

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN  
INSTITUT FÜR MATHEMATISCHE STOCHASTIK

DRESDNER SCHRIFTEN ZUR  
MATHEMATISCHEN STOCHASTIK

1/2016

**Jürgen Franz**

**Vorlesungen über Zuverlässigkeit und Statistik  
bei reparierbaren Systemen**

Herausgeber: Die Professoren des Instituts für Mathematische Stochastik

ISSN 0946-4735

**Vorlesungen über Zuverlässigkeit  
und Statistik  
bei reparierbaren Systemen**

Jürgen Franz

# Vorwort

Die Untersuchungen zur Zuverlässigkeit technischer Systeme hat in den letzten Jahren an Bedeutung zugenommen. Das beweist auch die große Anzahl von Fachbüchern und Zeitschriftenartikeln, die in letzter Zeit publiziert wurden. Es wurden einerseits die theoretische Grundlagen studiert und Modelle zur Behandlung von Zuverlässigkeitsfragen bereitgestellt. Besonders ist dabei auf unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsmodelle zur Beschreibung der Systemzuverlässigkeit, aber auch zur Instandhaltung von Systemen hinzuweisen. Andererseits wurden auch die statistischen Auswertungen von Daten aus der Praxis und die damit verbundene Modellanpassung weiterentwickelt. Es kommen verschiedene Methoden aus der mathematischen Statistik zur Anwendung, natürlich auch solche der klassischen Herangehensweise, bei denen Realisierungen von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen ausgewertet werden.

Der Text beginnt mit einer kurzen Abhandlung von klassischen Verfahren der Zuverlässigkeitsanalysen. Es werden Begriffe zur Zuverlässigkeit und Verfahren zur Datenauswertung eingeführt.

Der zentrale Teil des vorliegenden Textes ist die Modellierung und Statistik reparierbarer Systeme. Modellen der Reparatur und Instandsetzung benötigen stochastischen Prozessen, beispielsweise Erneuerungsprozesse, Zählprozesse und inhomogenen Poissonprozesse. Es wird versucht, eine kleine Einführung und Übersicht zu bekannten Untersuchungen zu geben. Darin eingebunden sind auch einige neuere Forschungsergebnisse.

Für das Verständnis des Textes benötigt der Leser gewisse Grundkenntnisse aus der Mathematik, der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der mathematischen Statistik. Da diese Kenntnisse auch im Studium technischer und wirtschaftswissenschaftlichen Richtungen vermittelt werden, ist der Text ohne Zweifel auch für Ingenieure geeignet.

Das Büchlein besteht aus sechs Kapiteln. Zuerst werden monotone Zuverlässigkeitssysteme vorgestellt. Es folgt eine Einführung von Zuverlässigkeitsbegriffen und von wichtigen Lebensdauer-Verteilungen. Schließlich werden Methoden der klassischen Statistik, wie Punktschätzungen und Intervallschätzungen für Parameter der Lebensdauer-Verteilungen sowie Zuverlässigkeitsnachweisverfahren behandelt. Mit Kapitel 4 kommen wir zum Hauptteil. Es werden stochastische Prozesse für reparierbare Systeme eingeführt, insbesondere Markovsche Prozesse, Poissonprozesse, Erneuerungsprozesse sowie verschiedene Punkt- und Zählprozesse für spezielle Zuverlässigkeitssysteme. Diese verschiedenen Prozesse ermöglichen unterschiedliche Reparatursituationen zu behandeln, unter anderen auch Minimalreparatur und Perfektreparatur. In den Reparaturmodellen können auf der Basis von Ausfalldaten Parameterschätzungen oder auch Prozessvorhersagen ermittelt werden. Ein großer Teil des vorliegenden Textes entstammt einer Vorlesung "Modelle und Statistik zur Zuverlässigkeit", die ich an der TU Dresden gehalten habe und die für Mathematik- und Technikstudenten vorgesehen war. Ich hoffe, mit dem Text das Interesse für eine Untersuchung reparierbarer Systeme geweckt zu haben.

# Inhaltsverzeichnis

	Einführung	5
<b>1</b>	<b>Zuverlässigkeit binärer monotoner Systeme</b>	<b>7</b>
1.1	Systemfunktion	8
1.2	Pfade und Schnitte monotoner Systeme	11
1.3	Zuverlässigkeit binärer monotoner Systeme	12
<b>2</b>	<b>Zuverlässigkeitstheoretische Grundlagen</b>	<b>17</b>
2.1	Zuverlässigkeitskenngrößen	17
2.2	Parametrische Familien von Lebensdauerverteilungen	21
2.2.1	Exponentialverteilung	22
2.2.2	Weibullverteilung	23
2.2.3	Gammaverteilung	24
2.2.4	weitere Lebensdauerverteilungen	25
2.3	Klassen von Lebensdauerverteilungen mit monotoner Ausfallrate	26
2.4	Einige Aussagen zur Systemlebensdauer	29
<b>3</b>	<b>Statistik für Lebensdauerdaten</b>	<b>31</b>
3.1	Schätzung von Verteilungsparametern	32
3.1.1	Modell Exponentialverteilung	33
3.1.2	Modell Weibullverteilung	36
3.2	Datenanpassung	37
3.2.1	Empirische Verteilungsfunktion	37
3.2.2	Grafische Verfahren	37
3.2.3	Anpassungstests	39
3.3	Zuverlässigkeitsnachweis	41
3.3.1	Stichprobenplan	41
3.3.2	Modell Exponentialverteilung - Pläne mit Prüfplan $[n, O, r]$	42
3.3.3	Modell Weibullverteilung - Stichprobenpläne mit Variablen- bzw. Attributprüfung	44
<b>4</b>	<b>Reparierbare Systeme</b>	<b>45</b>
4.1	Ausfallfunktion und Verfügbarkeit	46
4.2	Stochastische Prozesse für reparierbare Systeme	48
4.2.1	Markovsche Modelle	48
4.2.2	Erneuerungsprozesse	53
4.2.3	Alternierende Erneuerungsprozesse	54
4.2.4	Markierte Punktprozesse und Zählprozesse	56
4.2.5	Unvollständige Erneuerungsprozesse	59
4.2.6	Trend-Erneuerungsprozesse	61
4.2.7	Unvollständige Trend-Erneuerungsprozesse	63

<b>5</b>	<b>Schätzung und Vorhersage in reparierbaren Systemen.....</b>	<b>67</b>
5.1	Maximum-Likelihood-Schätzung	67
5.1.1	Maximum-Likelihood-Schätzung für RP und NHPP	67
5.1.2	Maximum-Likelihood-Schätzung für TRP und TIRP	70
5.2	Bayes-Schätzung für TRP und TIRP	72
5.3	Numerische Ergebnisse bei Punktschätzungen	74
5.4	Vorhersage in reparierbaren Systemen	77
5.4.1	Punktschätzung von Vorhersagewerten	77
5.4.2	Intervallschätzung von Vorhersagewerten	80
5.4.3	Numerische Ergebnisse zur Schätzung von $T_{n+1}$	80
5.4.4	Bayessche Schätzintervalle für Vorhersagewerte	82
<b>6</b>	<b>Spezielle Reparatursituationen</b>	<b>83</b>
6.1	Zufällige Zensierung in Reparaturmodellen	83
	Koziol-Green-Modell	86
6.2	Reparaturmodelle mit Stress	87
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>91</b>

# Einführung

In allen Wirtschaftsbereichen und insbesondere in technischen Bereichen der Industrie hat eine hohe Zuverlässigkeitsarbeit immense Bedeutung. Komplexe Industrieanlagen, die vielfältigen Waren- und Personentransportsysteme und auch die enge Datenvernetzung verlangen eine hohe Qualität und Zuverlässigkeit. Dabei zeigt sich die Notwendigkeit der Anwendung mathematischer Methoden und die Einbeziehung modernster Datenverarbeitungssysteme. Eine einfache Zuverlässigkeitsplanung und ein genauer Zuverlässigkeitsnachweis sind mit empirischen Methoden nicht mehr möglich, deshalb wurden in den letzten Jahrzehnten neue mathematische Zuverlässigkeitsverfahren entwickelt und eingesetzt.

