{t+a} in t Zeiteinheiten voranschreiten durch Anwendung von W^a.

Um nun die starke Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung zeigen zu können, benötigen wir Stoppzeiten in stetiger Zeit, welche sich völlig analog zum diskreten Fall definieren lassen. Wir definieren außerdem für einen SP X und eine SZ T

$$X_T(\omega) := \begin{cases} X_{T(\omega)}(\omega) & , \text{ auf } \{T < \infty\} \\ \lim_{t\to\infty} X_t(\omega) & , \text{ auf } \{T = \infty\} \cap \{\lim_{t\to\infty} X_t \text{ existiert}\} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}.$$

11.10 Satz (Doob's Optional Sampling)**.** *Sei X ein $\mathbb{F}$-Martingal und seien T, S f.s. beschränkte SZ. Dann sind X_T und X_S integrierbar und es gilt*

$$\mathbb{E}[X_T\,|\mathcal{F}_S] = X_{T \wedge S}.$$

11.11 Satz (Starke Markoveigenschaft)**.** *Sei $(B,\mathbb{F})$ eine BB und T eine f.s. endliche SZ. Dann gilt*

$$B_{T+t} - B_t \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_T \quad \forall t \geq 0.$$

Außerdem sit $W^T = (W_t^T)_{t\geq 0}$, definiert durch $W_t^T := B_{T+t} - B_T$, eine $\mathbb{F}^T$-BB für $\mathbb{F}^T = (\mathcal{F}_t^T)_{t\geq 0}$, definiert durch $\mathcal{F}_t^T := \mathcal{F}_{T+t}$, und es gilt

$$\tilde{\mathcal{F}}_\infty^{W^T} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_T.$$

Beweis. Schritt 1: $B_{T+t} - B_T \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_T$
Sei T eine f.s. endliche SZ. Der durch (11.4) definierte SP Z ist bekanntlich ein $\mathbb{F}$-Martingal, d.h. nach Doob's Optional Sampling gilt

$$\mathbb{E}[Z_{T+t}|\mathcal{F}_T] = Z_T \quad \forall t \geq 0$$

und daraus folgt

$$\mathbb{E}[\exp(iu(B_{T+t} - B_T))|\mathcal{F}_T] = \exp(\frac{u^2}{2}T - \frac{u^2}{2}(T+t)) = \exp(-\frac{u^2}{2}t), \tag{11.5}$$

also erhalten wir $B_{T+t} - B_T \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_T$ und $B_{T+t} - B_T \sim \mathcal{N}(0,1)$.
Betrachte nun die SZ $T \wedge n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $T \wedge n$ beschränkt (nämlich durch n). Weiter gilt für $A \in \mathcal{F}_T$

$$A \cap \{T \leq n\} \subseteq \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{T\wedge n}$$

und daraus folgt für alle $u, v \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[\exp(iu\mathbb{1}_{A\cap\{T\leq n\}} + iv(B_{T\wedge n+t} - B_{T\wedge n}))] \\ \overset{(11.5)}{=} &\mathbb{E}[\exp(iu\mathbb{1}_{A\cap\{T\leq n\}})] \cdot \mathbb{E}[\exp(iv(B_{T\wedge n+t} - B_{T\wedge n}))]. \end{aligned}$$

Mit dominierter Konvergenz erhalten wir schließlich für $n \to \infty$

$$\mathbb{E}[\exp(iu\mathbb{1}_A + iv(B_{T+t} - B_T))] = E[\exp(iu\mathbb{1}_A)] \cdot \mathbb{E}[\exp(iv(B_{T+t} - B_T))]. \tag{11.6}$$

Da $\mathcal{E} := \{\mathbb{1}_A : A \in \mathcal{F}_T\}$ multiplikationsstabil ist und wegen (11.6) gilt $W_t^T \perp\!\!\!\perp \mathcal{E}$, folgt aus Satz 11.1

$$B_{T+t} - B_T = W_t^T \perp\!\!\!\perp \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{F}_T.$$

Schritt 2: W^T ist $\mathbb{F}^T$-Martingal und $\tilde{\mathcal{F}}_\infty^{W^T} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_T$
Setzen wir in (11.5) $A = \Omega$ ein, so erhalten wir für $u \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$

$$\underbrace{\mathbb{E}[\exp(iu(B_{T\wedge n+t} - B_{T\wedge n}))]}_{\longrightarrow\ \mathbb{E}[\exp(iu(B_{T+t}-B_T))]} = \exp(-\frac{u^2}{2}t),$$

d.h. es gilt $B_{T+t} - B_T \sim \mathcal{N}(0,1)$ für T f.s. endlich. Außerdem gilt offenbar $W_0^t = 0$ und weiter für alle $s, t \geq 0$

$$W_t^T - W_s^T = B_{T+t} - B_{T+s} \overset{t=u+s}{=} B_{T+s+u} - B_{T+s} \overset{\tau=T+s}{=} B_{\tau+u} - B_\tau \sim \mathcal{N}(0,u) = \mathcal{N}(0,t-s).$$

Analog erhalten wir $W_t^T - W_s^T \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s^T$, d.h. W^T ist ein $\mathbb{F}$-Martingal (Stetigkeit und Adapthiertheit sind klar) und mit vollständiger Induktion folt schließlich auch

$$\tilde{\mathcal{F}}_\infty^{W^T} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_T.$$

