Technische Universität Dresden
Institut für Mathematische Stochastik

Dresdner Schriften zur
Mathematischen Stochastik
2/2008

Lorenz Goenner

Ungleichungen für charakteristische Funktionen

Herausgeber: Die Professoren des Instituts für Mathematische Stochastik
ISSN 0946–4735

Ungleichungen für charakteristische Funktionen

Lorenz Goenner
ciAD Dr. Haubold Consulting & Development
ehemaliger Student der TU Dresden

30. Juni 2008

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Charakteristische Funktionen wurden ursprünglich als Hilfsmittel für Fragestellungen der Wahrscheinlichkeitstheorie entwickelt; ihnen kommt eine wichtige Rolle bei der Gewinnung von Grenzwertaussagen über Verteilungen zu. Ihr Studium hat sich jedoch darüber hinaus als Gegenstand von eigenem mathematischen Interesse herausgestellt, was durch eine Fülle von Publikationen bezeugt wird.

Die Literatur über charakteristische Funktionen, die sich speziell den zugehörigen Ungleichungen widmet, ist allerdings in weiten Teilen über verschiedene Monographien und viele Zeitschriften verstreut; eine umfassende Übersicht fehlte bislang. Als Teil meiner Diplomarbeit mit dem Titel “Ungleichungen für charakteristische Funktionen” erstellte ich daher auf Anregung meines Betreuers Prof. Zoltán Sasvári eine Übersicht über einschlägige Ergebnisse. Nach Einreichung der Arbeit wurde der Wunsch laut, diese Übersicht einem erweiterten Leserkreis zugänglich zu machen; dem soll mit dieser Veröffentlichung entsprochen werden. Mit Satz 2.14 wurde darin zudem ein Ergebnis der Diplomarbeit aufgenommen.

Aufgrund der Vielzahl von bekannten Ungleichungen für charakteristische Funktionen erwies es sich als notwendig, für die Aufnahme in das Verzeichnis eine Auswahl zu treffen. Wir wählten überwiegend diejenigen Ungleichungen aus, in denen die charakteristische Funktion mittels elementarer Ausdrücke abgeschätzt wird. Dabei gibt es jedoch die berühmte Ausnahme: In wenigen Fällen, bei denen es sich um häufig zitierte Ergebnisse handelt, werden hier auch Ungleichungen aufgelistet, in denen Integralausdrücke zur Abschätzung verwendet werden.

Während wir in Kapitel 1 mit dem allgemeinsten Fall beginnen, indem wir einen Überblick über Ungleichungen positiv definiter Funktionen geben, stellen wir in Kapitel 2 Abschätzungen für charakteristische Funktionen mehrdimensionaler Verteilungen vor. Schließlich beinhaltet Kapitel 3 eine Zusammenstellung von Ungleichungen im Fall eindimensionaler Verteilungen. Dort zitieren wir auch die genaueste aktuell bekannte Abschätzung für das minimale Streuungsprodukt positiv definiter Dichtepaare.

Diese Arbeit setzt sich im wesentlichen aus den Kapiteln 3, 4 und 5 von [9] zusammen.

1 Ungleichungen für positiv definite Funktionen

In diesem Abschnitt zitieren wir Aussagen für positiv definite Funktionen. Charakteristische Funktionen sind Spezialfälle positiv definiter Funktionen; siehe dazu etwa [2]. Im Kontext abstrakter Gruppen notieren wir die Gruppenoperation als Multiplikation und bezeichnen das neutralen Element mit e. Wenn wir die Gruppen $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{C}$ betrachten, schreiben wir die Gruppenoperation als Addition. Für ein gegebenes $x \in G$ bezeichne xy die Rechtstranslation durch $y \in G$, x^{-1} das zu x inverse Element.

Definition 1.1 (Positive Definitheit)**.** Eine komplexwertige Funktion g definiert auf einer Gruppe G heißt *positiv definit*, wenn die Ungleichung

$$\sum_{i,j=1}^{n} g(x_i^{-1}x_j)c_i\overline{c_j} \geq 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, für alle $x_1, \ldots, x_n \in G$ und für alle $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ gilt.

Satz 1.2 ([24], Theorem 1.4.1)**.** *Sei f eine positiv definite Funktion definiert auf einer Gruppe G. Dann gilt*

(i) $|f(x)| \leq f(e)$ *für alle* $x \in G$*;*

(ii) $|f(x) - f(y)|^2 \leq 2f(e)[f(e) - \operatorname{Re} f(x^{-1}y)]$ *für alle* $x, y \in G$*;*

(iii) $|f(e)f(xy) - f(x)f(y)|^2 \leq [f(e)^2 - |f(x)|^2] \cdot [f(e)^2 - |f(y)|^2]$ *für alle* $x, y \in G$*;*

(iv) $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)\right|^2 \leq f(e) \sum_{i,j=1}^{n} f(x_i^{-1}x_j)a_i\overline{a_j}$ *für alle Teilmengen* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *von* G *und alle Folgen* $\{a_1, \ldots, a_n\}$ *komplexer Zahlen;*

(v) $\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i^{-1}y_j)a_i\overline{b_j}\right|^2 \leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} f(x_i^{-1}x_j)a_i\overline{a_j}\right)\left(\sum_{i,j=1}^{m} f(y_i^{-1}y_j)b_i\overline{b_j}\right)$ *für alle Teilmengen* $\{x_1, \ldots, x_n\}, \{y_1, \ldots, y_n\}$ *von* G *und alle Folgen* $\{a_1, \ldots, a_n\}, \{b_1, \ldots, b_m\}$ *komplexer Zahlen.*

Für die Definition der Faltung von Funktionen auf lokal kompakten Gruppen sowie deren Integrierbarkeit verweisen wir auf [10], §§ 15, 19 und 20. Wir zitieren jedoch eine Aussage zur Charakterisierung der Faltung; hier und im folgenden Satz bezeichne dy die Integration bezüglich des Haarschen Maßes.

Bemerkung 1.3 ([10], Theorem 20.10 (ii)). Sei G eine lokal kompakte Gruppe, die auf G definierten Funktionen f und g seien integrierbar bezüglich des Haarschen Maßes. Dann gilt für die Faltung $f * g$:

$$f * g(x) = \int_G f(xy)g(y^{-1})dy.$$

Wir sind nun vorbereitet für die folgende Abschätzung.

Satz 1.4 ([24], Theorem 1.4.3). *Sei G eine lokal kompakte Gruppe, f positiv definit und stetig auf G. Sei V eine symmetrische Umgebung von e mit kompaktem Abschluss, wir setzen $\chi := \mathbb{1}_V/\lambda(V)$, wobei $\mathbb{1}_V$ die Indikatorfunktion der Menge V sei. Dann gilt die Ungleichung*

$$|f(x) - f * \chi(x)|^2 \leq 2f(e)\lambda(V)^{-1} \int_V [f(e) - \mathsf{Re}\, f(y)]dy$$

für alle $x \in G$.

Satz 1.5 ([24], Theorem 1.4.4). *Sei f eine positiv definite Funktion auf einer Gruppe G, so dass $f(e) = 1$. Dann gelten die folgenden Ungleichungen für beliebiges $x \in G$ und alle $n \in \mathbb{N}$:*

(i) $1 - \mathsf{Re}\, f(x^n) \leq n\{1 - [\mathsf{Re}\, f(x)]^n\}$,

(ii) $1 - |f(x^n)| \leq n\{1 - |f(x)|^n\}$.

2 Ungleichungen charakteristischer Funktionen in $\mathbb{R}^m$

2.1 Beliebige Verteilungen

Wir geben zunächst eine Formulierung von Satz 1.5 für mehrdimensionale charakeristische Funktionen an.

Satz 2.1 ([26], Theorem 1.8.11). *Für eine beliebige in $\mathbb{R}^m$ definierte charakteristische Funktion f und beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$1 - \operatorname{Re} f(n\mathbf{t}) \leq n\{1 - [\operatorname{Re} f(\mathbf{t})]^n\} \leq n^2[1 - \operatorname{Re} f(\mathbf{t})]$$

für alle $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m$.

Satz 2.2 ([26], Theorem 1.8.12). *Sei f eine in $\mathbb{R}^m$ definierte charakteristische Funktion, für die $|f(\mathbf{t})| \leq c$ für $\|\mathbf{t}\| > b, c \leq 1, b > 0$ gelte. Dann gilt*

$$|f(\mathbf{t})| \leq 1 - \frac{1 - c^2}{4b^2}\|\mathbf{t}\|^2$$

für $\|\mathbf{t}\| \leq b$.

Bei der folgenden Aussage handelt es sich um einen Spezialfall von Satz 1.2 (ii).

Satz 2.3 ([26], Theorem 1.8.13). *Für eine beliebige in $\mathbb{R}^m$ definierte charakteristische Funktion f gilt*

$$|\operatorname{Im} f(\mathbf{t})| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \operatorname{Re} f(2\mathbf{t})}.$$

für alle $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m$.

Satz 2.4 ([26], Theorem 1.8.14). *Für eine beliebige in $\mathbb{R}^m$ definierte charakteristische Funktion f und beliebige $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ gilt*

$$|f(\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2)| \geq |f(\mathbf{t}_1)||f(\mathbf{t}_2)| - (1 - |f(\mathbf{t}_1)|^2)^{1/2}(1 - |f(\mathbf{t}_2)|^2)^{1/2}).$$

Satz 2.5 ([26], Theorem 2.7.2). *Sei F eine Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}^m$ mit charakteristischer Funktion f. Dann gilt für $u > 0$*

$$\int_{\|\mathbf{x}\| \geq 1/u} dF(\mathbf{x}) \leq \frac{7}{mu} \sum_{j=1}^{m} \int_0^{mu} [1 - \operatorname{Re} f(\delta_{1j}t_1, \dots, \delta_{mj}t_m)] dt_j$$

und

$$\int_{\|\mathbf{x}\| \geq 2/u} dF(\mathbf{x}) \leq \frac{1}{mu} \sum_{j=1}^{m} \int_{-mu}^{mu} [1 - f(\delta_{1j}t_1, \dots, \delta_{mj}t_m)] dt_j.$$

Dabei bezeichnet δ_{ij} das Kronecker-Symbol.

Man betrachte den Würfel

$$I^m = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) : -1 \leq x_1 \leq 1, \ \dots \ , -1 \leq x_m \leq 1\},$$

und seien $\varepsilon^{(j)} = (\varepsilon_1^{(j)}, \dots, \varepsilon_m^{(j)}), j = 1, \dots, 2^m$ die Ecken von I^m, die so nummeriert seien, dass $\varepsilon^{(j)} = \varepsilon^{(j+2^{m-1})}, j = 1, \dots, 2^{m-1}$.

Satz 2.6 ([26], Theorem 2.7.3). *Sei F eine Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}^m$ mit charakteristischer Funktion f. Dann gilt für $u > 0$*

$$\int_{\sum_{k=1}^m \|x_k\| \geq 1/u} dF(x_1, \dots, x_m) \leq \frac{7}{u} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \int_0^u [1 - \operatorname{Re} f(\varepsilon_1^{(j)} t, \dots, \varepsilon_m^{(j)} t)] dt.$$

Satz 2.7 ([26], Theorem 2.7.4). *Sei F eine Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}^m$ mit charakteristischer Funktion f. Dann gilt für $u > 0$*

$$\int_{\|\mathbf{x}\| \geq \frac{\alpha}{u}} dF(\mathbf{x}) \leq \frac{c(\alpha)}{u^m} \int_{\|\mathbf{t}\| \leq u} [1 - \operatorname{Re} f(\mathbf{t})] d\mathbf{t}$$

für beliebiges $\alpha > m/\sqrt{\pi}$, wobei

$$c(\alpha) = \frac{\Gamma(\frac{m}{2} + 1)}{\pi^{m/2} \left[1 - \frac{m}{\sqrt{\pi}\alpha}\right]}.$$

2.2 Spezielle Verteilungen

2.2.1 Nichtdegenerierte Verteilungen

Satz 2.8 ([26], Theorem 2.7.1)**.** *Sei f die charakteristische Funktion einer nicht- degenerierten Verteilung in $\mathbb{R}^m$. Dann existieren positive Zahlen δ und ε, so dass*

$$|f(\mathbf{t})| \leq 1 - \varepsilon \|\mathbf{t}\|^2$$

für $\|\mathbf{t}\| \leq \delta$.

Ushakov ([26], S. 29) bemerkt, dass die Ungleichung in Satz 2.8 nicht gleichmäßig über alle charakteristischen Funktionen gilt, d.h. die Zahlen δ und ε können nicht für alle charakteristischen Funktionen gleich gewählt werden.

Lemma 2.9 ([26], Lemma 2.7.1)**.** *Sei f die charakteristische Funktion einer nicht- degenerierten Verteilung in $\mathbb{R}^m$. Dann existieren ein $a > 0$ und eine nicht-degenerierte Verteilung, die in der Kugel $\|\mathbf{t}\| \leq a$ konzentriert ist und deren charakteristische Funktion g die Beziehung*

$$|\mathsf{Re}\, f(\mathbf{t})| \leq \mathsf{Re}\, g(\mathbf{t})$$

für alle $\|\mathbf{t}\| \leq \pi/(2a)$ erfüllt.