Ein entscheidender Teil der technischen Zuverlässigkeitsarbeit beginnt bereits bei der Projektierung und Entwicklung technischer Systeme. Naturgemäß spielen auch Kosten eine große Rolle. Alle diese Gesichtspunkte können mit technisch-technologischen, betriebswirtschaftlichen und mathematischen Methoden gemeinsam betrachtet und analysiert werden. Einen der wichtigen theoretischen Bausteine für solche Untersuchungen liefert die Zuverlässigkeitstheorie. Die Zuverlässigkeitstheorie beschäftigt sich mit der Messung, der Vorhersage, der Erhaltung und der Optimierung der Zuverlässigkeit technischer Systeme.

Zuverlässigkeitsmodelle liefern eine Beschreibung der Intaktsituation von Bauelementen bzw. der Verfügbarkeit von technischen Systemen; die Betrachtungen basieren in der Regel auf der Grundlage der Wahrscheinlichkeitstheorie und der mathematischen Statistik.

Die stochastische Untersuchung von reparierbaren Systemen ist Bestandteil der Zuverlässigkeitstheorie, sowohl in ihrer mathematischen Modellbildung als auch in der statistischen Aufbereitung. Zur theoretischen Beschreibung kann sowohl die Boolesche Systemtheorie als auch die Lebensdauermodellierung herangezogen werden. Für die praktische Anwendung von Zuverlässigkeitsmodellen ist eine statistische Modellierung und eine geeignete Datenauswertung erforderlich. In die Modellbeschreibung zur Zuverlässigkeit von Systemen können Reparatur-, Erneuerungs- bzw. allgemein Instandhaltungsstrategien (unter Hinzunahme von Kosten) ebenso einbezogen werden wie Strukturuntersuchungen für Systeme. Für Strukturstudien werden oft Zuverlässigkeits-Ersatzschaltbilder - in Anlehnung an elektrische Schaltkreise - (kurz: Zuverlässigkeitsschaltbilder) verwendet.

**Beispiel:** Drehstrom-Außenläufer-Motor

Das System Motor kann so modelliert werden, dass 3 „ausfallfreudige“ Baugruppen betrachtet werden:

Ständer- und Läuferwicklung, Lagerung der rotierenden Teile, übrige Bauteile.

Zuverlässigkeitsschaltbild:



Zuverlässigkeit des Systems:  $p_s = p_W p_L p_{\bar{U}}$

Die Zuverlässigkeit technischer Systeme ist ein Teil der Qualitätsbewertung. Für die Arbeit in der Technik gilt die folgende Definition nach DIN 40041 (1990, Begriffe):

**Zuverlässigkeit ist die Fähigkeit eines technischen Systems, innerhalb vorgegebener Grenzen und während einer bestimmten Zeitdauer den durch den Verwendungszweck bedingten Anforderungen zu genügen.**

Die voranstehende verbale Definition der Zuverlässigkeit ist zu allgemein, um als Arbeitsgrundlage zur Bewertung des Zuverlässigkeitsverhaltens technischer Systeme genutzt zu werden; man verwendet vielmehr quantifizierbare Zuverlässigkeitskenngrößen, die die statistischen Eigenschaften von betrachteten Zuverlässigkeitsmerkmalen charakterisieren und auf dem Wahrscheinlichkeitsbegriff aufbauen. Solche Zuverlässigkeitskenngrößen sind beispielsweise die Überlebenswahrscheinlichkeit des Systems in einem vorgegebenen Zeitraum, die Verfügbarkeit als Arbeitswahrscheinlichkeit des Systems in einem Zeitpunkt, die Hazardrate als Maß für die Ausfallanfälligkeit des Systems oder die mittlerer Lebensdauer des Systems.

In den Betrachtungen des Buches werden hauptsächlich einfache reparierbare Systeme vorgestellt. Solche Systeme sind technische Erzeugnisse, deren Ausfallverhalten in seiner Gesamtheit ohne Strukturbetrachtungen untersucht und für die Instandhaltungsmaßnahmen nicht auf Teilstrukturen differenziert werden. Ein einfaches System wird folglich auch wie ein einzelnen Bauelemente behandelt. Im Gegensatz dazu werden bei strukturierten Systemen das Zusammenschalten und das Ausfallverhalten der einzelnen Bauelemente eines Systems untersucht.

Ein kompliziertes System ist in der Untersuchung nur **so fein zu strukturieren, wie es nötig** ist. Für die zeitliche Entwicklung der Zuverlässigkeit reicht es oftmals aus, ein System als eine Betrachtungseinheit aufzufassen. Zuverlässigkeitsprüfungen werden in der Praxis in den meisten Fällen als **Laborprüfungen** vorgenommen (andernfalls: Datenrückmeldung vom Betreiber der Produkte).

Im Ausfallverhalten unterscheidet man zwischen Sprungausfällen und Driftausfällen. Im weiteren wird vorausgesetzt, dass nur Sprungausfälle auftreten und das System dann nur die beiden Zustände „funktionstüchtig“ und „ausgefallen“ besitzt. Für den Systemzustand kann eine Boolesche Variable  $Y(t)$  eingeführt werden mit

$$Y(t) = \begin{cases} 1 & \text{wenn das System funktionstüchtig} \\ 0 & \text{wenn das System ausgefallen} \end{cases} .$$

Um das Ausfallverhalten eines Systems (oder auch nur eines Systemelements) mathematisch beschreiben zu können, wird die Wahrscheinlichkeit des Überlebens eingeführt. Und das kann mit Hilfe von  $Y(t)$  erfolgen.  $Y(t)$  wird dann als Zufallsvariable aufgefasst:

$$P(Y(t) = 1) =: p_S(t)$$

$p_S(t)$  ist die Überlebenswahrscheinlichkeit (oder die Verfügbarkeit) des Systems zum Zeitpunkt  $t$ ; Insbesondere bei einem einzelnen Bauelement spricht man auch von der Zuverlässigkeit.

# Kapitel 1

## Zuverlässigkeit binärer monotoner Systeme

Wir beginnen die Zuverlässigkeitsbetrachtungen mit einfachen Systemen, für die die Struktur der Systeme in Abhängigkeit von ihren Elementen herangezogen wird, aber eine Zeitabhängigkeit des Funktionierens außer Acht gelassen wird. Jedes Element kann nur "funktionstüchtig" oder "ausgefallen" sein.

Es wird der Begriff eines Zuverlässigkeitssystems, kurz: "Systems", verwendet, wenn für ein technisches System, das aus Baugruppen bzw. Bauelementen besteht, ein Zuverlässigkeitsmodell angegeben und dabei die Elemente mittels eines Zuverlässigkeitsschaltbildes strukturiert werden.

Zunächst werden deterministische Beziehungen zwischen der Funktionstüchtigkeit und dem Ausfall von Systemen und deren Komponenten (Elementen) untersucht. Es gibt jeweils nur die Zustände "intakt" (oder funktionstüchtig bzw. up) und "defekt" (oder ausgefallen bzw. down).

Ein System bestehe aus  $n$  Elementen und für Elemente werden binäre Variable eingeführt:

$$X_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{wenn das Element } i \text{ intakt} \\ 0 & \text{wenn das Element } i \text{ defekt} \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Die Variablen  $X_i(t)$  werden auch Zustandsvariable der Elemente  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) genannt.

Der Zustand des Systems sei  $Y(t)$  und ist dann eine Funktion der Elementezustände. Die Zeitabhängigkeit der Variablen  $X_i$  und  $Y$  wird in diesem Kapitel im Weiteren vernachlässigt, auch, weil sich die Betrachtungen auf einen festgen Zeitpunkt beziehen. Es gilt:

$$Y =: S(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn das System intakt} \\ 0 & \text{wenn das System defekt.} \end{cases}$$

Es kommt also zunächst darauf an, die Struktur des Zuverlässigkeitssystems zu finden.

Für Strukturuntersuchungen – und damit für Zuverlässigkeitsaussagen – werden oftmals graphentheoretische Beschreibungen gewählt. Der Begriff "monoton" bedeutet hier, dass sich die Zuverlässigkeit eines Systems bereits bei Ausfall einer Komponente ändern kann, also keine überflüssigen Komponenten existieren.



Das Ziel dieses Kapitels wird sein, eine Einführung in die Zuverlässigkeitsbewertung monotoner Systeme zu erhalten. Für eine ausführliche Betrachtung binärer monotoner Systeme kann man die Monographien von Beichelt (1993,[9]) oder von Reinschke (1973,[41]) heranziehen.