□

Weitere Eigenschaften der Brownschen Bewegung

Sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine $\mathbb{F}$-BB. Dann definieren wir für $b \in \mathbb{R}$ die sogenannte Trefferzeit

$$\tau_b := \inf\{t \geq 0 : B_t = b\}.$$

Man kann zeigen, dass τ_b eine f.s. endliche SZ ist, womit wir folgenden Satz erhalten:

11.12 Satz (Reflexionsprinzip)**.** *Sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine BB. Dann gilt für $b, t \geq 0$*

$$\mathbb{P}[\tau_b \leq t] = 2\,\mathbb{P}[B_t \geq b].$$

Beweis. Für $b, t \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\tau_b \leq t,\, B_t < b] &= \mathbb{P}[\underbrace{\tau_b \leq t}_{\in \mathcal{F}_{\tau_b}},\, \underbrace{B_t - B_{\tau_b} < 0}_{\in \tilde{\mathcal{F}}^{W^{\tau_b}}_{\infty}}] \\
(t = u + \tau_b) &\overset{11.8}{=} \mathbb{P}[\tau_b \leq t]\,\mathbb{P}[\underbrace{B_{\tau_b+u} - B_{\tau_b}}_{\sim B_u} < 0] \\
&= \mathbb{P}[\tau_b \leq t]\,\mathbb{P}[B_u < 0] = \frac{1}{2}\mathbb{P}[\tau_b \leq t]
\end{aligned}$$

und damit schließlich

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\tau_b \leq t] &= \mathbb{P}[\tau_b \leq t,\, B_t \geq b] + \mathbb{P}[\tau_b \leq t,\, B_t < b] \\
&= \mathbb{P}[\underbrace{\tau_b \leq t}_{\supseteq \{B_t \geq b\}},\, B_t \geq b] + \frac{1}{2}\mathbb{P}[\tau_b \leq t] \\
&= \mathbb{P}[B_t \geq b] + \frac{1}{2}\mathbb{P}[\tau_b \leq t].
\end{aligned}$$

□

11.13 Definition. Sei X eine ZV mit Dichte f.

(i) X heißt **halb-normalverteilt** mit Varianz σ^2, wenn

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (x > 0),$$

kurz: $X \sim \frac{1}{2}\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

(ii) S heißt **invers-normalverteilt** oder **Wald-verteilt**, wenn

$$f(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}}\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2x}\right) \quad (x > 0),$$

kurz: $X \sim W(\lambda)$.

Seien nun $M_t := \sup_{0\le s\le t} B_s$ und $m_t := \inf_{0\le s\le t} B_s$. Dann gilt offenbar für $b, t \ge 0$

$$\{\tau_b \le t\} = \{M_t \ge b\} \tag{11.7}$$

und weiter:

11.14 Satz. *Sei $(B, \mathbb{F})$ eine BB. Dann gilt*

$$\tau_b \sim W(|b|)$$

und außerdem

$$M_t \sim |B_t| \sim -m_t \sim M_t - B_t \sim B_t - m_t \sim \frac{1}{2}\mathcal{N}(0,t).$$

Beweis. Wegen Satz 11.9 und (11.7) gilt

$$\mathbb{P}[M_t \ge b] = \mathbb{P}[\tau_b \le t] = 2\,\mathbb{P}[B_t \ge b]$$

und daraus folgt

$$\mathbb{P}[M_t \le b] = 1 - \mathbb{P}[M_t \ge b] = 1 - 2\,\mathbb{P}[B_t \le b] = \mathbb{P}[|B_t| \le b].$$

Weiter gilt offenbar $m_t = -\sup_{0\le s\le t}(-B_s) \sim -M_t$ und, da $(B_{a-t} - B_a)_{0\le t\le a}$ eine BB ist

$$M_t - B_t = \sup_{0\le s\le t}(B_s - B_t) = \sup_{0\le s\le t}(B_{t-s} - B_t) \sim \sup_{0\le s\le t} B_s = M_t$$

bzw.

$$M_t - B_t \sim B_t - m_t.$$

Schließlich lässt sich leicht nachrechnen, dass

$$\mathbb{P}[|B_t| \le x] = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^x \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) dt$$

gilt, d.h. $|B_t| \sim \frac{1}{2}\mathcal{N}(0,t)$. □

11.15 Satz (Gesetz des iterierten Logarithmus)**.** *Sei $B = (B_t)_{t\ge0}$ eine BB. Dann gilt*

$$\mathbb{P}\left[\limsup_{t\to0+} \frac{B_t}{(2t\ln\ln\frac{1}{t})^{\frac{1}{2}}} = 1\right] = 1.$$

11.16 Korollar. *Sei $B = (B_t)_{t\ge0}$ eine BB. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
\liminf_{t\to0+} \frac{-B_t}{(2t\ln\ln\frac{1}{t})^{\frac{1}{2}}} &= 1 \quad \textit{f.s.}\\
\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{(2t\ln\ln\frac{1}{t})^{\frac{1}{2}}} &= 1 \quad \textit{f.s.}\\
-\liminf_{t\to\infty} \frac{B_t}{(2t\ln\ln\frac{1}{t})^{\frac{1}{2}}} &= 1 \quad \textit{f.s.}
\end{aligned}$$

Beweis. Wende Satz 11.15 auf die BB $(-B_t)_{t\ge0}$, $(tB_{\frac{1}{t}})_{t\ge0}$ und $(-tB_{\frac{1}{t}})_{t\ge0}$ an. □