2.2.2 Verteilungen mit beschränktem Träger

Satz 2.10 ([26], Theorem 2.7.5)**.** *Sei $\mathbf{X}$ ein m-dimensionaler Zufallsvektor mit Dichte p und charakteristischer Funktion f. Gilt $\|\mathbf{X}\| \leq c$ und*

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m} p(\mathbf{x}) \leq a,$$

dann gilt

$$|f(\mathbf{t})| \leq \frac{2a_0}{\|\mathbf{t}\|} \sin \frac{\|\mathbf{t}\|}{2a_0}$$

für $\|\mathbf{t}\| \leq \frac{\pi}{2c}$, und

$$|f(\mathbf{t})| \leq \frac{4a_0 c}{\pi} \sin \frac{\pi}{4a_0 c}$$

für $\|\mathbf{t}\| > \frac{\pi}{2c}$, *wobei*

$$a_0 = \frac{\pi^{(m-1)/2} c^{m-1}}{\Gamma\left((m+1)/2\right)} a.$$

Korollar 2.11 ([26], Corollary 2.7.1)**.** *Seien die Voraussetzungen von Satz 2.10 erfüllt. Dann gilt*

$$|f(\mathbf{t})| \leq 1 - \frac{\|\mathbf{t}\|^2}{3\pi^2 a_0^2} \qquad \text{für } \|\mathbf{t}\| \leq \frac{\pi}{2c}$$

und

$$|f(\mathbf{t})| \leq 1 - \frac{1}{12 a_0^2 c^2} \qquad \text{für } \|\mathbf{t}\| > \frac{\pi}{2c}.$$

Definition 2.12. Wir definieren die stetigen[1] Funktionen $h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$h_1(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2} \ln \frac{2}{2-x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

und

$$h_2(x) = \begin{cases} 2\frac{1-\cos x}{x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Für den folgenden Satz sei daran erinnert, dass beschränkte Zufallsgrößen Momente beliebiger Ordnung besitzen.

Satz 2.13 ([26], Theorem 2.7.6)**.** *Sei* $\mathbf{X}$ *ein beschränkter* m*-dimensionaler Zufallsvektor,* $\|\mathbf{X}\| \leq c$*, mit charakteristischer Funktion* f *und Kovarianzmatrix* Σ*. Für jedes* $a \in [0, \pi/4]$ *gilt*

$$|f(\mathbf{t})| \leq 1 - h_2(a) \frac{\mathbf{t}^T \Sigma \mathbf{t}}{2}$$

für $\|\mathbf{t}\| \leq a/c$*. Dabei ist* h_2 *die Funktion aus Definition 2.12.*

2.2.3 Absolutstetige Verteilungen

Die folgende Aussage kann als Verschärfung der zweiten Ungleichung in Satz 2.10 im Fall konkaver Dichtefunktionen betrachtet werden.

[1] Die Stetigkeit in 0 überprüft man leicht mit Hilfe der Regel von Bernoulli-L'Hospital.

Satz 2.14 ([9], Satz 2.2)**.** *Sei F eine absolutstetige Verteilung mit einer stetigen konkaven Dichtefunktion p, deren Träger eine kompakte konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, mit inneren Punkten sei. Dann erfüllt die zugehörige charakteristische Funktion f die Ungleichungen*

$$|f(\mathbf{t})| \leq \frac{K}{\|\mathbf{t}\|} \sin \frac{\|\mathbf{t}\|}{K}$$

für $\|\mathbf{t}\| \leq \frac{\pi K}{2}$, und

$$|f(\mathbf{t})| \leq \frac{K}{\|\mathbf{t}\|}$$

für alle $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{t} \neq \mathbf{0}$, wobei

$$K = K(m,p) = 2 \sup_{\mathbf{x} \in D} p(\mathbf{x}) \cdot V_{m-1} \left[R(D)\right]^{m-1},$$

dabei sei $D = \operatorname{supp}(p)$, $R(D)$ der Radius einer Kugel, die D enthält, und $V_m = \frac{\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2+1)}$ das Volumen der Einheitskugel in $\mathbb{R}^m$.

Satz 2.15 ([26], Theorem 2.7.13)**.** *Sei $\mathbf{X}$ ein m-dimensionaler Zufallsvektor mit Dichte p und charakteristischer Funktion f, δ sei beliebig mit $0 \leq \delta \leq 1$. Gilt*

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m} p(\mathbf{x}) \leq a < \infty$$

und

$$\mathbf{E} g(\|\mathbf{X}\|) < \infty$$

für eine nichtnegative streng monoton gegen ∞ wachsende Funktion g, dann gilt

$$|f(\mathbf{t})| \leq 1 - \frac{(1-\delta)^3}{3\pi^2 a_0^2} \|\mathbf{t}\|^2$$

für $\|\mathbf{t}\| \leq \pi/2c$, und

$$|f(\mathbf{t})| \leq 1 - \frac{(1-\delta)^3}{12 a_0^2 c^2}$$

für $\|\mathbf{t}\| > \pi/2c$, wobei

$$c = g^{-1}\left(\frac{\mathbf{E} g(\|\mathbf{X}\|)}{\delta}\right)$$

und

$$a_0 = \frac{\pi^{(m-1)/2} c^{m-1}}{\Gamma\left((m+1)/2\right)} a.$$

Korollar 2.16 ([26], Corollary 2.7.2). *Sei* $\mathbf{X}$ *ein* m*-dimensionaler Zufallsvektor mit Dichte* p *und charakteristischer Funktion* f*,* δ *sei beliebig mit* $0 \leq \delta \leq 1$*. Es gelte ferner*

$$\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m} p(\mathbf{x}) \leq a < \infty$$

sowie

$$\mathsf{E}\|\mathbf{X}\|^\alpha < \infty \tag{1}$$

für ein $\alpha > 0$*, ferner bezeichne*

$$\gamma_\alpha = \min_{\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m} \mathsf{E}\|\mathbf{X} - \mathbf{b}\|^\alpha.$$

Dann gilt

$$|f(\mathbf{t})| \leq 1 - \frac{(1-\delta)^3 \delta^{2(m-1)/\alpha} \left[\Gamma(\frac{m+1}{2})\right]^2}{3\pi^{m+1}\gamma_\alpha^{2(m-1)/\alpha} a^2} \|\mathbf{t}\|^2$$

für $\|\mathbf{t}\| \leq \frac{\pi}{2}(\delta/\gamma_\alpha)^{1/\alpha}$*, und*

$$|f(\mathbf{t})| \leq 1 - \frac{(1-\delta)^3 \delta^{2m/\alpha} \left[\Gamma(\frac{m+1}{2})\right]^2}{12\pi^{m-1}\gamma_\alpha^{2m/\alpha} a^2}$$

für $\|\mathbf{t}\| > \frac{\pi}{2}(\delta/\gamma_\alpha)^{1/\alpha}$*.*

Der Autor von [26] weist darauf hin, dass die Ungleichungen in Satz 2.15 und Korollar 2.16 isotropisch sind, d.h. dass ihre rechten Seiten nur von der Norm des Vektors $\mathbf{t}$ abhängen. Insbesondere in dem Fall, dass eine Verteilung in bestimmte Richtungen ausgedehnt und in andere Richtungen komprimiert ist, sind die so entstandenen Abschätzungen grob. Für verbesserte Abschätzungen in den genannten Fällen verweisen wir auf Satz 2.23 und Korollar 2.24.

2.2.4 Kugelsymmetrische Verteilungen

Satz 2.17 ([26], Theorem 2.7.16). *Seien* $\mathbf{X}$ *und* $\mathbf{Y}$ *kugelsymmetrische* m*-dimensionale Zufallsvektoren mit den zugehörigen charakteristischen Funktionen* f *und* g*. Falls* $\mathbf{Y}$ *beschränkt ist, d.h.* $\|\mathbf{Y}\| \leq c$*, und*

$$\mathsf{P}(\|\mathbf{X}\| \leq r) \leq \mathsf{P}(\|\mathbf{Y}\| \leq r)$$

für alle $r \geq 0$ *erfüllt ist, dann gilt*

$$|f(\mathbf{t})| \leq g(\mathbf{t})$$

für $\|\mathbf{t}\| \leq \pi/(2c)$*.*

Satz 2.18 ([26], Theorem 2.7.17). *Sei* $\mathbf{X}$ *ein kugelsymmetrischer* m*-dimensionaler Zufallsvektor mit Dichte* p*, die beschränkt sei, und charakteristischer Funktion* f*. Falls* $\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m} p(\mathbf{x}) \leq a$*, dann gilt*

$$|f(\mathbf{t})| \leq \Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)\left(\frac{2}{r_a\|\mathbf{t}\|}\right)^{m/2} J_{m/2}(r_a\|\mathbf{t}\|)$$

für $\|\mathbf{t}\| \leq \pi/(2r_a)$*, wobei* J_p *die Besselfunktion der Ordnung* p *und* r_a *den Radius einer Kugel vom Volumen* $1/a$ *bezeichne:*

$$r_a = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\Gamma(m/2+1)}{a}\right)^{1/m}.$$

2.2.5 Gleichverteilung auf speziellen Mengen

Satz 2.19 ([6], Assertion 1). *Sei* f *die charakteristische Funktion der gleichmäßigen Verteilung in einer Kugel vom Radius* R *in* $\mathbb{R}^m$*. Dann gilt*

$$|f(\mathbf{t})| \leq \exp\left\{-\frac{R^2\|\mathbf{t}\|^2}{2m+4}\right\}$$

für $\|\mathbf{t}\| \leq \frac{m}{2R}$*.*

2.3 Verteilungen mit Momenten

2.3.1 Verteilungen mit erstem Moment

Satz 2.20 ([26], Theorem 2.7.9)**.** *Sei* $\mathbf{X}$ *ein* m*-dimensionaler Zufallsvektor mit charakteristischer Funktion* f*. Ist*

$$\beta_1 = \mathsf{E}\|\mathbf{X}\| < \infty,$$

dann gilt

$$\mathrm{Re}\, f(\mathbf{t}) \geq 1 - \beta_1 \|\mathbf{t}\|$$

für alle $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m$*.*

2.3.2 Verteilungen mit zweitem Moment

Satz 2.21 ([26], Theorem 2.7.8)**.** *Sei* F *eine* m*-dimensionale Verteilungsfunktion mit charakteristischer Funktion* f *und Kovarianzmatrix* Σ*. Dann gilt*

$$|f(\mathbf{t})| \geq 1 - \frac{\mathbf{t}^T \Sigma \mathbf{t}}{2}$$

für alle $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m$*.*

Satz 2.22 ([26], Theorem 2.7.10)**.** *Sei* F *eine* m*-dimensionale Verteilungsfunktion mit charakteristischer Funktion* f *und Kovarianzmatrix* Σ*. Dann gilt für jedes* $a \in (0, \sqrt{2})$

$$|f(\mathbf{t})| \geq \exp\left\{ - h_1(a) \frac{\mathbf{t}^T \Sigma \mathbf{t}}{2} \right\}$$

für alle $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m$*, die die Beziehung* $\mathbf{t}^T \Sigma \mathbf{t} \leq a^2$ *erfüllen. Dabei ist* h_1 *die Funktion aus Definition 2.12.*

Satz 2.23 ([26], Theorem 2.7.14)**.** *Sei* $\mathbf{X}$ *ein* m*-dimensionaler Zufallsvektor mit charakteristischer Funktion* f*, Dichte* p *und Kovarianzmatrix* Σ*. Gilt*

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m} p(\mathbf{x}) \leq a,$$

dann gilt

$$|f(\mathbf{t})| \leq 1 - \frac{9 \left[\Gamma(\frac{m+1}{2})\right]^2 \|\mathbf{t}\|^2}{2^{m+8} \pi^{m+1} a^2 (\sigma^2)^{m-1}}$$

für $\sqrt{\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}} \le \pi/4$, *und*

$$|f(\mathbf{t})| \le 1 - \frac{9\left[\Gamma(\frac{m+1}{2})\right]^2 \|\mathbf{t}\|^2}{2^{m+12}\pi^{m-1}a^2(\sigma^2)^{m-1}(\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t})}$$

für $\sqrt{\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}} > \pi/4$, *wobei* $\sigma^2 = \mathsf{E}\|\mathbf{X}\|^2$.