## 1.1 Systemfunktion

Die Variable  $S = S(\underline{X})$  heißt *Systemfunktion* bzw. *Strukturfunktion* des Systems, wobei

$$S = S(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} 1, & \text{wenn System intakt} \\ 0. & \text{defekt.} \end{cases}$$

Schreibweise:  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n) \in V_n$  ( $n$ -dim. Vektorraum), wobei  $\underline{X}$  Komponenten „0“ oder „1“ hat. Speziell sei  $\underline{1} = (1, \dots, 1)$  und  $\underline{0} = (0, \dots, 0)$ .

### Einige Begriffe:

- Ein Element  $i$  heißt *unwesentlich*, wenn  $S((0_i, \underline{X})) = S((1_i, \underline{X}))$ , für alle  $\underline{X}$ , wobei  $(0_i, \underline{X}) := (X_1, \dots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \dots, X_n)$ ,  $(1_i, \underline{x})$  entsprechend.
- Ein System wird *nicht reduzierbar* genannt, wenn keine unwesentlichen  $i$  vorhanden sind.
- *Redundanz*: Elementeanordnung im System derart, dass der Ausfall eines oder mehrerer Elemente noch nicht den Systemausfall bewirken.
- *Reserve* bilden Elemente, die bei Ausfall eines Elementes dessen Funktion zur Aufrechterhaltung der Systemfunktionstüchtigkeit übernehmen.  
(heiße Reserve: Reserveelemente arbeiten im System ständig mit;  
kalte Reserve: Reserveelemente werden erst „zugeschaltet“, wenn gewisse funktionswichtige Elemente ausgefallen sind.)
- *k-fache Reserve*: Neben funktionswichtigen Elementen existieren  $k$  weitere (von gleicher Funktionsfähigkeit)
- *„k-aus-n“-Redundanz*: Das System ist funktionstüchtig, wenn mindestens  $k$  von  $n$  Elementen funktionstüchtig sind.
- Ein System wird *monoton (oder kohärent)* genannt, wenn  
$$S(\underline{Y}) \geq S(\underline{X}) \text{ für alle } \underline{Y} \geq \underline{X}$$

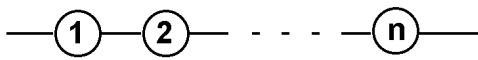
also wenn  $S(\underline{X})$  wachsend bzgl. jedes  $X_i$  und wenn alle Elemente des Systems wesentlich sind.

Im weiteren werden nur noch monotone Systeme betrachtet.

Ein  $n$ -elementiges System nennt man **Seriensystem**, wenn es genau dann intakt ist für den Fall, dass alle  $n$  Elemente intakt sind. Ein  $n$ -elementiges System heißt **Parallelsystem**, wenn es bereits bei einem intakten Element intakt ist.

**Systembeispiele (mit Zuverlässigkeitsschaltbildern):**

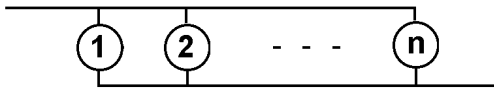
1. **Seriensystem:**



*Satz 1.1:* Für ein Seriensystem gilt:  
 $S(\underline{X}) = \min(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n X_i \quad \square$

*Beweis:*  $S(\underline{x}) = \prod_{i=1}^n x_i$  ist offenbar genau dann gleich 1, wenn alle  $x_i$  den Wert 1 annehmen, andernfalls gleich 0.  $\square$

2. **Parallelsystem:**



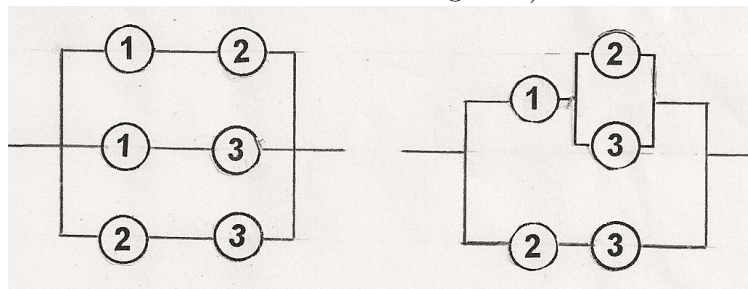
*Satz 1.2:* Für ein Parallelsystem gilt:  
 $S(\underline{X}) = \max(X_1, \dots, X_n) = \bigvee_{i=1}^n X_i = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - X_i) \quad \square$

*Beweis:*  $S(\underline{X}) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - X_i)$  ist offenbar genau dann gleich 1, wenn mindestens ein  $X_i$  den Wert 1 annimmt, und 0 beim Ausfall aller  $X_i$ .  $\square$

3. **„k-aus-n,-System:**  $S(\underline{X}) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \sum_{i=1}^n X_i \geq k \\ 0, & \text{wenn } \sum_{i=1}^n X_i < k \end{cases}$

*Spezialfälle:*  $k = 1 : S(\underline{X}) = \bigvee_{i=1}^n X_i = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - X_i)$   
 $k = n : S(\underline{X}) = \prod_{i=1}^n X_i$

*Beispiel* „k-aus-n“-System:  $k = 2, n = 3$  (es sind zwei Bilder angegeben; man erkennt, dass Zuverlässigkeitsschaltbilder i.a. nicht eindeutig sind):



Unschwer ist der Nachweis für:

Satz 1.3: Für Systemfunktionen gilt stets:

1.  $S(\underline{1}) = 1$  bzw.  $S(\underline{0}) = 0$
2.  $\prod_{i=1}^n X_i \leq S(\underline{X}) \leq \bigvee_{i=1}^n X_i$  („Schranken der System-Funktionsfähigkeit“)
3.  $S(\underline{X}(1)) \leq S(\underline{X}(2))$ , wenn  $\underline{X}(1) \leq \underline{X}(2)$ , d.h.  $X_i^1 \leq X_i^2, \forall i \square$ .

(o.B.)

**Zerlegungssatz der Systemfunktion:**

Satz 1.4: Jede Systemfunktion  $S(\underline{X})$  kann für alle  $\underline{X} \in \mathbf{V}_n$  folgendermaßen dargestellt werden (für bel.  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ):

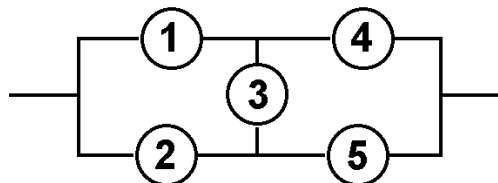
$$S(\underline{X}) = X_i S((1_i, \underline{X})) + (1 - X_i) S((0_i, \underline{X})) \square$$

*Beweis:* Wenn das Element  $i$  intakt bzw. defekt ist dann ist das gleichbedeutend mit  $x_i = 1$  bzw.  $x_i = 0$ . Eingesetzt in  $S(\underline{x})$  liefert das  $S((1_i, \underline{x}))$  bzw.  $S((0_i, \underline{x}))$ . Man erkennt unmittelbar die Gültigkeit der obigen Gleichung.  $\square$

Weil  $S((1_i, \underline{X}))$  und  $S((0_i, \underline{X}))$  schließlich „nur“ Systemfunktionen von  $(n - 1)$ -elementigen Systemen bedeuten (was man sich leicht durch entsprechende Ersatzschaltbilder verdeutlichen kann), kann jede Systemfunktion von  $n$  Elementen auf entsprechende von  $n - 1$  Elementen reduziert werden.

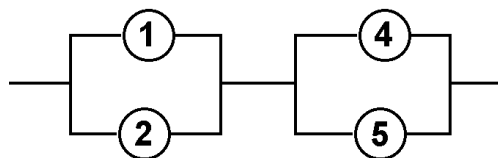
Bemerkung: Ziel der Zerlegung ist, das System letztendlich auf Serien- und Parallelsysteme zurückzuführen; also wird im folgenden Beispiel besonders das Element 3 interessant sein.