Korollar 2.24 ([26], Corollary 2.7.3)**.** *Seien die Voraussetzungen von Satz 2.23 erfüllt. Dann gilt*

$$|f(\mathbf{t})| \le \exp\left\{\frac{9\left[\Gamma(\frac{m+1}{2})\right]^2 \|\mathbf{t}\|^2}{2^{m+8}\pi^{m-1}a^2(\sigma^2)^{m-1}[\pi^2+16(\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t})]}\right\}.$$

Satz 2.25 ([26], Theorem 2.7.15)**.** *Sei* $\mathbf{X}$ *ein* m*-dimensionaler Zufallsvektor mit charakteristischer Funktion* f*, Dichte* p *und Kovarianzmatrix* Σ*. Gilt*

$$\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m} p(\mathbf{x}) \le a,$$

dann gilt

$$|f(\mathbf{t})| \le \exp\left\{-\frac{\pi^2}{27}\frac{\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}((m-1)!!)^2}{a^2|\Sigma|(8\pi)^m m^{m-1}(2\pi+\sqrt{m}\sqrt{\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}})^2}\right\},$$

wobei

$$(m-1)!! = \prod_{\substack{1\le k\le m \\ k \text{ ungerade}}} (m-k),$$

und $|\Sigma|$ *bezeichnet die Determinante der Matrix.*

2.3.3 Verteilungen mit Momenten höherer Ordnung

Satz 2.26 ([26], Theorem 2.7.7)**.** *Sei* $\mathbf{X}$ *ein* m*-dimensionaler Zufallsvektor mit charakteristischer Funktion* f *und Kovarianzmatrix* Σ*. Ist* $\mathbf{X}$ *symmetrisch verteilt und ist* $\mathsf{E}\|\mathbf{X}\|^4 < \infty$*, dann gilt*

$$1 - \frac{\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}{2} \le f(\mathbf{t}) \le 1 - \frac{\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}{2} + \frac{\mathsf{E}\|\mathbf{X}\|^4}{24}\|\mathbf{t}\|^4$$

für alle $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m$.

Definition 2.27. Die Funktion $c : (0,1] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$c(\delta) = \frac{\theta - \sin\theta}{(2+\delta)\theta^{1+\delta}},$$

wobei θ die (im Intervall $(0, 2\pi)$) eindeutige Lösung der Gleichung

$$\frac{\delta}{2(2+\delta)}x^2 + \frac{1}{2+\delta}x \sin x + \cos x = 1$$

ist.[2]

Satz 2.28 ([26], Theorem 2.7.11)**.** *Sei* $\mathbf{X}$ *ein Zufallsvektor mit Erwartungswert* $\mathbf{0}$ *und charakteristischer Funktion* f. *Gilt*

$$\mathsf{E}\|\mathbf{X}\|^{2+\delta} < \infty$$

für ein $0 < \delta \leq 1$, *dann gilt*

$$|f(\mathbf{t})| \leq 1 - \frac{\mathbf{t}^T \Sigma \mathbf{t}}{2} + c(\delta)(\mathsf{E}\|\mathbf{X}\|^{2+\delta} + \mathsf{E}\|\mathbf{X}\|^2 \mathsf{E}\|\mathbf{X}\|^{\delta})\|\mathbf{t}\|^{2+\delta}$$

für alle $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m$, *wobei* c *die in Definition 2.27 gegebene Funktion ist.*

Satz 2.29 ([26], Theorem 2.7.12)**.** *Sei* $\mathbf{X}$ *ein Zufallsvektor mit charakteristischer Funktion* f *und Kovarianzmatrix* Σ. *Gilt*

$$\mathsf{E}\|\mathbf{X}\|^{2+\delta_0} < \infty$$

für ein $0 < \delta_0 \leq 1$, *dann existiert für beliebiges* $0 < \delta < \delta_0$ *und beliebiges* $\varepsilon > 0$ *ein* $\Delta > 0$, *so dass*

$$|f(\mathbf{t})| \leq 1 - \frac{\mathbf{t}^T \Sigma \mathbf{t}}{2} + \varepsilon\|\mathbf{t}\|^{2+\delta}$$

für $\|\mathbf{t}\| \leq \Delta$.

[2] Für den Beweis der Existenz und Eindeutigkeit von θ verweisen wir auf [26], Beweis von Lemma 2.1.10.

3 Ungleichungen charakteristischer Funktionen in $\mathbb{R}$

3.1 Beliebige Verteilungen

Wir zitieren zunächst zwei häufig verwendete Ungleichungen, die eine Verteilungsfunktion F und ihre charakteristische Funktion f in Beziehung setzen; die erste ist auch als *Stutzungsungleichung* bekannt. Eine leicht abgewandelte Form dieser ersten Ungleichung wurde in [26] auf den mehrdimensionalen Fall verallgemeinert; wir verweisen auf die Sätze 2.5 bis 2.7 der vorliegenden Arbeit.

Satz 3.1 ([8], Abschnitt 7.1, Satz 6)**.** *Sei f die einer Verteilungsfunktion F zugehörige charakteristische Funktion. Dann gilt mit den Abkürzungen $a = (1 - \sin 1)^{-1} < 7, b = (1 - \cos 1)^{-1} < 3$*

$$\int_{|xy|\geq 1} dF(y) \leq \frac{a}{x} \int_0^x (1 - \mathsf{Re}\, f(t))\ dt,$$

$$\int_{|xy|\geq 1} y^2 dF(y) \leq \frac{b}{x^2} (1 - \mathsf{Re}\, f(x))\ dt.$$

Wir geben an dieser Stelle die eindimensionale Formulierung von Satz 1.5 bzw. Satz 2.1 und eine Folgerung an.

Satz 3.2 ([26], Theorem 1.4.1)**.** *Für eine beliebige charakteristische Funktion f und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$1 - \mathsf{Re}\, f(nt) \leq n\{1 - [\mathsf{Re}\, f(t)]^n\} \leq n^2[1 - \mathsf{Re}\, f(t)]$$

für alle $t \in (-\infty, \infty)$.

Korollar 3.3 ([26], Corollary 1.4.1)**.** *Für eine beliebige charakteristische Funktion f und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$1 - |f(nt)|^2 \leq n^2[1 - |f(t)|^2]$$

für alle $t \in (-\infty, \infty)$.

Es folgen Satz 2.4 im eindimensionalen Fall und zwei Konsequenzen aus dessen Aussage.

Satz 3.4 ([26], Theorem 1.4.2)**.** *Für eine beliebige charakteristische Funktion f und beliebige t_1, t_2 gilt*

$$|f(t_1 + t_2)| \geq |f(t_1)||f(t_2)| - (1 - |f(t_1)|^2)^{1/2}(1 - |f(t_2)|^2)^{1/2}.$$

Korollar 3.5 ([26], Corollary 1.4.2)**.** *Sei f eine charakteristische Funktion, für die $|f(t_1)| \geq \cos\varphi_1$ und $|f(t_2)| \geq \cos\varphi_2$ gelte, wobei $\varphi_1 \geq 0$, $\varphi_2 \geq 0$ und $\varphi_1 + \varphi_2 \leq \frac{\pi}{2}$. Dann gilt*

$$|f(t_1 + t_2)| \geq \cos(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Falls insbesondere

$$|f(t)| \geq \cos\varphi,$$

dann gilt

$$|f(nt)| \geq \cos(n\varphi).$$

Lemma 3.6 ([26], Lemma 1.4.1)**.** *Sei f eine charakteristische Funktion. Angenommen, es gelte*

$$|f(t_1)| > 1 - ct_1^2 \tag{2}$$

und

$$|f(t_2)| > 1 - ct_2^2, \tag{3}$$

wobei c eine positive Konstante ist, $t_1 > 0, t_2 > 0$. Dann gilt

$$|f(t_1 + t_2)| > 1 - c(t_1 + t_2)^2. \tag{4}$$

Das „>“-Zeichen kann in allen drei Ungleichungen (2)–(4) simultan durch „≥“ ersetzt werden.

Aus diesem Lemma erhält man die folgende Aussage:

Korollar 3.7 ([26], Corollary 1.4.3)**.** *Sei f eine charakteristische Funktion. Dann impliziert $|f(t_0)| \geq 1 - ct_0^2$, dass $|f(nt_0)| \geq 1 - c(nt_0)^2$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt.*

Satz 3.8 ([26], Theorem 1.4.3)**.** *Sei f eine charakteristische Funktion. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

1. *Gilt* $|f(t)| > 1 - ct^2$ *in einer Umgebung des Ursprungs, wobei* $t \neq 0$, c *konstant, dann gilt* $|f(t)| > 1 - ct^2$ *für alle* t*. Die Aussage bleibt gültig, wenn „*$>$*“ in beiden Ungleichungen durch „*$\geq$*“ ersetzt wird.*

2. *Gilt* $\mathsf{Re}\, f(t) > 1 - ct^2$ *in einer Umgebung des Ursprungs, wobei* $t \neq 0$, c *konstant, dann gilt* $\mathsf{Re}\, f(t) > 1 - ct^2$ *für alle* t*. Die Aussage bleibt gültig, wenn „*$>$*“ in beiden Ungleichungen durch „*$\geq$*“ ersetzt wird.*

Die nun folgende Aussage wurde bereits im mehrdimensionalen Fall als Satz 2.2 formuliert.

Satz 3.9 ([26], Theorem 1.4.4)**.** *Sei* f *eine charakteristische Funktion, so dass*

$$|f(t)| \leq c$$

für $|t| \geq b$ *gelte, wobei* $0 < c \leq 1$, $b > 0$*. Dann gilt*

$$|f(t)| \leq 1 - \frac{1-c}{4b^2}t^2$$

für $|t| \leq b$*.*

Der nächste Satz ist wiederum eine Folgerung aus Satz 1.5.

Satz 3.10 ([26], Theorem 1.4.5)**.** *Für eine beliebige charakteristische Funktion* f *gilt*

$$|\mathsf{Im}\, f(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \mathsf{Re}\, f(2t)}$$

und

$$|f(t+s) - f(t)|^2 \leq 2[1 - \mathsf{Re}\, f(s)]$$

für beliebige $s,\ t \in \mathbb{R}$*.*

Im folgenden zitieren wir einige Varianten der sogenannten Stutzungsungleichung, die einen Zusammenhang zwischen dem Verhalten des Schwanzes einer Verteilungsfunktion und dem Verhalten der zugehörigen charakteristischen Funktion in einer Umgebung des Ursprungs herstellen.

Satz 3.11 ([26], Theorem 1.4.7)**.** *Sei f eine beliebige charakteristische Funktion, F die zugehörige Verteilungsfunktion. Dann gilt für jedes $0 < a < 2\pi$*

$$\int_{|x|\leq a/t} x^2 dF(x) \leq \frac{a^2}{(1-\cos a)t^2}[1 - \operatorname{Re} f(t)]$$

für alle $0 < t < a$.

Korollar 3.12 ([26], Corollary 1.4.4)**.** *Sei F eine Verteilungsfunktion mit charakteristischer Funktion f, dann gilt für $t > 0$*

$$\int_{|x|\leq 1/t} x^2 dF(x) \leq \frac{2.1754}{t^2}[1 - \operatorname{Re} f(t)].$$

Korollar 3.13 ([26], Corollary 1.4.5)**.** *Sei f eine beliebige charakteristische Funktion, F die zugehörige Verteilungsfunktion. Dann gilt für beliebiges $0 < a < 2\pi$*

$$\int_{|x|\leq a/t} x^2 dF(x) \leq \frac{a^2}{(1-\cos a)t^2}|1 - \operatorname{Re} f(t)|$$

für alle $0 < t < a$.

Wir geben nun einen besonders einfachen Spezialfall der zweiten Ungleichung in Satz 2.5 an.

Satz 3.14 ([26], Theorem 1.4.8)**.** *Sei f eine beliebige charakteristische Funktion, F die zugehörige Verteilungsfunktion. Dann gilt für $t > 0$*

$$\int_{|x|\geq 2/t} dF(x) \leq \frac{1}{t}\int_{-t}^{t} [1 - f(u)]du.$$

Satz 3.15 ([11], Theorem 10)**.** *Sei* X *eine Zufallsvariable und sei $\beta_{\gamma c} = \mathbf{E}(|\mathrm{X}|^\gamma \cdot \mathbb{1}_{\{|\mathrm{X}|\leq c\}})$, wobei γ und c positive Konstanten sind.*

(a) Falls $\gamma \geq 2$, dann gilt

$$\operatorname{Re} f(t) \leq 1 - \frac{\beta_{\gamma c}}{c^\gamma} + \frac{\beta_{\gamma c}}{c^\gamma}\cos(tc)$$

für $|t| \leq 2\pi/c$.

(b) Falls $\gamma \in (0,2)$, dann gilt

$$\mathsf{Re}\, f(t) \geq 1 - \frac{\beta_{\gamma c}}{c^\gamma} + \frac{\beta_{\gamma c}}{c^\gamma}\cos(tc) - 2\mathbf{P}(|\mathrm{X}| > c)$$

für $|t| \leq b_\gamma/c$, wobei b_γ die eindeutige Lösung der Gleichung $\frac{b}{\gamma} = \tan(\frac{1}{2}b)$ für $b \in (0,\pi)$ ist.

3.2 Spezielle Verteilungen

3.2.1 Nichtdegenerierte Verteilungen

Wir zitieren die eindimensionale Formulierung von Satz 2.8.

Satz 3.16 ([26], Theorem 1.4.6)**.** *Sei f die charakteristische Funktion einer nichtdegenerierten Verteilung (nicht in einem Punkt konzentriert). Dann existieren positive Zahlen δ und ε, so dass*

$$|f(t)| \leq 1 - \varepsilon t^2$$

für $|t| \leq \delta$ gilt.