Beispiel „Brückenschaltung“:

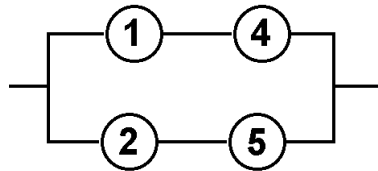


$$S(\underline{X}) = X_3 S_1(X_1, X_2, X_4, X_5) + (1 - X_3) S_2(X_1, X_2, X_4, X_5),$$

wobei  $S_1(X_1, X_2, X_4, X_5) = [1 - (1 - X_1)(1 - X_2)] [1 - (1 - X_4)(1 - X_5)]$



$$S_2(X_1, X_2, X_4, X_5) = 1 - (1 - X_1 X_4)(1 - X_2 X_5)$$



**Bemerkung:** Bisweilen werden weitere Darstellungsformen für  $S(\underline{X})$  verwendet:

a) Wiederholte Anwendung des Zerlegungssatzes führt schließlich zur sogenannten *disjunktiven Normalform*  $S_D$  der Systemfunktion  $S(\underline{X})$ :

$$S_D(\underline{X}) = \sum_{\underline{y}} S(\underline{y}) \prod_{i=1}^n X_i^{y_i} (1 - X_i)^{1-y_i},$$

wobei über alle  $\underline{y} \in \mathbf{V}_n$  summiert wird und  $\underline{y}$  ebenfalls Komponenten „0“ oder „1“ hat.

b) Ausmultiplizieren (und evtl. Beachtung der Idempotenz „ $x_i^2 = x_i$ “) führt zur *Linearform* der Systemfunktion:

$$S_L(\underline{X}) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n a_{ij} X_i X_j + \cdots + a_{12\dots n} X_1 X_2 \dots X_n$$

( $a_i, a_{ij}, \dots, a_{12\dots n}$  sind ganzzahlig, durch Koeffizientenvergleich aus  $S_D(\underline{X})$  ermittelbar)

Es gilt: Die Funktionen  $S(\underline{X})$ ,  $S_D(\underline{X})$  und  $S_L(\underline{X})$  sind eindeutig für jedes System.

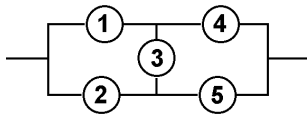
## 1.2 Pfade und Schnitte monotoner Systeme

Beobachtungen zu Pfaden bzw. Schnitten liefern Aussagen über die Funktionstüchtigkeit bzw. den Ausfall eines monotonen Systems und ermöglichen schließlich die Berechnung der Systemfunktion.

Wir führen zunächst die Begriffe „**Pfadvektor**“ und „**Schnittvektor**“ ein

1.  $\underline{X}$  heißt *Pfadvektor*, wenn  $S(\underline{X}) = 1$ ;  
die Menge der Elemente  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\underline{X}) = \{i : X_i = 1\}$ , wobei  $\underline{X}$  ein Pfadvektor ist, ist die Pfadmenge (kurz: der *Pfad*);  
ein Pfadvektor  $\underline{X}$  und der zugehörige Pfad heißen *minimal*, wenn  $S(\underline{Z}) = 0$  für alle  $\underline{Z} \in \mathbf{V}_n$  mit  $\underline{Z} < \underline{X}$  gilt (also mindestens ein intaktes Element durch ein defektes getauscht wird).
2.  $\underline{X}$  heißt *Schnittvektor*, wenn  $S(\underline{X}) = 0$ ;  
die Menge  $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\underline{X}) = \{i : X_i = 0\}$ , wobei  $\underline{X}$  Schnittvektor ist, heißt *Schnitt(menge)*;  
 $\underline{X}$  und  $\mathbf{C}(\underline{X})$  werden *minimal* genannt, wenn  $S(\underline{Z}) = 1$  für alle  $\underline{Z} \in \mathbf{V}_n$  ;,  $\underline{Z} > \underline{X}$  (also mindestens eine Komponente von  $\underline{Z}$  größer als die entsprechende von  $\underline{X}$  ist).

Beispiel „Brückenschaltung“:



minimale Pfade:

$$\mathbf{P}_1 = \{1, 4\}, \mathbf{P}_2 = \{2, 5\}, \mathbf{P}_3 = \{1, 3, 5\}, \mathbf{P}_4 = \{2, 3, 4\}$$

minimale Schnitte:

$$\mathbf{C}_1 = \{1, 2\}, \mathbf{C}_2 = \{4, 5\}, \mathbf{C}_3 = \{1, 3, 5\}, \mathbf{C}_4 = \{2, 3, 4\}$$

Weitere Begriffe:

$$\text{Pfadfunktion: } P_j(\underline{X}) = \prod_{i \in \mathbf{P}_j} X_i = \begin{cases} 1, & \text{wenn alle Pfadelemente intakt,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

damit:

$$S(\underline{X}) = \bigvee_{j=1}^p P_j(\underline{X}) = 1 - \prod_{j=1}^p (1 - P_j(\underline{X})) = 1 - \prod_{j=1}^p (1 - \prod_{i \in \mathbf{P}_j} X_i) = \max_{1 \leq j \leq p} \min_{i \in \mathbf{P}_j} X_i$$

( $p$  = Anzahl der minimalen Pfade)

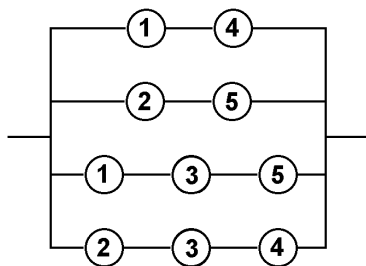
$$\text{Schnittfunktion: } C_j(\underline{X}) = \bigvee_{i \in \mathbf{C}_j} X_i = \begin{cases} 0, & \text{wenn alle Schnittelelemente defekt,} \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

damit:

$$S(\underline{X}) = \prod_{j=1}^k C_j(\underline{X}) = \prod_{j=1}^k \left[ 1 - \prod_{i \in \mathbf{C}_j} (1 - X_i) \right] = \min_{1 \leq j \leq k} \max_{i \in \mathbf{C}_j} X_i$$

( $k$  = Anzahl der minimalen Schnitte)

am Beispiel „Brückenschaltung“:



$$P_1(\underline{X}) = X_1 X_4$$

$$P_2(\underline{X}) = X_2 X_5$$

$$P_3(\underline{X}) = X_1 X_3 X_5$$

$$P_4(\underline{X}) = X_2 X_3 X_4$$

$$S(\underline{X}) = 1 - (1 - X_1 X_4)(1 - X_2 X_5)(1 - X_1 X_3 X_5)(1 - X_2 X_3 X_4)$$

$$= 1 - (1 - P_1(\underline{X}))(1 - P_2(\underline{X}))(1 - P_3(\underline{X}))(1 - P_4(\underline{X}))$$

$$C_1(\underline{X}) = 1 - (1 - X_1)(1 - X_2)$$

$$C_2(\underline{X}) = 1 - (1 - X_4)(1 - X_5)$$

$$C_3(\underline{X}) = 1 - (1 - X_1)(1 - X_3)(1 - X_5)$$

$$C_4(\underline{X}) = 1 - (1 - X_2)(1 - X_3)(1 - X_4)$$

$$S(\underline{X}) = [1 - (1 - X_1)(1 - X_2)][1 - (1 - X_4)(1 - X_5)] \cdot [1 - (1 - X_1)(1 - X_3)(1 - X_5)] \cdot [1 - (1 - X_2)(1 - X_3)(1 - X_4)] =$$

$$C_1(\underline{X}) \cdot C_2(\underline{X}) \cdot C_3(\underline{X}) \cdot C_4(\underline{X})$$

### 1.3 Zuverlässigkeit binärer monotoner Systeme

Die in Abschnitt 2.1. eingeführten binären Variablen werden jetzt als Zufallsvariable verstanden, d.h.  $X_i$  ist der zufälliger Zustand des Elements  $i$  im System. Es wird angenommen, dass alle Elemente des Systems unabhängig voneinander arbeiten, also stochastisch unabhängig

sind.

Dann ist  $X_i$  für jedes  $i$  eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable:

$$P(X_i = 1) = EX_i =: p_i \quad P(X_i = 0) = 1 - p_i$$

$p_i$  ist die Zuverlässigkeit des  $i$ -ten Elements ( $0 \leq p_i \leq 1$ ;  $i = 1, \dots, n$ ) und  $P(S(\underline{X}) = 1) = ES(\underline{x}) =: p_S$  die Zuverlässigkeit des Systems

Bemerkung: Vereinbarungsgemäß war die Zeitabhängigkeit der Zuverlässigkeit (des Systems oder der Elemente) außer Acht gelassen worden. Später wird die Zeit hinzugenommen, also z.B.  $X_i(t)$  geschrieben, insbesondere, wenn Lebensdauerverteilungen betrachtet werden. Die oben genannten Ausdrücke werden auch für die Verfügbarkeit von Elementen und Systemen verwendet, wenn also zwischenzeitlich Ausfälle und folglich Reparaturen bzw. Erneuerungen auftreten.

Für die Systemzuverlässigkeit verwenden wir auch die Darstellung

$$h(\underline{p}) = h(p_1, \dots, p_n) \quad (= p_S),$$

d.h.  $p_S$  ist durch die Zuverlässigkeit seiner Elemente bestimmt.  $p_S = P(S(\underline{X}) = 1)$  ist die Intaktwahrscheinlichkeit und  $1 - p_S$  die Ausfallwahrscheinlichkeit des Systems.

Beispiele für Systemzuverlässigkeit:

Satz 1.5: Es gilt für ein

Seriensystem:  $h(\underline{p}) = \prod_{i=1}^n p_i$

Parallelsystem:  $h(\underline{p}) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i)$

„ $k$ -aus- $n$ “-System: unter spezieller Annahme  $p_i = p, \forall i$ , gilt

$$h(\underline{p}) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

*Beweis:* Aus der Unabhängigkeit der Variablen  $X_i$  und der Erwartungswertdarstellung der Zuverlässigkeiten folgen in den obigen Systembeispielen die Zuverlässigkeitgleichungen unmittelbar.  $\square$

Allgemeiner gilt sogar:

Satz 1.6: Seien  $S(\underline{X})$  in disjunktiver Normalform oder in Linearform gegeben und  $X_i (i = 1, \dots, n)$  unabhängig. Unter Verwendung von  $\underline{p} = (p_1, \dots, p_n)$  und  $p_S = h(\underline{p}) = ES(X)$  gilt dann

$$h(\underline{p}) = S(\underline{p}).$$

*Beweis:* O.B.d.A. sei  $S(\underline{x}) = S_D(\underline{x})$ .

$$\begin{aligned}
h(\underline{p}) &= E(S_D(\underline{X})) = E\left(\sum_{\underline{y} \in \mathbf{V}_n} S(\underline{y}) \prod_{i=1}^n X_i^{y_i} (1 - X_i)^{1-y_i}\right) \\
&= \sum_{\underline{y} \in \mathbf{V}_n} S(\underline{y}) E\left(\prod_{i=1}^n X_i^{y_i} (1 - X_i)^{1-y_i}\right) \\
&\stackrel{\text{Unabh.}}{=} \sum_{\underline{y} \in \mathbf{V}_n} S(\underline{y}) \prod_{i=1}^n E(X_i^{y_i} (1 - X_i)^{1-y_i})
\end{aligned}$$

Für  $y_i = 0$  gilt  $EX_i^0(1 - X_i)^1 = 1 - p_i$ , für  $y_i = 1$  gilt  $EX_i^1(1 - X_i)^0 = p_i$ , also ist

$$p_S = \sum_{\underline{y} \in \mathbf{V}_n} S(\underline{y}) \prod_{i=1}^n p_i^{y_i} (1 - p_i)^{1-y_i} = S_D(\underline{p}). \quad \square$$

Bemerkung: Der voranstehende Satz kann unter Einbeziehung der Erwartungswerteigenschaften auch allgemein für beliebige  $S(\underline{X})$  nachgewiesen werden.

In Analogie zur Zerlegung der Systemfunktion  $S(\underline{X})$  gilt der sogenannte Reduktionsatz:

Satz 1.6:  $h(\underline{p}) = p_i h((1_i, \underline{p})) + (1 - p_i) h((0_i, \underline{p}))$  für jedes ausgewählte Element  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) des monotonen Systems.

*Beweis:* Nach Satz 1.4 und bei Erwartungswertbildung folgt (wegen der Unabhängigkeit) die Aussage.  $\square$

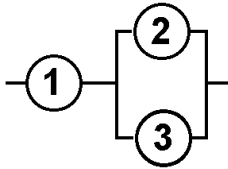
### Weitere Eigenschaften:

Monotonieeigenschaft: Sei  $h(\underline{p})$  die Zuverlässigkeitsfunktion eines monotonen Systems. Dann ist  $h(\underline{p})$  streng monoton wachsend in jedem  $p_i$  ( $0 \leq p_i \leq 1$  ( $i = 1, \dots, n$ )).

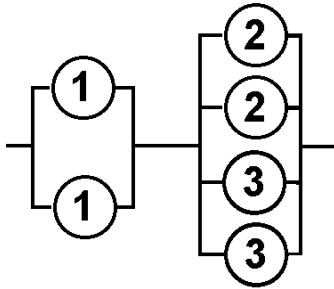
Redundanzvergleich: Es sei  $h(\underline{p})$  die Zuverlässigkeitsfunktion eines monotonen Systems. Mit  $\underline{p}^1 \vee \underline{p}^2$  wird die Zuverlässigkeit des Systems dargestellt, wenn jedem Element im (ursprünglichen) System (1) noch ein Element (2) parallelgeschaltet wird, Entsprechend steht  $\underline{p}^1 \cdot \underline{p}^2$  für jeweils Serienschaltung eines zweiten Elements. Dann gilt:

- a)  $h(\underline{p} \vee \underline{\tilde{p}}) \geq h(\underline{p}) \vee h(\underline{\tilde{p}});$   
„=" gilt genau dann, wenn ein Parallelsystem vorliegt.
- b)  $h(\underline{p} \cdot \underline{\tilde{p}}) \leq h(\underline{p}) \cdot h(\underline{\tilde{p}});$   
„=" gilt genau dann, wenn ein Seriensystem vorliegt.

Beispiel: Redundanzvergleich im System mit 3 Elementen und gleicher Elementezuverlässigkeit  $p$  gemäß Schaltbild:  $h\underline{p} = p(1 - (1 - p)^2) = p(2p - p^2)$

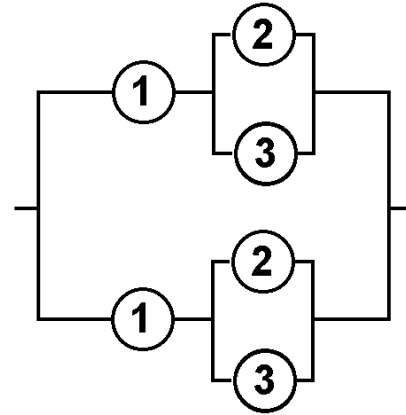


Vergleich nach a):



System I

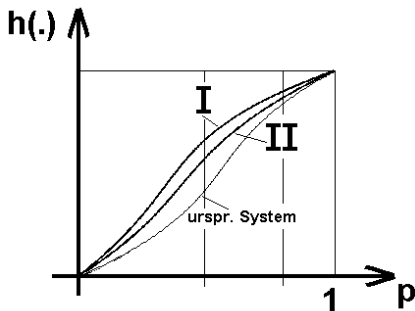
gegen



System II

$$h(\underline{p} \vee \underline{p}) = [1 - (1 - p)^2][1 - (1 - p)^4] \\ = (2p - p^2)(4p - 6p^2 + 4p^3 - p^4)$$

$$h(\underline{p}) \vee h(\underline{p}) = 1 - [1 - p(2p - p^2)]^2$$



z.B.  $p = 0.8, h(\underline{p}) = 0.768$

$$h(\underline{p} \vee \underline{p}) = 0.9585$$

$$h(\underline{p}) \vee h(\underline{p}) = 0.9462$$

$p = 0.5, h(\underline{p}) = 0.375$

$$h(\underline{p} \vee \underline{p}) = 0.7031$$

$$h(\underline{p}) \vee h(\underline{p}) = 0.6094$$

### Zuverlässigkeitsabschätzungen

1. grobe Abschätzung („Systemzuverlässigkeit stets zwischen der von Serien- und Parallelsystem“)

$$\prod_{i=1}^n p_i \leq P(S(\underline{X}) = 1) \leq \bigvee_{i=1}^n p_i$$

2. Minimax-Schranken mittels Pfaden und Schnitten

$$\max_{1 \leq j \leq p} P(\min_{i \in \mathbf{P}_j} X_i = 1) \leq P(S(\underline{X}) = 1) \leq \min_{1 \leq j \leq k} P(\max_{i \in \mathbf{C}_j} X_i = 1)$$

bzw.

$$\max_{1 \leq j \leq p} \prod_{i \in \mathbf{P}_j} p_i \leq P(S(\underline{X}) = 1) \leq \min_{1 \leq j \leq k} \bigvee_{i \in \mathbf{C}_j} p_i$$





# Kapitel 2

## Zuverlässigkeitstheoretische Grundlagen

Für ein Zuverlässigkeitssystem stellt die Zeitspanne vom Arbeitsbeginn bis zum ersten Ausfall die Lebensdauer des Systems dar. Die Lebensdauer bezeichnen wir mit  $T$ , sie ist eine Zufallsvariable und kann zur Darstellung der (zeitabhängigen) Systemfunktion  $Y(t) = S(\underline{X}(t))$  herangezogen werden:

$$Y(t) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } t < T \\ 0 & \text{wenn } t \geq T \end{cases} .$$

Die Lebensdauer  $T$  ist von zentraler Bedeutung zur Beschreibung der Systemzuverlässigkeit; die Lebensdauer wird in einer Vielzahl von Lebensdauermodellen untersucht. Viele der sogenannten Zuverlässigkeitskenngrößen sind eng mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $T$  verbunden.