3.2.2 Verteilungen mit beschränktem Träger

Wir erinnern noch einmal daran, dass beschränkte Zufallsvariablen Momente beliebiger Ordnung besitzen. Weiterhin führen wir den Begriff der Konzentrationsfunktion ein.

Definition 3.17. Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F. Die *Konzentrationsfunktion* von X (oder von F) ist definiert als

$$Q_{\mathrm{X}}(l) = Q(F; l) = \sup_a \mathbf{P}(a \leq \mathrm{X} \leq a + l).$$

Satz 3.18 ([26], Theorem 2.2.1). *Seien* X *und* Y *beschränkte Zufallsvariable,* $|\mathrm{X}| \leq c$, $|\mathrm{Y}| \leq c$, $c > 0$, *und seien* φ *und* ψ *ihre charakteristischen Funktionen. Gilt*

$$Q_{\mathrm{X}}(2z) \leq \mathbf{P}(|\mathrm{Y}| \leq z)$$

für beliebiges $z \geq 0$, *dann gilt*

$$|\varphi(t)| \leq \mathsf{Re}\,\psi(t)$$

für $|t| \leq \pi/2c$.

Wir zitieren nun Satz 2.10 und Korollar 2.11 in der eindimensionalen Variante.

Satz 3.19 ([26], Theorem 2.2.2). *Sei* X *eine Zufallsvariable mit Dichtefunktion* p *und charakteristischer Funktion* f. *Ist* $|\mathrm{X}| \leq c$ *f.s. und gilt* $p(x) \leq a$ *für alle* x *(*c *und* a *seien positive Konstanten), dann gilt*

$$|f(t)| \leq \frac{2a}{t} \sin \frac{t}{2a} \qquad \text{für } |t| \leq \frac{\pi}{2c}, \tag{5}$$

und

$$|f(t)| \leq \frac{4ac}{\pi} \sin \frac{\pi}{4ac} \qquad \text{für } |t| > \frac{\pi}{2c}. \tag{6}$$

Diese Abschätzungen sind scharf. In (5) gilt die Gleichheit, wenn X gleichmäßig verteilt auf einem Intervall der Länge $1/a$ ist. Weiterhin kann für beliebig großes t eine Verteilung so gewählt werden, so dass in (6) die Gleichheit gilt. Für Details verweisen wir auf [26] (S. 85und Appendix A, Ex. 35).

Korollar 3.20 ([26], Corollary 2.2.1). *Seien die Voraussetzungen von Satz 3.19 erfüllt. Dann gilt*

$$|f(t)| \leq 1 - \frac{t^2}{3\pi^2 a^2} \qquad \text{für } |t| \leq \frac{\pi}{2c}$$

und

$$|f(t)| \leq 1 - \frac{1}{12a^2c^2} \qquad \text{für } |t| > \frac{\pi}{2c}.$$

Die folgende Aussage folgt für $m = 1$ aus Satz 2.13. Es sei h_2 die in Definition 2.12 gegebene Funktion.

Satz 3.21 ([26], Theorem 2.2.3)**.** *Sei* X *eine beschränkte Zufallsvariable,* $|\mathrm{X}| \le c$*, mit charakteristischer Funktion* f *und Varianz* σ^2*. Dann gilt für beliebiges* $a \in [0, \pi/4]$*,*

$$|f(t)| \le 1 - h_2(a)\frac{\sigma^2 t^2}{2}$$

für $|t| \le a/c$*.*

Satz 3.22 ([26], Corollary 2.2.2)**.** *Sei* X *eine beschränkte Zufallsvariable,* $|\mathrm{X}| \le c$*, mit charakteristischer Funktion* f *und Varianz* σ^2*. Dann gilt*

$$|f(t)| \le 1 - \frac{4}{\pi^2}\sigma^2 t^2$$

für $|t| \le \pi/4c$*.*

Satz 3.23 ([26], Theorem 2.2.4)**.** *Sei* X *eine beschränkte Zufallsvariable,* $|\mathrm{X}| \le c$*, mit charakteristischer Funktion* f *und Varianz* σ^2*. Dann gilt für beliebiges* $a \in [0, \pi/4]$*,*

$$\exp\left\{-h_1(a)\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\} \le |f(t)| \le \exp\left\{-h_2(a)\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}$$

für $|t| \le a/c$*.*

Die obere Schranke dieses Satzes erhalten wir aus Satz 3.21, während die untere Schranke aus Satz 3.60 folgt, den wir an späterer Stelle formulieren.

Satz 3.24 ([26], Corollary 2.2.3)**.** *Sei* X *eine beschränkte Zufallsvariable,* $|\mathrm{X}| \le c$*, mit charakteristischer Funktion* f *und Varianz* σ^2*. Dann gilt*

$$\exp\Big\{-\frac{1+a^2}{2}\sigma^2 t^2\Big\} \le |f(t)| \le \exp\Big\{-\frac{1-a^2/12}{2}\sigma^2 t^2\Big\}$$

für $|t| \le a/c$*.*

Satz 3.25 ([3], S.45)**.** *Sei* X *eine beschränkte Zufallsvariable,* $|\mathrm{X}| \le c$*, mit charakteristischer Funktion* f *und Varianz* σ^2*. Dann gilt*

$$e^{-\sigma^2 t^2} \le |f(t)| \le e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{3}}, \qquad |t| \le \frac{1}{4c}.$$

Satz 3.26 ([23], Theorem 2). *Sei* X *eine Zufallsgröße mit charakteristischer Funktion* f *und Varianz* σ^2*, es gelte* $|\mathrm{X}| \le c$*. Dann gilt*

$$|f(t)|^2 \le 1 - h_2(2ct)\, t^2\sigma^2, \qquad |t| \le \frac{\pi}{c}. \tag{7}$$

Insbesondere gilt für jedes $A \in [0, 2\pi]$

$$|f(t)|^2 \le 1 - h_2(A)\, t^2\sigma^2, \qquad |t| \le \frac{A}{2c},$$

und

$$|f(t)| \le 1 - \frac{h_2(A)\, t^2\sigma^2}{2}, \qquad |t| \le \frac{A}{2c}.$$

Dabei ist h_2 *die Funktion aus Definition 2.12.*

Der Autor von [23] bemerkt, dass die Abschätzung (7) scharf ist; die obere Schranke wird angenommen, wenn X zweipunktverteilt ist mit $\mathbf{P}[\mathrm{X} = c] = p$ und $\mathbf{P}[\mathrm{X} = -c] = 1 - p$.

Satz 3.27 ([11], Theorem 7). *Es gelte* $|\mathrm{X}| \le c$ *f.s. für eine Konstante* $c > 0$*. Dann existiert eine Konstante* $\delta > 0$ *so, dass*

$$\mathsf{Re}\, f(t) \ge 1 - \frac{1}{2}\alpha_2 t^2 + \alpha_4 \tau(ct)\, t^4$$

für $|t| \le \delta/c$*, wobei* $\tau(t) = \frac{\cos t - 1 + \frac{1}{2}t^2}{t^4} \ge 0$ *für* $t \ne 0$*, und* $\tau(0) = \frac{1}{24}$*.*

Definition 3.28. Wir definieren die gerade Funktion η_γ mit dem Parameter $\gamma > 0$ durch

$$\eta_\gamma(t) = \begin{cases} \frac{1-\cos t}{|t|^\gamma} & \text{für } t \ne 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } t = 0, \gamma = 2 \\ \infty & \text{für } t = 0, \gamma > 2 \\ 0 & \text{für } t = 0, \gamma \in (0, 2). \end{cases}$$

Für $\gamma = 2$ ist η_2 gleich der Funktion h_2 aus Definition 2.12.

Eine Verallgemeinerung der dritten Ungleichung von Satz 3.26 für den Realteil der charakteristischen Funktion finden wir im nächsten Satz.

Satz 3.29 ([11], Theorem 8)**.** *Sei* X *eine Zufallsvariable, für die* $|\mathrm{X}| \leq c$ *f.s. für eine Konstante* $c > 0$ *gelte,* η_γ *sei die Funktion aus Definition 3.28.*

(a) Für $\gamma \geq 2$ *und* $A \in (0, 2\pi]$ *gilt*

$$\operatorname{Re} f(t) \leq 1 - |t|^\gamma \mathbf{E}(|\mathrm{X}|^\gamma)\eta_\gamma(A)$$

für $|t| \leq A/c$.

(b) Für $\gamma \in (0, 2)$ *und* $A \in (0, b_\gamma]$ *gilt*

$$\operatorname{Re} f(t) \geq 1 - |t|^\gamma \mathbf{E}(|\mathrm{X}|^\gamma)\eta_\gamma(A)$$

für $|t| \leq A/c$, *wobei* $b_\gamma \in (0, \pi)$ *die eindeutige Lösung der Gleichung* $\frac{b}{\gamma} = \tan(\frac{1}{2}b)$ *für* $b \in (0, \pi)$ *ist.*

Definition 3.30. Für $\gamma \in (0, 1]$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Funktion $\eta_{n,\gamma}$ durch

$$\eta_{n,\gamma}(t) = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1}}{|t|^\gamma} \left(\cos t - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2k!}\right) & \text{für } t \neq 0 \\ 0 & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

Satz 3.31 ([11], Theorem 9)**.** *Sei* X *eine Zufallsvariable, für die gelte* $|\mathrm{X}| \leq c$ *f.s. für eine Konstante* $c > 0$. *Seien* $\gamma \in (0, 1], A > 0$, $n \in \mathbb{N}$ *und* $\eta_{n,\gamma}$ *die Funktion aus Definition 3.30.*

(a) Ist n gerade, dann gilt

$$\operatorname{Re} f(t) \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \mu_{2k} t^{2k}}{(2k)!} - |t|^\gamma\, \eta_{n,\gamma}(A)\, \mathbf{E}(|\mathrm{X}|^\gamma)$$

für $|t| \leq A/c$.

(b) Ist n ungerade, dann gilt

$$\operatorname{Re} f(t) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \mu_{2k} t^{2k}}{(2k)!} - |t|^\gamma\, \eta_{n,\gamma}(A)\, \mathbf{E}(|\mathrm{X}|^\gamma)$$

für $|t| \leq A/c$.

3.2.3 Absolutstetige Verteilungen

Wir beginnen diesen Unterabschnitt mit dem eindimensionalen Spezialfall von Satz 2.15.

Satz 3.32 ([26], Theorem 2.5.1)**.** *Sei* X *eine Zufallsvariable mit Dichte* p *und charakteristischer Funktion* f*,* δ *sei eine beliebige relle Zahl mit* $0 \le \delta \le 1$*. Gilt*

$$\sup_x p(x) \le a < \infty$$

und

$$\mathbf{E} g(|\mathrm{X}|) < \infty$$

für eine nichtnegative wachsende Funktion g*, so dass* $g(x) \to \infty$ *für* $x \to \infty$*, dann gilt*

$$|f(t)| \le 1 - \frac{(1-\delta)^3}{3\pi^2 a^2} t^2$$

für $|t| \le \pi/2c$*, und*

$$|f(t)| \le 1 - \frac{(1-\delta)^3}{12 a^2 c^2}$$

für $|t| > \pi/2c$*, wobei*

$$c = g^{-1}\left(\frac{\mathbf{E} g(|\mathrm{X}|)}{\delta}\right).$$

Setzt man $g(x) = x^\alpha$ $(\alpha > 0)$, so erhält man den folgenden Spezialfall von Korollar 2.16.

Satz 3.33 ([26], Corollary 2.5.1)**.** *Sei* X *eine Zufallsvariable mit Dichte* p *und charakteristischer Funktion* f*,* δ *sei eine beliebige relle Zahl mit* $0 \le \delta \le 1$*. Gilt* $\sup_x p(x) \le a < \infty$ *und ist* $\beta_\alpha = \mathbf{E}|\mathrm{X}|^\alpha < \infty$ $(\alpha > 0)$*, dann gilt*

$$|f(t)| \le 1 - \frac{(1-\delta)^3}{3\pi^2 a^2} t^2 \qquad \text{für } |t| \le \frac{\pi}{2}\left(\frac{\delta}{\beta_\alpha}\right)^{1/\alpha},$$

und

$$|f(t)| \le 1 - \frac{(1-\delta)^3}{12 a^2}\left(\frac{\delta}{\beta_\alpha}\right)^{2/\alpha} \qquad \text{für } |t| > \frac{\pi}{2}\left(\frac{\delta}{\beta_\alpha}\right)^{1/\alpha}.$$

Satz 3.34 ([26], Theorem 2.5.2). *Seien $c > 0$ beliebig und $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ disjunkte Intervalle, so dass jedes von der Länge $2c$ ist und*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i = \mathbb{R}$$

gilt. Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte p und charakteristischer Funktion f, setze $p_k = \mathbf{P}(\mathrm{X} \in \Delta_k), k = 1, 2, \dots$ Gilt

$$\sup_x p(x) \leq a,$$

dann gilt

$$|f(t)| \leq 1 - \frac{\sum_{k=1}^{\infty} p_k^3}{3\pi^2 a^2} t^2$$

für $|t| \leq \pi/2c$, und

$$|f(t)| \leq 1 - \frac{\sum_{k=1}^{\infty} p_k^3}{12a^2c^2}$$

für $|t| > \pi/2c$.