### 2.1 Zuverlässigkeitskenngrößen

Es werden zunächst einige der wichtigsten wahrscheinlichkeitstheoretischen Kenngrößen für Lebensdauern eingeführt. Für die später zu betrachtenden reparierbare Systeme können solche Zuverlässigkeitskenngrößen leicht sinngemäß auf Reparaturdauern übertragen werden.

1. **Ausfallwahrscheinlichkeit:** Die Verteilungsfunktion der Lebensdauer  $T$  :

$$F_T(t) = P(T \leq t) \quad (t \geq 0)$$

ist die Ausfallwahrscheinlichkeit (failure probability) des Systems, denn sie ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im Zeitintervall  $[0, t]$  der Systemausfall eintritt.  $F_T(t)$  ist eine monoton nichtfallende Funktion in  $t$ ; allgemein gilt  $0 \leq F_T(t) \leq 1$  und es kann  $F_T(0) \geq 0$  vorausgesetzt werden.

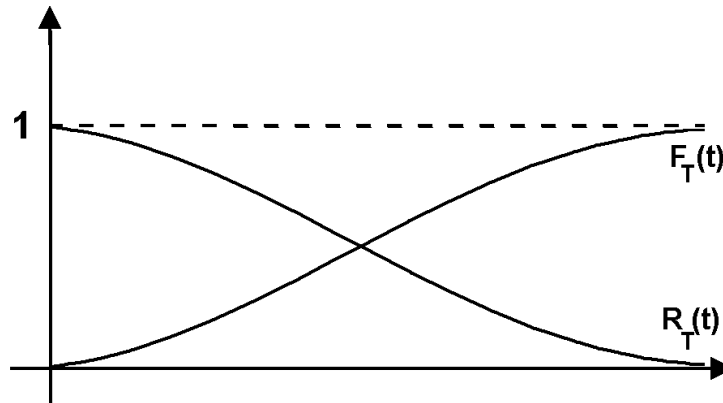
Eine wichtige, wenn auch einfache Verteilungsfunktion der Lebensdauer  $T$  ist die der Exponentialverteilung

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } t < 0 \\ 1 - \exp(-\lambda t) & \text{wenn } t \geq 0, \lambda > 0. \end{cases} .$$

2. **Zuverlässigkeit:** Die Überlebenswahrscheinlichkeitsfunktion

$$R_T(t) = P(T > t) = 1 - F_T(t) \quad (t \geq 0)$$

wird auch als Zuverlässigkeit (reliability, survival probability) des Systems bezeichnet und ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im Zeitintervall  $[0, t)$  kein Ausfall eintritt. Sie ist eine nichtwachsende Funktion in  $t$ .



Der Zusammenhang zwischen Systemfunktion  $S(\underline{X})$  und zugehöriger Lebensdauer  $T_s$  im Zeitintervall  $[0, t]$  wird bekanntlich durch die Ereignisgleichheit

$$\{S(\underline{X}(t)) = 1\} = \{T_s > t\}$$

wiedergegeben. Folglich gilt für die Systemzuverlässigkeit

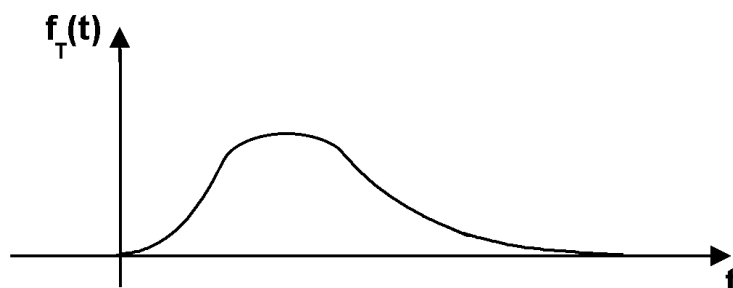
$$p_s(t) = P(T_s > t) = P(S(\underline{X}(t)) = 1).$$

3. **Verfügbarkeit:** Für reparierbare bzw. erneuerbare Elemente (Systeme) wird anstelle der Zuverlässigkeit als Kenngröße die Verfügbarkeit (availability) verwendet: Wahrscheinlichkeit für ausfallfreies Arbeiten zur Zeit  $t$ :  $P(X(t) = 1)$
4. **Lebensdauerdichte:** Es sei vorausgesetzt, dass die Verteilungsfunktion  $F_T(t)$  der Lebensdauer  $T$  in  $[0, t)$  differenzierbar ist. Dann bezeichnet die erste Ableitung

$$f_T(t) = \frac{d}{dt} F_T(t)$$

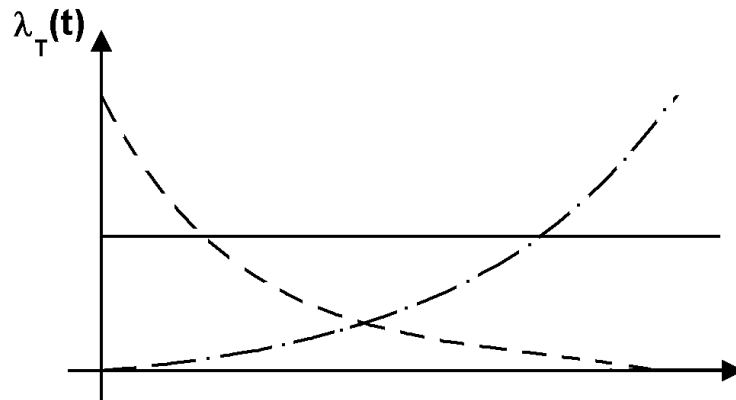
die Lebensdauerdichte (Ausfalldichte). Sie ist eine nichtnegative Funktion mit den Eigenschaften:

$$\int_0^t f_T(u) du = F(t), \quad \int_0^\infty f_T(t) dt = 1.$$

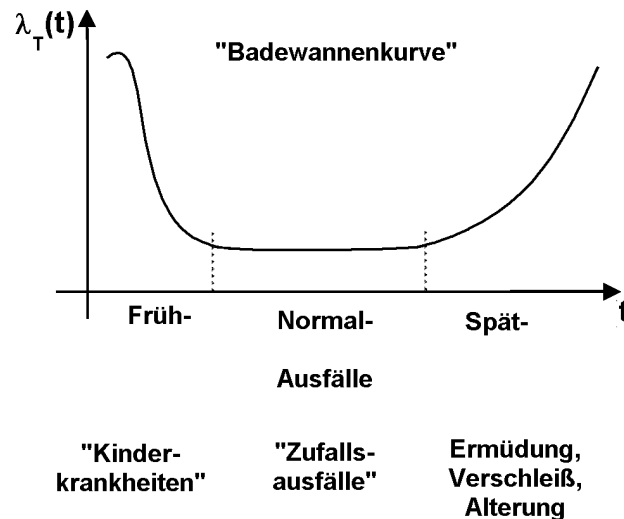


5. **Ausfallrate:** Sie wird auch als Hazardrate bezeichnet und ist definiert durch:

$$\lambda_T(t) = \frac{f_T(t)}{R_T(t)}$$



Im allgemeinen hat die Ausfallrate für technische Systeme den folgenden zeitlichen Verlauf, wobei die drei in der Kurve angegebenen Zeitabschnitte in der Praxis mehr oder weniger ausgeprägt sein werden:



Die Ausfallrate ist ein Maß für die Ausfallanfälligkeit eines Elements bzw. eines Systems nach Erreichen des Alters  $t$ ; genauer gilt:

$\lambda(t)\Delta t$  die (bedingte) Ausfallwahrscheinlichkeit eines Elements nach Erreichen von  $t$  ist, denn:

$$\begin{aligned} P(0 < T \leq t + \Delta t | T > t) &= 1 - \frac{P(T > t + \Delta t)}{P(T > t)} = 1 - \frac{R(t + \Delta t)}{R(t)} \\ &= -\frac{R'(t)}{R(t)}\Delta t + o(\Delta t) = \lambda_T(t)\Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

Andererseits ist auch:

$$\lambda_T(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)}, \text{ also } \int \frac{dR}{R} = -\int \lambda_T(t)dt \text{ bzw. } \ln R = -\int_{t_0}^t \lambda(u)du + C$$

d.h.

$$R(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \lambda_T(t) dt \right\} = \exp \left\{ - \int_0^t \lambda_T(u) du \right\}$$

wobei die Randbedingung  $R(0) = 1$  verwendet wurde;

$\Lambda(t) := \int_0^t \lambda(u) du$  wird auch kumulative Hazardrate genannt. Die bedingte Wahrscheinlichkeit oben legt es nahe, die bedingte Verteilungsfunktion der Lebensdauer unter der Bedingung  $T > t$  (auch Restlebensdauer-Verteilungsfunktion) einzuführen:

$$F_{T|t}(s) = P(T - t \leq s | T > t) \left( = \frac{P(t < T \leq t + s)}{P(T > t)} = \frac{F_T(t + s) - F_T(t)}{R_T(t)} \right)$$

Daraus erhält man die **bedingte Überlebenswahrscheinlichkeit**:

$$R_{T|t}(s) = 1 - F_{T|t}(s) = \frac{R_T(t + s)}{R_T(t)}$$

und wegen  $R_T(0) = 1$ :  $R_{T|t}(s) = \exp \left\{ - \int_t^{t+s} \lambda_T(u) du \right\}$

Mit der Größe  $R_{T|t}(s)$  kann man den Begriff der Alterung eines Systems einführen: Im betrachteten Zeitintervall  $(s_1, s_2)$  altert das System, wenn die bedingte Überlebenswahrscheinlichkeit  $R_{T|t}(s)$  in diesem Zeitintervall monoton in  $t$  fällt.

## 6. Momente der Lebensdauer

Der Mittelwert bzw. Erwartungswert von  $T$ , also

$$ET = \int_0^{\infty} t f_T(t) dt$$

ist die mittlere Lebensdauer (MTTF = meantime to failure) des Systems.

In der Praxis verwendet man oft die Bezeichnung  $\theta := ET$ .

Es gilt auch

$$ET = \int_0^{\infty} R_T(t) dt,$$

denn  $\int_0^{\infty} R_T(t) dt = \int_{t=0}^{\infty} \left[ \int_{u=t}^{\infty} f(u) du \right] dt = \int_{u=0}^{\infty} \left[ \int_{t=0}^u dt \right] f(u) du = \int_{u=0}^{\infty} u f(u) du$

Bemerkung: Bei reparierbaren oder erneuerbaren Systemen spielt die mittlere Zeit zwischen zwei Systemausfällen diese Rolle (MTBF = meantime between failures)

Die Varianz (Streuung) der Lebensdauer von  $T$ , also

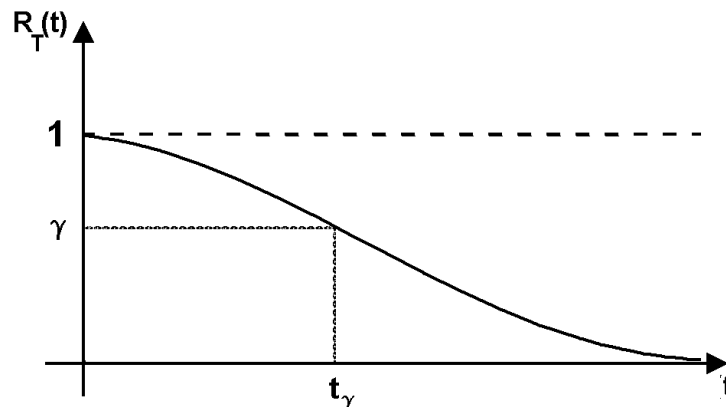
$$\text{var}(T) = \int_0^{\infty} (t - ET)^2 f_T(t) dt$$

ist der Erwartungswert der quadratischen Abweichung von  $T$  und  $ET$  und stellt ein gewisses Abweichungsmaß vom Mittelwert dar. Um insbesondere lineare Abweichungen

von unterschiedlichen Systemen vergleichen zu können, wurde der Variationskoeffizient von  $T$  eingeführt:

$$V := \frac{\sqrt{\text{var}(T)}}{ET}.$$

7.  **$\gamma$ -prozentuale Lebensdauer:** Der Zeitpunkt  $t_\gamma$  mit  $R_T(t_\gamma) = \gamma$  ist die  $\gamma$ -prozentuale Lebensdauer.



Für die Praxis sind die Lebensdauerkenngößen in DIN-Vorschriften festgelegt und beschrieben. Die größte praktische Bedeutung besitzen dabei die Hazardrate, die mittlere Lebensdauer und die  $\gamma$ -prozentuale Lebensdauer.

## 2.2 Parametrische Familien von Lebensdauerverteilungen

Primär für jede Zuverlässigkeitsanalyse ist die Auswahl des Wahrscheinlichkeitsmodells. Davon hängt eine Vielzahl nachfolgender Aussagen und Entscheidungen ab. Für das Wahrscheinlichkeitsmodell sind maßgebend:

- der Umfang der zu erwartenden Beobachtungswerte,
- der in Frage kommende Modelltyp und
- seine Anpassungsfähigkeit an die empirisch gewonnene Daten.

Wahrscheinlichkeitsmodelle kann man an praktische Probleme in unterschiedlichem Maße anpassen: Grobe und von speziellen Voraussetzungen freie Modelle sind ziemlich allgemein anwendbar; detaillierte oder sehr ausgeklügelte Modelle sind nur einzelnen Fällen angemessen; zwischen diesen Extremfällen gibt es viele Abstufungen.

Die Auswahl des Wahrscheinlichkeitsmodells im Hinblick auf den Allgemeingrad wird stets ein Kompromiss sein. Das Modell hängt vorrangig vom Ziel der Untersuchung und vom vertretbaren Aufwand ab.

Nachfolgend werden wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen von stetigen Zufallsvariablen behandelt. Diese Verteilungen werden sowohl für die Untersuchung von Systemlebensdauern

als auch bei Modellierungen anderer Systemzeiten verwendet. Wir beginnen mit der schon in einem Beispiel eingeführten Exponentialverteilung.

## 2.2.1 Exponentialverteilung

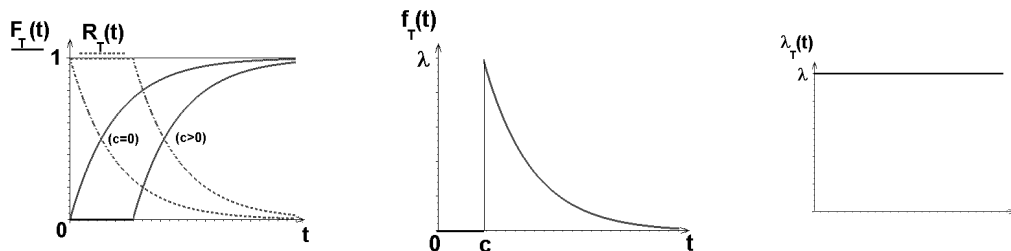
Die Zufallsvariable  $T$  ist exponentialverteilt mit Parametern  $(\lambda, c)$ , symbolisch  $T \sim \text{Exp}(\lambda, c)$  dargestellt, wenn

$$F_T(t) = 1 - \exp\{-\lambda(t - c)\} \quad (t \geq c, \quad 0 < \lambda < \infty)$$

$\lambda$  ... natürlicher Parameter (=Intensität, Ausfallrate)

$c$  ... Verschiebungsparameter (=Mindestlebensdauer)

Überlebenswahrscheinlichkeitsfunktion:	$R_T(t) = \exp\{-\lambda(t - c)\}$
Ausfalldichte	: $f_T(t) = \lambda \exp\{-\lambda(t - c)\}$
Ausfallrate	: $\lambda_T(t) = \lambda (> 0)$
mittlere Lebensdauer	: $\theta := ET = \frac{1}{\lambda} + c$
Varianz	: $\text{var}(T) = \frac{1}{\lambda^2}$
bedingte Überlebenswahrscheinlichkeit:	$c = 0$ :
$R_{T t}(s) = \exp(-\lambda s)$	$\left( = \frac{R_T(t+s)}{R_T(t)} \right)$
$k$ -tes Moment ( $c = 0$ )	: $ET^k = \frac{k!}{\lambda^k}$