Korollar 3.35 ([26], Corollary 2.5.4). *Seien die Voraussetzungen von Satz 3.34 erfüllt. Dann gelten für beliebiges $l > 0$ die Ungleichungen*

$$|f(t)| \leq 1 - \frac{[Q_{\mathrm{X}}(l)]^3}{3\pi^2 a^2} t^2$$

für $|t| \leq \pi/l$, und

$$|f(t)| \leq 1 - \frac{[Q_{\mathrm{X}}(l)]^3}{3a^2 l^2} t^2$$

für $|t| > \pi/l$.

Beim nächsten Satz handelt es sich um eine Verbesserung der Abschätzung aus Satz 3.19 unter zusätzlichen Voraussetzungen.

Satz 3.36 ([26], Theorem 2.5.3). *Sei p eine Dichte mit beschränkter Variation mit charakteristischer Funktion f. Dann gilt*

$$|f(t)| \leq \frac{\mathbf{V}(p)}{t} \sin \frac{t}{\mathbf{V}(p)} \tag{8}$$

für $|t| \leq \pi \mathbf{V}(p)/2$, und

$$|f(t)| \leq \frac{\mathbf{V}(p)}{|t|} \tag{9}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Der Autor von [26] weist darauf hin, dass die Abschätzungen (8) und (9) in dem folgenden Sinne scharf sind: Für beliebiges $v > 0$ und festes t_0 mit $|t_0| \leq \pi v/2$ existiert eine Dichtefunktion p, so dass $\mathbf{V}(p) = v$ und

$$|f(t_0)| = \frac{v}{t_0} \sin \frac{t_0}{v},$$

wobei f die zur Dichte p zugehörige charakteristische Funktion ist; eine entsprechende Aussage gilt für die Ungleichung (9).

Korollar 3.37 ([26], Corollary 2.5.5)**.** *Seien die Voraussetzungen von Satz 3.36 erfüllt. Dann gilt für beliebiges* $0 < c \leq \pi/2$

$$|f(t)| \leq 1 - h_2(c)\frac{t^2}{6\mathbf{V}^2(p)}$$

für $|t| \leq c\mathbf{V}(p)$*, wobei* h_2 *die Funktion aus Definition 2.12 ist.*

Für den Spezialfall $c = \pi/2$ erhalten wir die folgende Aussage:

Korollar 3.38 ([26], Corollary 2.5.6)**.** *Seien die Voraussetzungen von Satz 3.36 erfüllt. Dann gilt*

$$|f(t)| \leq 1 - \frac{4t^2}{3\pi^2\mathbf{V}^2(p)}$$

für $|t| \leq \pi\mathbf{V}(p)/2$*.*

3.2.4 Gitterförmige Verteilungen

Satz 3.39 ([26], Theorem 2.6.1)**.** *Sei* X *eine Zufallsvariable, die nur ganzzahlige Werte annimmt,* f *die zugehörige charakteristische Funktion. Gilt* $|\mathrm{X}| \leq m$ *und*

$$\max_k \mathbf{P}(\mathrm{X} = k) \leq p,$$

dann gilt

$$|f(t)| \leq p\frac{\sin(t/2p)}{\sin(t/2)}$$

für $|t| \leq \pi/(2m+1)$*.*

Definition 3.40. Sei X eine Zufallsvariable, die nur ganzzahlige Werte annimmt, F die zugehörige Verteilungsfunktion. Wir schreiben

$$p_k = \mathbf{P}(\mathrm{X} = k), \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Dann ist

$$\mathbf{V}_d(F) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |p_{k+1} - p_k|$$

das diskrete Analogon der totalen Variation.

Satz 3.41 ([26], Theorem 2.6.4)**.** *Sei* X *eine Zufallsvariable, die nur ganzzahlige Werte annimmt, f die zugehörige charakteristische Funktion, F die Verteilungsfunktion. Dann gilt*

$$|f(t)| \leq \frac{\mathbf{V}_d(F)\sin(t/\mathbf{V}_d(F))}{2\sin(t/2)}$$

für $|t| \leq \pi\mathbf{V}_d(F)/2$.

Satz 3.42 ([27], Theorem 1)**.** *Sei $p = \{p_k : k \in \mathbb{Z}\}$ eine Gitterverteilung, wobei der Träger aus ganz $\mathbb{Z}$ besteht (das heißt, es gilt $p_k > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}$ und $\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k = 1$) mit zugehöriger charakteristischer Funktion $f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{itk} p_k$. Dann gilt*

$$|f(t)|^2 \leq \frac{I(p)}{I(p) + 4\sin^2(\frac{t}{2})} \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

wobei

$$I(p) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(p_k - p_{k-1})^2}{p_k}$$

eine diskrete Version der Fisher-Information ist.

3.2.5 Unimodale Verteilungen

Definition 3.43. Eine Zufallsvariable X und ihre Verteilungsfunktion F heißen *unimodal (eingipflig)* mit Modalwert a, wenn F auf $(-\infty, a)$ konvex und auf (a, ∞) konkav ist.

Unter Voraussetzung der Unimodalität können schärfere Ungleichungen für die charakteristische Funktion aufgestellt werden als im allgemeinen Fall [26]. [3]

[3]Beispiele für unimodale Verteilungen sind etwa die Normalverteilung, die Exponentialverteilung, die χ^2- Verteilung und die t-Verteilung [13].

Wir zitieren nun einige majorisierende Abschätzungen. Dabei erinnern wir daran, dass $Q_{\mathrm{X}}(l)$ bzw. $Q(F; l)$ die in Definition 3.17 eingeführte Konzentrationsfunktion bezeichnen.

Satz 3.44 ([26], Theorem 2.4.1)**.** *Sei* X *eine unimodale Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F und charakteristischer Funktion f. Dann gilt*

$$|f(t)| \leq Q_{\mathrm{X}}\left(\frac{\pi}{|t|}\right)$$

für alle $t \in (-\infty, \infty)$.

Korollar 3.45 ([26], Corollary 2.4.1)**.** *Sei* X *eine Zufallsvariable mit symmetrischer unimodaler Verteilung und charakteristischer Funktion f. Dann gilt*

$$\mathbf{P}(|\mathrm{X}| \geq a) \leq 1 - \left|f\left(\frac{\pi}{2a}\right)\right|$$

für alle $a > 0$.

Satz 3.46 ([26], Theorem 2.4.2)**.** *Seien* X *und* Y *Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen F und G und charakteristischen Funktionen f und g. Angenommen, es gelten die folgenden Bedingungen:*

(a) Die Verteilung von X *ist unimodal*

(b) $\mathbf{P}(|\mathrm{Y}| \leq c) = 1$ für ein $c \geq 0$

(c) $Q_{\mathrm{X}}(l) \leq \mathbf{P}(|\mathrm{Y}| \leq l/2)$ für beliebiges $l \geq 0$.

Dann gilt

$$|f(t)| \leq \operatorname{Re} g(t)$$

für $|t| \leq \pi/(2c)$.

Korollar 3.47 ([26], Corollary 2.4.2)**.** *Sei F eine unimodale Verteilungsfunktion mit charakteristischer Funktion f. Dann gilt für beliebiges $b > 0$*

$$|f(t)| \leq 1 - \frac{1 - Q(F; \pi/b)}{b^2} t^2$$

für $|t| \leq b$.

Das folgende Ergebnis ist ein Spezialfall von Satz 3.36 (man beachte, dass die totale Variation einer unimodalen beschränkten Dichtefunktion p gleich $2\sup_x p(x)$ ist):

Satz 3.48 ([26], Theorem 2.4.3). *Sei F eine absolutstetige unimodale Verteilungsfunktion mit Dichte p und charakteristischer Funktion f. Gilt*

$$\sup_x p(x) \leq a < \infty,$$

dann gilt

$$|f(t)| \leq \frac{2a}{t} \sin \frac{t}{2a}$$

für $|t| \leq \pi a$, und

$$|f(t)| \leq \frac{2a}{|t|}$$

für alle t.

Korollar 3.49 ([26], Corollary 2.4.3). *Seien die Voraussetzungen von Satz 3.48 erfüllt. Dann gilt für beliebiges $0 < c < \pi/2$*

$$|f(t)| \leq 1 - h_2(c)\frac{t^2}{24a^2}$$

für $|t| \leq 2ac$, wobei die Funktion h_2 in Definition 2.12 gegeben ist.

Setzen wir speziell $c = \pi/2$, erhalten wir das folgende Ergebnis:

Korollar 3.50 ([26], Corollary 2.4.4). *Seien die Voraussetzungen von Satz 3.48 erfüllt. Dann gilt*

$$|f(t)| \leq 1 - \frac{t^2}{3\pi^2 a^2}$$

für $|t| \leq \pi a$.

3.2.6 Diskrete unimodale Verteilungen

Definition 3.51. Eine Zufallsvariable X, die die Werte $a + nh$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, mit zugehörigen Wahrscheinlichkeiten p_n annimmt, heißt *diskret unimodal* mit dem Modalwert $a_0 = a + n_0 h$, falls $p_n \geq p_{n-1}$ für $n \leq n_0$ und $p_n \leq p_{n-1}$ für $n \geq n_0 + 1$. In diesem Fall heißen auch die zugehörige Verteilung und Verteilungsfunktion diskret unimodal.

Satz 3.52 ([26], Theorem 2.6.2). *Sei* X *eine Zufallsvariable, die nur ganzzahlige Werte annimmt,* f *die zugehörige charakteristische Funktion. Ist die Verteilung von* X *diskret unimodal, dann gilt*

$$|f(t)| \leq \frac{t}{2\sin(t/2)} Q_{\mathrm{X}}\left(\frac{\pi}{|t|}\right)$$

für $|t| \leq \pi$.

Korollar 3.53 ([26], Corollary 2.6.1). *Seien die Voraussetzungen von Satz 3.52 erfüllt. Dann gilt*

$$|f(t)| \leq \frac{\pi}{2} Q_{\mathrm{X}}\left(\frac{\pi}{|t|}\right)$$

für $|t| \leq \pi$.

Ersetzt man in Satz 3.39 die Voraussetzung der Beschränktheit durch die Unimodalität, so erhält man das folgende Ergebnis.

Satz 3.54 ([26], Theorem 2.6.3). *Sei* X *eine Zufallsvariable, die nur ganzzahlige Werte annimmt,* f *die zugehörige charakteristische Funktion. Ist die Verteilung von* X *diskret unimodal mit*

$$\max_k \mathbf{P}(\mathrm{X} = k) \leq p,$$

dann gilt

$$|f(t)| \leq p \frac{\sin(t/2p)}{\sin(t/2)}$$

für $|t| \leq \pi p$.

3.2.7 Symmetrische Verteilungen

Es ist bekannt, dass eine charakteristische Funktion genau dann reell (und damit gerade) ist, wenn die zugehörige Verteilung symmetrisch bezüglich 0 ist. [26] In diesem Fall gilt die folgende Abschätzung:

Satz 3.55 ([18], Lemma 2.2). *Sei* f *eine relle charakteristische Funktion, sei* $n \in \mathbb{N}$ *beliebig. Dann gilt*

$$f(t) \leq f(nt) \frac{1}{n} \sin\frac{\pi}{2n} + \cos\frac{\pi}{2n}$$

für beliebiges $t \in \mathbb{R}$. Dabei gilt Gleichheit bei $t = \frac{T}{n}$, wenn $f(t) = \cos \frac{\pi t}{2T}$ für ein $T > 0$, also die charakteristische Funktion der Zweipunktverteilung mit Träger $\{-\frac{\pi}{T}\} \cup \{\frac{\pi}{T}\}$ ist.

3.3 Verteilungen mit Momenten

3.3.1 Verteilungen mit Erwartungswert

Wir geben hier die eindimensionale Formulierung von Satz 2.20 an.

Satz 3.56 ([26], Theorem 2.3.5)**.** *Sei* X *eine Zufallsgröße mit charakteristischer Funktion f. Gilt*

$$\beta_1 = \mathbf{E}|\mathrm{X}| < \infty,$$

dann gilt

$$\operatorname{Re} f(t) \geq 1 - \beta_1 |t| \tag{10}$$

für alle t. Darüber hinaus ist die Differenz zwischen linker und rechter Seite von (10) eine nichtfallende Funktion von $|t|$.

3.3.2 Verteilungen mit zweitem Moment

Die folgende Aussage, in der die Existenz eines Momentes der Ordnung kleiner oder gleich 2 gefordert wird, steht in engem Zusammenhang mit Unschärferelationen und Anwendungen in der Quantenphysik. Für Details verweisen wir auf [17].

Satz 3.57 ([17], Theorem 1 (i))**.** *Sei f die charakteristische Funktion einer beliebigen Verteilung, für ein beliebiges $0 \leq \alpha \leq 2$ existiere das absolute Moment μ_α der Ordnung α. Dann gilt*

$$|f(t)| \geq 1 - \lambda_\alpha \mu_\alpha |t|^\alpha \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dabei ist λ_α definiert durch

$$\lambda_\alpha = \sup_{x \geq 0} \frac{1 - \cos x}{x^\alpha},$$

es gilt $\lambda_0 = 2, \lambda_2 = 1/2$ und

$$1 - \cos 1 \leq \lambda_\alpha \leq 2^{1-\alpha} \qquad \forall\, \alpha \in [0, 2].$$

Im eindimensionalen Fall lässt sich die Aussage von Satz 2.21 wie folgt ergänzen:

Satz 3.58 ([26], Theorem 2.3.2)**.** *Sei F eine Verteilungsfunktion mit charakteristischer Funktion f und endlicher Varianz σ^2. Dann gilt*

$$|f(t)| \geq 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Falls der Erwartungswert von F gleich Null ist, dann gilt weiterhin

$$\mathsf{Re}\, f(t) \geq 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2}$$

für alle t.

Satz 3.59 ([26], Theorem 2.3.3)**.** *Sei F eine Verteilungsfunktion mit Erwartungswert 0, charakteristischer Funktion f und endlicher Varianz σ^2. Dann gilt*

$$|1 - f(t)| \leq \frac{\sigma^2 t^2}{2}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Wir geben nun die eindimensionale Variante von Satz 2.22 an.

Satz 3.60 ([26], Theorem 2.3.4)**.** *Sei f die charakteristische Funktion einer Verteilung mit endlicher Varianz σ^2. Dann gilt für beliebiges $a \in (0, \sqrt{2})$*

$$|f(t)| \geq \exp\Big\{ - h_1(a) \frac{\sigma^2 t^2}{2} \Big\}$$

für $|t| \leq a/\sigma$, wobei hier und im folgenden $\sigma := \sqrt{\sigma^2}$ sei, h_1 wie in Definition 2.12.

Satz 3.61 ([26], Theorem 2.3.8)**.** *Sei F eine Verteilungsfunktion mit Erwartungswert 0, charakteristischer Funktion f, endlicher Varianz σ^2 und dem ersten absoluten Moment β_1. Dann gilt*

$$|f(t)|^2 \leq \cos\Big(\pi - \sqrt{\pi^2 - 2\pi\beta_1|t| + 2\sigma^2 t^2}\Big)$$

für $|t| \leq \pi\beta_1/\sigma^2$.

Satz 3.62 (Pfannschmidt, nach [5], Satz 1.1.4)**.** *Sei f die charakteristische Funktion einer symmetrischen Verteilung F mit endlicher Varianz σ^2. Dann gestattet f die folgende Darstellung:*

$$f(t) = \cos(\sigma t) + \omega(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

wobei

$$\omega(t) = 2J(\frac{t}{2}) + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} 4^k J(\frac{t}{2^k}) \prod_{l=1}^{k-1} \cos(\frac{\sigma t}{2^l}), \qquad t \in \mathbb{R},$$

und J hat dieselbe Gestalt wie in Satz 3.67.

Satz 3.63 (Pfannschmidt, [5], Satz 1.3.2)**.** *Sei f die charakteristische Funktion einer symmetrischen, unimodalen Verteilung mit endlicher Varianz σ^2. Dann gilt*

$$f(x) \geq \frac{\sin\sqrt{3}\,\sigma x}{\sqrt{3}\,\sigma x}, \qquad |x| \leq \frac{\pi}{\sqrt{3}\,\sigma}.$$

Satz 3.26 lässt sich wie folgt auf den unbeschränkten Fall verallgemeinern:

Satz 3.64 ([23], Theorem 3)**.** *Sei* X *eine Zufallsvariable mit charakteristischer Funktion f und Varianz σ^2, sei $c > 0$. Dann gilt*

$$|f(t)|^2 \leq 1 - h_2(2ct)t^2(\sigma^2 - 2\,\mathbf{E}\mathrm{X}^2 \mathbb{1}_{\{|\mathrm{X}|>c\}}), \qquad |t| \leq \frac{\pi}{c}.$$

Insbesondere gilt für jedes $A \in [0, 2\pi]$

$$|f(t)|^2 \leq 1 - \frac{h_2(A)}{2}t^2(\sigma^2 - 2\,\mathbf{E}\mathrm{X}^2 \mathbb{1}_{\{|\mathrm{X}|>c\}}), \qquad |t| \leq \frac{A}{2c}.$$

Korollar 3.65 ([26], Corollary 2.5.2)**.** *Sei* X *eine Zufallsvariable mit Dichte p, charakteristischer Funktion f und Varianz σ^2. Gilt*

$$\sup_x p(x) \leq a < \infty,$$

dann gilt

$$|f(t)| \leq 1 - \frac{9t^2}{64\pi^2 a^2}$$

für $|t| \leq \pi/4\sigma$, und

$$|f(t)| \leq 1 - \frac{9}{1024a^2\sigma^2}$$

für $|t| > \pi/4\sigma$.

Korollar 3.66 ([26], Corollary 2.5.3)**.** *Seien die Voraussetzungen von Korollar 3.65 erfüllt. Dann gilt*

$$|f(t)| \leq \exp\{-\frac{9t^2}{64a^2(16\sigma^2t^2+\pi^2)}\}$$

für alle t.

Die folgende bekannte Ungleichung wurde unabhängig voneinander von H.-J. Roßberg und den Physikern L. Mandelstam und I. Tamm bewiesen.

Satz 3.67 ([19] sowie [21], Abschnitt A.2, Satz 3)**.** *Sei f die charakteristische Funktion einer symmetrischen Verteilung mit der Varianz σ^2. Wenn für das vierte Moment μ_4 die Bedingung $\sigma^2 < \mu_4 \leq \infty$ erfüllt ist*[4] *, so gilt*

$$f(t) > \cos\sigma t + 2J\left(\frac{t}{2}\right), \qquad 0 < |\sigma t| \leq \pi/2.$$

Dabei ist

$$J(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\cos tx - \cos\sigma t)^2 dF(x), \qquad t \in \mathbb{R},$$

und F die zu f gehörige Verteilungsfunktion.

3.3.3 Verteilungen mit Momenten höherer Ordnung

Die erste Aussage dieses Unterabschnitts ist die eindimensionale Formulierung von Satz 2.26.

Korollar 3.68 ([26], Corollary 2.3.1)**.** *Sei F die Verteilungsfunktion einer symmetrischen Verteilung mit charakteristischer Funktion f, Varianz σ^2 und viertem Moment μ_4. Dann gilt*

$$1 - \frac{\sigma^2t^2}{2} \leq |f(t)| \leq 1 - \frac{\sigma^2t^2}{2} + \frac{\mu_4t^4}{24}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

[4] Nach [21], Abschnitt A.2, Satz 1 schließt die Bedingung $\sigma^2 < \mu_4$ lediglich die Zweipunktverteilung aus. Diese besitzt unter den genannten Voraussetzungen die charakteristische Funktion $f(t) = \cos\sigma t$.

Satz 3.69 ([26], Theorem 2.3.6). *Sei F eine Verteilungsfunktion mit Erwartungswert 0, charakteristischer Funktion f und Varianz σ^2. Bezeichne β_α das absolute Moment der Ordnung $\alpha > 0$. Gilt*

$$\beta_{2+\delta} < \infty$$

für ein $0 < \delta \leq 1$, dann gilt

$$|f(t)|^2 \leq 1 - \sigma^2 t^2 + 2c(\delta)(\beta_{2+\delta} + \sigma^2 \beta_\delta)|t|^{2+\delta} \tag{11}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei $c(\delta)$ die (nur von δ abhängige) Konstante aus Definition 2.27 ist.

Das folgende Korollar zu Satz 3.69 ist identisch mit Satz 2.28 für $m = 1$.

Korollar 3.70 ([26], Corollary 2.3.2). *Seien die Voraussetungen von Satz 3.69 erfüllt. Dann gilt*

$$|f(t)| \leq 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + c(\delta)(\beta_{2+\delta} + \sigma^2 \beta_\delta)|t|^{2+\delta} \tag{12}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Die Ungleichungen (11) und (12) sind scharf (in dem Sinne, dass die Konstante vor $|t|^{2+\delta}$ nicht verkleinert werden kann), wenn wir das Verhalten einer charakteristischen Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ betrachten. Für eine Umgebung des Ursprungs können jedoch genauere Abschätzungen gewonnen werden [26]. Tatsächlich impliziert Korollar 3.70 die folgende Aussage:

Satz 3.71 ([26], Theorem 2.3.7). *Sei F eine Verteilungsfunktion mit charakteristischer Funktion f, Varianz σ^2 und endlichem absoluten Moment $\beta_{2+\delta_0}, 0 < \delta_0 \leq 1$. Dann existiert für beliebiges $0 < \delta < \delta_0$ und $\varepsilon > 0$ ein $\Delta > 0$, so dass*

$$|f(t)| \leq 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \varepsilon |t|^{2+\delta}$$

für $|t| \leq \Delta$ gilt.

Satz 3.72 ([26], Theorem 2.3.9). *Sei F eine Verteilungsfunktion mit Erwartungswert 0, Varianz σ^2 und charakteristischer Funktion f. Das absolute Moment $\beta_{2+\delta}$ sei endlich für ein $\delta > 0$. Dann gilt*

$$|f(t)| \leq \{2c(\delta)(\beta_{2+\delta} + \sigma^2 \beta_\delta)\}^{1/2} |t|^{1+\delta/2}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei $c(\delta)$ die Konstante aus Definition 2.27 ist.

Satz 3.73 ([5], Satz 2.1.7). *Sei f die charakteristische Funktion einer symmetrischen Verteilung mit Streuung σ^2 und viertem Moment μ_4. Wir nehmen an, dass keine reellen Zahlen a und b existieren, so dass $f(x) = b\cos(ax) - b + 1, x \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$f(x) < 1 + \frac{\sigma^4}{\mu_4}\left(\cos(\sqrt{\frac{\mu_4}{\sigma^2}}\,x) - 1\right), \qquad 0 < \left|\sqrt{\frac{\mu_4}{\sigma^2}}\,x\right| \leq \pi.$$

Die nächste Aussage ist eine Folgerung aus der soeben formulierten Ungleichung.

Satz 3.74 ([5], Satz 2.2.1). *Sei f eine nichtnegative charakteristische Funktion mit zugehöriger Streuung σ^2 und viertem Moment μ_4. Dann gilt*

$$\mu_4 \geq 2\sigma^4.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $f(x) = \cos^2(ax)$, $x \in \mathbb{R}$ für ein reelles a.

Satz 3.75 ([17], Theorem 1 (ii)). *Sei Φ die charakteristische Funktion einer nichtdegenerierten Verteilung F, für die das absolute Moment μ_α der Ordnung α für ein $\alpha > 2$ endlich sei. Dann gibt es keine Konstante $C > 0$, die nur von α und F abhängt, so dass*

$$|\Phi(t)| \geq 1 - C|t|^\alpha \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Satz 3.76 ([23], Theorem 1). *Sei X eine Zufallsvariable mit charakteristischer Funktion f. Ist $\mu_{4l} = \mathbf{E}[\mathrm{X}^{4l}] < \infty$ für ein $l \in \mathbb{N}_0$, dann gilt*

$$S_{2l+1}(t) \leq \mathsf{Re}\, f(t) \leq S_{2l}(t),$$

wobei $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} t^{2k}(-1)^k \mu_{2k}/(2k)!$.

In Vorbereitung der beiden nachfolgenden Sätze zitieren wir an dieser Stelle zwei Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen:

Proposition 3.77 ([12]). *Sei X eine Zufallsvariable mit $\mu_{4m-2} < \infty$ und $|\mathrm{supp}(\mathrm{X})| \geq 2m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Dann existiert genau eine Menge reller Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_m$ und $y_1, y_2, \ldots, y_m$, die die folgenden Bedingungen erfüllen:*

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1, \tag{13}$$

$$p_1 y_1^{2k} + p_2 y_2^{2k} + \ldots + p_m y_m^{2k} = \mu_{2k}, \quad k = 1, 2, \ldots, 2m-1, \tag{14}$$

$$p_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad 0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_m. \tag{15}$$

Proposition 3.78 ([12]). *Sei* X *eine Zufallsvariable mit* $\mu_{4m} < \infty$ *und* $|\text{supp}(X)| \geq 2m + 1$ *für ein* $m \in \mathbb{N}$. *Dann existiert genau eine Menge reller Zahlen* $p_1, p_2, \ldots, p_{m+1}$ *und* $y_1, y_2, \ldots, y_m$, *die die folgenden Bedingungen erfüllen:*

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{m+1} = 1, \tag{16}$$

$$p_1 y_1^{2k} + p_2 y_2^{2k} + \ldots + p_m y_m^{2k} = \mu_{2k}, \quad k = 1, 2, \ldots, 2m, \tag{17}$$

$$p_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m+1, \qquad 0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_m. \tag{18}$$

Wir kommen nun zum eigentlichen Anliegen der Autoren von [12], den beiden nachfolgenden Sätzen.

Satz 3.79 ([12], Theorem 3). *Sei* X *eine Zufallsvariable mit* $\beta_{4m+1} < \infty$ *und* $|\text{supp}(X)| \geq 2m$ *für ein* $m \in \mathbb{N}$, *sei* f *die zugehörige charakteristische Funktion. Seien* $p_1, p_2, \ldots, p_m$ *und* $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *reelle Zahlen, die die Bedingungen (13)-(15) erfüllen. Dann gilt*

$$\mathsf{Re}\, f(t) \geq \sum_{i=1}^{m} p_i \cos(y_i t)$$

für $|t| \leq \min\{\frac{\pi}{y_m}, \delta_0\}$, *wobei*

$$\delta_0 = (2m+1) \frac{\beta_{4m} - s_1 \beta_{4m-2} + \ldots + (-1)^m s_m \beta_{2m}}{\beta_{4m+1} - s_1 \beta_{4m-1} + \ldots + (-1)^m s_m \beta_{2m+1}},$$

und $s_1, s_2, \ldots, s_m$ *sind positive reelle Zahlen, die durch die Koeffizienten der Funktion*

$$H_m(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - y_i^2) = x^m - s_1 x^{m-1} + s_2 x^{m-2} - \ldots + (-1)^m s_m, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{19}$$

gegeben sind.

Satz 3.80 ([12], Theorem 4). *Sei* X *eine Zufallsvariable mit* $\beta_{4m+3} < \infty$ *und* $|\text{supp}(X)| \geq 2m+1$ *für ein* $m \in \mathbb{N}$, *sei* f *die zugehörige charakteristische Funktion. Seien* $p_1, p_2, \ldots, p_{m+1}$ *und* $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *reelle Zahlen, die die Bedingungen (16)-(18) erfüllen. Dann gilt*

$$\mathsf{Re}\, f(t) \leq p_{m+1} + \sum_{i=1}^{m} p_i \cos(y_i t)$$

für $|t| \leq \min\{\frac{\pi}{y_m}, \delta_1\}$, *wobei*

$$\delta_1 = (2m+2) \frac{\beta_{4m+2} - s_1 \beta_{4m} + \ldots + (-1)^m s_m \beta_{2m+2}}{\beta_{4m+3} - s_1 \beta_{4m+1} + \ldots + (-1)^m s_m \beta_{2m+3}},$$

und $s_1, s_2, \ldots, s_m$ *sind wie in Satz 3.79.*

Das folgende Korollar gibt Bedingungen an, unter denen die in den Sätzen 3.67 und 3.73 gegebenen Schranken präzisiert werden können.

Korollar 3.81 ([12], Corollary 1). *Sei* X *eine Zufallsvariable mit charakteristischer Funktion f.*

(a) Gilt $\beta_5 < \infty$ und $|\mathrm{supp}(\mathrm{X})| \geq 2$, dann gilt

$$\mathsf{Re}\, f(t) \geq \cos(\sqrt{\beta_2} t)$$

für $|t| \leq \min\{\frac{\pi}{\sqrt{\beta_2}}, 3\frac{\beta_4-\beta_2^2}{\beta_5-\beta_2\beta_3}\}$.

(b) Gilt $\beta_7 < \infty$ und $|\mathrm{supp}(\mathrm{X})| \geq 3$, dann gilt

$$\mathsf{Re}\, f(t) \leq 1 - \frac{\beta_2^2}{\beta_4} + \frac{\beta_2^2}{\beta_4} \cos\left(\sqrt{\frac{\beta_4}{\beta_2}} t\right)$$

für $|t| \leq \min\{\frac{\pi}{\sqrt{\beta_4/\beta_2}}, 4\frac{\beta_2\beta_6-\beta_4^2}{\beta_2\beta_7-\beta_4\beta_5}\}$.

Korollar 3.82 ([12], Corollary 2). *Sei* X *eine Zufallsvariable mit $\beta_9 < \infty$ und $|\mathrm{supp}(\mathrm{X})| \geq 4$, sei f die zugehörige charakteristische Funktion, so gilt*

$$\mathsf{Re}\, f(t) \geq p - 1 \cos(y_1 t) + p_2 \cos(y_2 t)$$

für $|t| \leq \min\{\frac{\pi}{y_2}, 5\frac{\beta_8-r\beta_6+s\beta_4}{\beta_9-r\beta_7+2\beta_5}\}$, wobei

$$p_1 = \frac{\sqrt{r^2-4s}+(r-2\mu_2)}{2\sqrt{r^2-4s}}, \qquad p_1+p_2 = 1, \qquad y_1 = \sqrt{\frac{r-\sqrt{r^2-4s}}{2}},$$
$$y_2 = \sqrt{\frac{r+\sqrt{r^2-4s}}{2}}, \qquad r = \frac{\mu_6-\mu_2\mu_4}{\mu_4-\mu_2^2}, \qquad s = \frac{\mu_2\mu_6-\mu_4^2}{\mu_4-\mu_2^2}.$$

Mit dem nun folgenden Satz zitieren wir eine Verallgemeinerung der zweiten Aussage von Satz 3.58.

Satz 3.83 ([11], Theorem 5). *Sei* X *eine Zufallsvariable mit $\mu_{2n} < \infty$ für ein $n \in \mathbb{N}$.*

(a) Ist n ungerade, dann gilt

$$\mathsf{Re}\, f(t) \geq \cos(t\mu_1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k}(\mu_{2k} - \mu_1^{2k}), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Ist n gerade, so kehrt sich die Ungleichung in (a) um.

Satz 3.84 ([11], Theorem 6)**.** *Sei X eine Zufallsvariable mit $\mu_{2n} < \infty$ für ein $n \in \mathbb{N}$, weiterhin sei $\beta_m = \mathbf{E}(|\mathrm{X}|^m)$ für $m \leq 2n$.*

(a) Ist n ungerade, dann gilt

$$\operatorname{Re} f(t) \geq \cos(t\beta_1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k} (\beta_{2k} - \beta_1^{2k}), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Ist n gerade, so kehrt sich die Ungleichung in (a) um.

3.4 Verteilungen mit Voraussetzungen an Differenzierbarkeit

Wir beginnen diesen Unterabschnitt, indem wir den Begriff der analytischen charakteristischen Funktion einführen.

Definition 3.85. Eine charakteristische Funktion f heißt *analytische charakteristische Funktion*, wenn eine Funktion A der komplexen Variablen z existiert, die für ein $\rho > 0$ im Kreis $\{z : |z| < \rho\}$ regulär ist, und eine Konstante $\Delta > 0$ existiert, so dass $A(t) = f(t)$ für $|t| < \Delta$. [5]

Für jede analytische charakteristische Funktion $f(t)$ existiert eine Darstellung als Maclaurin-Reihe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \mu_k}{k!} z^k$$

für $|z| < \rho$, wobei ρ den Konvergenzradius der Reihe bezeichnet. Weiterhin ist $f(z)$ wenigstens in dem Streifen $\{z : |\operatorname{Im} z| < \rho\}$ regulär. ([15], Abschnitt 7.1.)
Wir sind nun vorbereitet für den folgenden

[5] Somit ist eine analytische charakteristische Funktion eine charakteristische Funktion, die in einer Umgebung des Ursprungs der komplexen z-Ebene mit einer regulären analytischen Funktion übereinstimmt. Beispiele von Verteilungen mit analytischen charakteristischen Funktionen sind etwa die Normalverteilung, die Gamma-Verteilung und die Poisson-Verteilung.

Satz 3.86 ([15], Theorem 7.3.1)**.** *Sei $f(z)$ eine analytische charakteristische Funktion, sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\mathsf{Re}\,[f(iy) - f(t+iy)] \geq 4^{-n}\mathsf{Re}\,[f(iy) - f(2^n t + iy)],$$

vorausgesetzt, der Punkt $z = iy$ liegt im Inneren des Regularitätsstreifens von $f(z)$.

Satz 3.87 ([15], Theorem 7.3.2)**.** *Sei f eine analytische charakteristische Funktion, die den Streifen $-\alpha < \mathsf{Im}\,(z) = y < \beta$ als Regularitätsstreifen besitzt, wobei $\alpha > 0, \beta > 0$. Dann gilt*

$$f(iy) \geq e^{-\mu_1 y}$$

für $-\alpha < y < \beta$. Dabei ist $\mu_1 = i^{-1}f'(0)$ das erste Moment der f zugehörigen Verteilung.

Nach [22], Proposition 4.3.10 bleibt diese Aussage auch dann gültig, wenn entweder $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$ gilt.

Falls der Regularitätsstreifen einer analytischen charakteristische Funktion $f(z)$ die ganze z-Ebene ist, ist $f(z)$ eine ganze Funktion. Diesem Fall widmen sich die folgenden zwei Aussagen, denen wir jedoch zunächst eine Definition voranstellen.

Definition 3.88. Sei $f(z)$ eine ganze charakteristische Funktion. Mit

$$M(r; f) = \max_{|z| \leq r} |f(z)|$$

bezeichnen wir das *Maximummodul* von $f(z)$ im Kreis $|z| \leq r$.

Lemma 3.89 ([15], Lemma 7.1.1)**.** *Sei $f(z)$ eine ganze charakteristische Funktion, dann gilt*

$$[f(ir) + f(-ir)] \geq M(r; f) \geq \frac{1}{2}[f(ir) + f(-ir)].$$

Lemma 3.90 ([15], Lemma 8.1.2)**.** *Sei $f(z)$ eine ganze charakteristische Funktion ($z = t + iy$; t, y reell). Dann existiert eine positive Konstante $M = M_f$, die von f abhängt, aber unabhängig von y ist, so dass*

$$\log f(iy) \geq -M|y|.$$

Wir beschränken uns im folgenden darauf, relle Differenzierbarkeit vorauszusetzen und geben zunächst das Ergebnis an, dass eine relle charakteristische Funktion von ihrer Taylorentwicklung eingehüllt wird. Wir erinnern daran, dass eine charakteristische Funktion genau dann n-mal in Null differenzierbar ist, wenn alle Momente μ_k der Ordnung $k \leq n$ (n gerade) bzw. der Ordnung $k \leq n-1$ (n ungerade) existieren. In diesem Fall gilt

$$\mu_k = (-i)^k f^{(k)}(0)$$

([26], Theorem 1.5.1. und 1.5.2).

Satz 3.91 ([5], Satz 2.1.1)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$ und f eine reelle charakteristische Funktion, deren $(2n)$-te Ableitung existiert. Bezeichne μ_{2k} das $(2k)$-te Moment, $k = 0, 1, \ldots, n$, der zu f gehörigen Verteilung. Es gilt*

$$\sum_{k=0}^{2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor+1} (-1)^k \frac{\mu_{2k}}{(2k)!} x^{2k} \leq f(x) \leq \sum_{k=0}^{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} (-1)^k \frac{\mu_{2k}}{(2k)!} x^{2k}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Der nächste Satz vergleicht zwei charakteristische Funktionen in einer Nullumgebung, wenn bekannt ist, dass ihre Streuungen nicht gleich sind.

Satz 3.92 ([5], Satz 2.1.3)**.** *Seien f und h reelle charakteristische Funktionen, deren zweite Ableitungen existieren. Die zugehörigen Varianzen seien durch σ_f^2 bzw. σ_h^2 bezeichnet. Falls $\sigma_f^2 < \sigma_h^2$ gilt, dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $f(x) > h(x)$ für $x \in (0, \varepsilon)$.*

Der nun folgende Satz ist eine Verbesserung der Ungleichung (8) in Satz 3.36 unter zusätzlichen Voraussetzungen.

Satz 3.93 ([26], Theorem 2.5.4)**.** *Sei p eine Dichte mit zugehöriger charakteristischer Funktion f. Ist p $(n-1)$-mal differenzierbar und $p^{(n-1)}$ eine Funktion von beschränkter Variation, dann gilt*

$$|f(t)| \leq \frac{\mathbf{V}(p^{(n-1)})}{|t|^n}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Satz 3.94 ([28], Theorem 1)**.** *Sei p eine stetig differenzierbare Dichtefunktion auf $\mathbb{R}$ mit charakteristischer Funktion f. Dann gilt*

$$[\mathsf{Re}\, f(t)]^2 + \frac{t^2}{I(p)}[\mathsf{Im}\, f(t)]^2 \leq \frac{1 + \mathsf{Re}\, f(2t)}{2} \tag{20}$$

und

$$[\mathsf{Im}\, f(t)]^2 + \frac{t^2}{I(p)}[\mathsf{Re}\, f(t)]^2 \le \frac{1 - \mathsf{Re}\, f(2t)}{2}, \tag{21}$$

wobei

$$I(p) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d}{dx} \ln p(x) \right)^2 p(x) dx$$

die Fisher-Information von p bezeichnet und als endlich angenommen wird.

Bemerkung 3.95 ([28])**.** Addiert man die Ungleichungen (20) und (21), so erhält man die Aussage

$$|f(t)|^2 \le \frac{I(p)}{I(p) + t^2} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Multipliziert man dieselben Ungleichungen, so folgt

$$\frac{t^2}{I(p)}|f(t)|^4 + \left(1 - \frac{t^2}{I(p)}\right)^2 [\mathsf{Re}\, f(t)]^2 [\mathsf{Im}\, f(t)]^2 \le \frac{1 - [\mathsf{Re}\, f(2t)]^2}{4}.$$

Falls f reellwertig ist, so gilt insbesondere

$$|f(t)|^4 \le \frac{1 - |f(2t)|^2}{4t^2} I(p) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

3.5 Sonstige Verteilungen

3.5.1 Approximation der Normalverteilung durch zwei Summanden

Wir zitieren eine Ungleichung, die für den Beweis einer Stabilitätsaussage für die Normalverteilung nützlich ist. Dazu zunächst einige Vorbetrachtungen. Sei $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2$ die Summe zweier unabhängiger, nichtdegenerierter Zufallsvariablen, und die Verteilungsfunktion F von X erfülle die Bedingung

$$d(F, \Phi) = \sup_x |F(x) - \Phi(x)| < \varepsilon,$$

wobei ε eine hinreichend kleine positive Zahl sei, Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.[6]
Wir "schneiden" nun die Zufallsvariablen X_1 und X_2 am Punkt $N = \sqrt{\ln(1/\varepsilon)}$ ab, indem wir definieren:

$$\mathrm{X}_j^* = \begin{cases} \mathrm{X}_j & \text{für } |\mathrm{X}_j| \leq N \\ 0 & \text{für } |\mathrm{X}_j| > N \end{cases} \qquad (j = 1, 2).$$

Es bezeichne f^* die charakteristische Funktion der Summe $\mathrm{X}^* = \mathrm{X}_1^* + \mathrm{X}_2^*$. Da diese Zufallsvariablen beschränkt sind, sind ihre charakteristischen Funktionen ganze Funktionen und daher für alle Werte der komplexen Variablen z definiert.

Lemma 3.96 ([14], Lemma 10.1.4)**.** *Für $|z| \leq T = \frac{N}{8} = \frac{1}{8}\sqrt{\ln(1/\varepsilon)}$ und hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ gilt die Ungleichung*

$$|f^*(z)| > \frac{1}{2}\, e^{-\frac{1}{2}|z|^2}.$$

3.5.2 Charakteristische Funktionen mit positiv definiten Dichten

Um den Begriff der selbstadjungierten Dichte einzuführen, verzichten wir an dieser Stelle auf deren ursprüngliche Definition und geben stattdessen ein Resultat zu ihrer Charakterisierung an.

Satz 3.97 ([5], Satz 1.5.5)**.** *Eine stetige, positiv definite Dichte ist genau dann selbstadjungiert, wenn sie mit der zugehörigen charakteristischen Funktion f die Gleichung*

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f$$

erfüllt.

Wir nennen auch die einer selbstadjungierten Dichte zugehörige charakteristische Funktion selbstadjungiert.

[6]Wir betrachten also zwei unabhängige Zufallsgrößen, deren Summe in einem gewissen Sinne die Normalverteilung approximiert.

Satz 3.98 ([5], Satz 5.3.1). *Sei f eine selbstadjungierte charakteristische Funktion, deren Varianz σ^2 existiert. Dann gilt*

$$f''(y) \leq \frac{\frac{1}{2}\,y^2\sigma^2 - \sigma^4 f(y)}{\frac{1}{2}\,y^2 + \sigma^2}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Es zeigt sich, dass für ein Paar $(p, \tilde{p})$ positiv definiter Dichten mit zugehörigen Streuungen das Produkt dieser Streuungen nicht beliebig klein werden kann [5]. Dieses Phänomen ist auch als Unschärferelation positiv definiter Dichten bekannt. Der genaue Wert der größten unteren Schranke Λ aller Streuungsprodukte positiv definiter Dichtepaare ist bisher unbekannt, wir zitieren jedoch die folgende Abschätzung:

Satz 3.99 ([5], Satz 5.2.2; [1]). *Für das minimale Streuungsprodukt Λ gilt*

$$0.543 < \Lambda < 0.8502370053.$$

Satz 3.100 ([5], Satz 5.3.2). *Sei f eine selbstadjungierte charakteristische Funktion, deren Streuungsprodukt Λ ist. Dann existiert $f^{(4)}$, und es gilt*

$$\mu_4 := f^{(4)}(0) \leq \sigma^4 + 2,$$

wobei σ^2 die Streuung von f bezeichnet.

3.5.3 Verteilungsfunktionen mit bekannter Majorante

Satz 3.101 ([22], Proposition 4.4.4.). *Sei $h > 0$ eine Funktion auf einem gewissen Intervall $[s_0, \infty)$, die stetig ist und streng monoton gegen ∞ strebt. Sei h^{-1} die Inverse dieser Funktion. Erfüllt die Verteilungsfunktion F die Beziehung*

$$F(x) \leq e^{xh^{-1}(-x)}, \quad x < x_0,$$

für ein gewisses $x_0 \leq 0$, dann ist die zugehörige charakteristische Funktion f analytisch, wobei ihr Regularitätsgebiet die Halbebene $\{z : \mathsf{Im}\, z > 0\}$ ist, und für jedes $y > 0$ gilt

$$f(is) \leq e^{(s+y)h(s+y)}, \quad s > s_0(y).$$

3.5.4 Nach links beschränkte Verteilungsfunktionen

Definition 3.102. Eine Verteilungsfunktion F, die $F(x) = 0$ für ein $x \in \mathbb{R}$ erfüllt, heißt *nach links beschränkt*, und ihre *linke Extremität* ist definiert durch

$$\operatorname{lext}(F) = \sup\{x : F(x) = 0\};$$

im Fall $F > 0$ schreiben wir $\operatorname{lext}(F) = -\infty$.

Satz 3.103 ([22], Proposition 4.9.4.)**.** *Sei F Verteilungsfunktion,* $\operatorname{lext}(F) = 0$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Das erste Moment μ_1 existiert;

(ii) $|\mathsf{Im}\, f(t)/t| < C$ für alle $t \neq 0$ und ein $C > 0$;

(iii) $\int_0^\varepsilon (1 - \mathsf{Re}\, f(u))/u^2 du$ konvergiert für beliebiges $\varepsilon > 0$.

Literatur

[1] Androshchuk, M. O.: Improvement of Laue's constant estimation for positive-definite densities. *Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyïv. Univ. Im. Tarasa Shevchenka* 2004, No. 4, 11-13 (2004).

[2] Bisgaard, T. M., Sasvári, Z.: *Characteristic Functions and Moment Sequences.* Nova Science Publishers, Huntington, 2000.

[3] Doob, J. L.: *Stochastic Processes*, Wiley, New York, 1953.

[4] Dreier, I.: Inequalities between the second and fourth moments. *Statistics* 32, 189-198 (1998).

[5] Dreier, I.: *Ungleichungen für reelle charakteristische Funktionen und zugehörige Momente.* Dissertation, Technische Universität Dresden, 1999.

[6] Gamkrelidze, N. G.: An inequality for multidimensional characteristic function. *Theory Probab. Appl.* 36 (1991), 594-596.

[7] Gamkrelidze, N. G.: An inequality for a multidimensional characteristic function. *Theory Probab. Appl.* 45, No.1, 133-135 (2000); translation from *Teor. Veroyatn. Primen.* 45, No.1, 175-177 (2000).

[8] Gnedenko, B. W.: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie.* Akademie-Verlag, Berlin, 1991.

[9] Goenner, L.: *Ungleichungen für charakteristische Funktionen.* Diplomarbeit, Technische Universität Dresden, 2007.

[10] Hewitt, E., Ross, K. A. : *Abstract Harmonic Analysis I.* Springer, New York/Berlin u.a. 1979.

[11] Hu, C.-Y., Lin, G. D.: Some inequalities for characteristic functions. *Math. Anal. Appl.* 309, No. 1, 336-352 (2005).

[12] Hu, C.-Y., Lin, G. D.: Some inequalities for characteristic functions. II. *Math. Anal. Appl.* 328, No. 1. 201-219 (2007).

[13] Laue, G., Riedel, M., Roßberg, H.-J.: *Unimodale und positiv definite Dichten.* Teubner, Stuttgart/Leipzig, 1999.

[14] Lukacs, E., Laha, R.G.: *Applications of Characteristic Functions.* Griffin, London, 1964.

[15] Lukacs, E.: *Characteristic Functions.* Griffin, London, 1970.

[16] Lukacs, E.: *Developments in Characteristic Function Theory.* Griffin, London, 1983.

[17] Luo, S., Wang, Z., Zhang, Q.: An inequality for characteristic functions and its applications to uncertainty relations and the quantum Zeno effect. *J. Phys. A, Math. Gen.* 35, No. 28, 5935-5941 (2002).

[18] Luo, S., Zhang, Z.: An extremal problem for Fourier transforms of probabilities. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I 341, 293-296 (2005).

[19] Mandelstam, L., Tamm, I.: The uncertainty relation between energy and time in nonrelativistic quantum mechanics. *J. Phys. USSR* 9, 249-254 (1945).

[20] Matysiak, W., Szabłowski, P.J.: Some inequalities for characteristic functions. *J. Math. Sci.*, New York 105, No.6, 2594-2598 (2001)

[21] Roßberg, H.-J.: *Positiv definite Verteilungsdichten.* Anhang zu [8].

[22] Roßberg, H.-J., Jesiak, B., Siegel, G.: *Analytic Methods of Probability Theory.* Akademie-Verlag, Berlin, 1985.

[23] Rozovskij, L. V.: On the J. Doob inequality for characteristic functions. *Theory Probab. Appl.* 44, No.3, 588-590 (1999); translation from Teor. Veroyatn. Primen. 44, No.3, 650-652 (1999).

[24] Sasvári, Z.: *Positive Definite and Definitizable Functions.* Akademie-Verlag, Berlin, 1994.

[25] Shervashidze, T.: On bounds for the characteristic functions of some degenerate multidimensional distributions. *Georgian Math. J.* 10, No. 2, 353-362 (2003).

[26] Ushakov, N. G.: *Selected Topics in Characteristic Functions.* VSP, Zeist, 1999.

[27] Zhang, Z.: An upper bound for characteristic functions of lattice distributions with applications to survival probabilities of quantum states. *J. Phys. A: Math. Theor.* 40 (2007) 131-137.

[28] Zhang, Z.: Inequalities for characteristic functions involving Fisher information. *C.R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I 344 (2007) 327-330.

Dresdner Schriften zur Mathematischen Stochastik

1/2008 **Dietmar Ferger, Michael Scholz**
Limit Distributions of V– and U–Statistics in Terms of Multiple Stochastic Wiener–Type Integrals

2/2007 **Robert Knobloch, Lothar Partzsch**
Uniform Conditional Ergodicity and Intrinsic Ultracontractivity

1/2007 **Dietmar Ferger, Daniel Vogel**
Weak Convergence of the empirical process and the rescaled empirical distribution function in the Skorokhod product space

1/2006 **Jens Klotsche, Lars Pieper, Dietmar Ferger**
Estimation of an optimal cut–off for a continuous risk factor for estimating clinically valid thresholds

3/2005 **Mark Freidlin, Matthias Weber**
Small Diffusion Asymptotics for Exit Problems on Graphs

2/2005 **Jürgen Franz**
On Posterior Distribution and Loss Functions for Parameter Estimation in Weibull Processes

1/2005 **Dietmar Hudak, Matthias Weber**
Generators of Diffusion Processes on Trees, their Resolvent and their Extension to Self–Adjoint Operators

4/2004 **Mark Freidlin, Matthias Weber**
On stochasticity of solutions of differential equations with a small delay

3/2004 **Dietmar Ferger, Wiltrud Kuhlisch**
A test for a jump point in the Weibull distribution with application to a problem in the materials research

2/2004 **Dietmar Ferger**
The Maximum Likelihood method with estimated nuisance parameters in nonparametric hazard rate models with discontinuities

1/2004 **Dietmar Ferger**
Weighted least squares estimators for a change–point

10/2003 **Dietmar Ferger**
A two–dimensional Cramér–von Mises test for the two–sample problem with dispersion alternatives

9/2003 **Yahia Abdel-Aty, Jürgen Franz, M. A. Mahmoud:**
Bayesian Prediction intervals for sample functions from a general class of distribution

8/2003 **Yahia Abdel-Aty, Jürgen Franz, M. A. Mahmoud:**
Bayesian Prediction bounds for sample functions in the case of exponential distribution

7/2003 **Jürgen Franz, Yahia Abdel-Aty**
Bayes Inference Problems in Failure–Repair Processes

6/2003 **Yahia Abdel-Aty, Dietmar Ferger**
Estimation of the jump-point in a Hazard function

5/2003 **Matthias Weber**
An equilibrium model for optimal forward positions in electricity markets

4/2003 **Yahia Ali**
Bayesian prediction bounds for the exponential distribution with one jump