In Verbindung mit der Exponentialverteilung soll anschließend eine wichtige Aussage für Ordnungsstatistiken angegeben werden:

**Satz 2.1:** Es seien  $T_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )  $n$  unabhängige identisch exponentialverteilte Lebensdauern,  $T_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ , und  $T_{(i)}$  die zugehörigen geordneten Zeiten:

$$\min(T_1, \dots, T_n) = T_{(1)} \leq T_{(2)} \leq \dots \leq T_{(n)} = \max(T_1, \dots, T_n)$$

. Für die Differenzen  $D_i := T_{(i)} - T_{(i-1)}$  ( $T_{(0)} \equiv 0$ ) gilt dann:

1.  $P(D_i \leq t) = 1 - \exp\{-(n - i + 1)\lambda t\}$  ( $t \geq 0; i = 1, \dots, n$ ) (ist gleichzeitig Verteilungsfunktion des Minimums von  $(n - i + 1)$  exponentialverteilten Zeiten),
2.  $D_1, D_2, \dots, D_n$  sind paarweise unabhängig,
3.  $ED_i = \frac{1}{(n-i+1)\lambda}$ ,  $\text{var}(D_i) = \frac{1}{(n-i+1)^2\lambda^2}$  ( $i = 1, \dots, n$ ),
4.  $n D_1, (n - 1)D_2, \dots, D_n$  sind unabhängig und identisch wie  $T_1$  verteilt, d.h.  
 $F_{(n-i+1)D_i}(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ),

$$5. ET_{(i)} = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n-i+1} \right), \quad \text{var}(T_{(i)}) = \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + \dots + \frac{1}{(n-i+1)^2} \right).$$

*Beweis:* Mit den Eigenschaften geordneter Stichproben erhält man die zwei ersten Aussagen. Aus der Exponentialverteilung für  $D_i$  folgt die Form von Erwartungswert und Varianz sowie auch die Verteilung von  $(n-i+1)D_i$ . Wegen  $T_{(i)} = \sum_{j=1}^i D_j$  ergibt sich die letzte Aussage.  $\square$

**Anwendung von Satz 2.1:**

Es seien  $n$  Betrachtungseinheiten in  $[0, t]$  geprüft worden. Dabei wurden  $i$  Ausfälle registriert. Die Gesamtprüfzeit (total-time-on-test-statistic) ist:

$$\tau(t) = nT_{(1)} + (n-1)(T_{(2)} - T_{(1)}) + \dots + (n-i+1)(T_{(i)} - T_{(i-1)}) + (n-i)(t - T_{(i)})$$

und aus (4.) folgt dann unmittelbar (vgl. auch "Gammaverteilung"):

$$\tau(T_{(i)}) \sim \text{Gamma}(\lambda, i), \text{ d.h. } f_{\tau(T_{(i)})}(t) = \frac{\lambda^i}{(i-1)!} t^{i-1} \exp(-\lambda t) \quad (t \geq 0).$$

**2.2.2 Weibullverteilung**

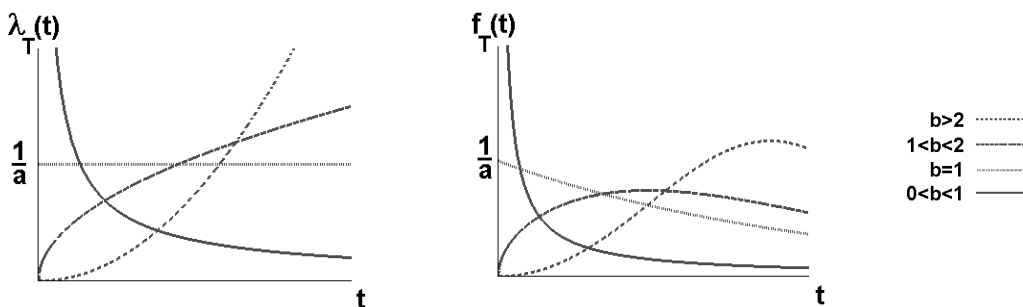
Die Zufallsvariable  $T$  ist Weibull-verteilt mit Parametern  $(a, b)$ , symbolisch  $T \sim \text{Weib}(a, b)$ , wenn  $\tilde{T} = (\frac{T}{a})^b \sim \text{Exp}(1, 0)$  bzw. wenn

$$F_T(t) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t}{a}\right)^b\right\} \quad (t \geq 0; \quad a > 0, b > 0)$$

$a$  ist der Skalenparameter und  $b$  der Formparameter. Es könnte zusätzlich als 3. Parameter ein Verschiebungsparameter  $c > 0$ , eine „Mindestlebensdauer“ verwendet werden.

Überlebenswahrscheinlichkeit	:	$R_T(t) = \exp\left\{-\left(\frac{t}{a}\right)^b\right\}$
Ausfalldichte	:	$f_T(t) = \frac{b}{a^b} t^{b-1} \exp\left\{-\left(\frac{t}{a}\right)^b\right\}$
$k$ -tes Moment	:	$ET^k = a^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{b}\right)$
		folglich $\theta := ET = a\Gamma(1 + 1/b)$
		$\text{var}(T) = a^2[\Gamma(1 + 2/b) - \Gamma^2(1 + 1/b)]$
		$V = \frac{\sqrt{\text{var}(T)}}{\theta} = \left[ \frac{\Gamma(1+2/b) - \Gamma^2(1+1/b)}{\Gamma^2(1+1/b)} \right]^{\frac{1}{2}}$
bedingte Überlebenswahrscheinlichkeit:		$R_{T t}(s) = \exp\left\{-a^{-b}[(t+s)^b - t^b]\right\}$
$\gamma$ -prozentuale Lebensdauer	:	$T_\gamma = a(-\ln \gamma)^{\frac{1}{b}}$

In den Formeln der Momente bedeutet  $\Gamma(\cdot)$  die Gammafunktion.





**Bemerkungen:**

1. Der Spezialfall „b=1“ ist die Exponentialverteilung, denn  $f_T(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$  mit  $\lambda = \frac{1}{a}$ .
2. Die Weibullverteilung ist eine der möglichen Grenzverteilungen für das Minimum von Zufallsgrößen (vgl. Barlow und Proschan (1978)). Wenn  $T$  Weibull-verteilt ist, dann ist  $T^* = \ln T$  mit der Extremwertverteilung vom Typ I (doppelte Exponentialverteilung, Gumbel (1958)) versehen:

$$F_{T^*}(t) = P(\ln T < t) = 1 - \exp\left\{-\exp\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)\right\}$$

mit  $\mu = \ln a, \sigma = \frac{1}{b}$ .

3. Die Weibullverteilung ist eine asymptotische Extremwertverteilung (vom Typ III). Durch die Transformation  $\ln \ln \frac{1}{1-F(t)} = b \ln t - b \ln a$  entsteht eine in  $t$  lineare Beziehung; sie liegt der Gestaltung der Wahrscheinlichkeitsnetze für Weibullverteilung zugrunde.

**2.2.3 Gammaverteilung**

Die Zufallsvariable  $T$  ist gammaverteilt mit Parametern  $(\lambda, \beta)$ , symbolisch  $T \sim \text{Gamma}(\lambda, \beta)$  ( $\lambda$  Skalenparameter,  $\beta$  Formparameter), wenn für ihre Verteilungsfunktion gilt:

$F_T(t) = \frac{\Gamma_{\lambda t}(\beta)}{\Gamma(\beta)}$  mit

$\Gamma_t(\beta) = \int_0^t x^{\beta-1} e^{-x} dx$  (unvollständige  $\Gamma$ -Fkt.)

$\Gamma(\beta) = \int_0^\infty x^{\beta-1} e^{-x} dx$  (vollständige  $\Gamma$ -Fkt.)

$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1), \Gamma(n) = (n-1)!,$

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Überlebenswahrscheinlichkeit

:  $R_T(t) = \frac{\Gamma(\beta) - \Gamma_{\lambda t}(\beta)}{\Gamma(\beta)}$

Ausfalldichte

:  $f_T(t) = \frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)} t^{\beta-1} e^{-\lambda t}$

Ausfallrate

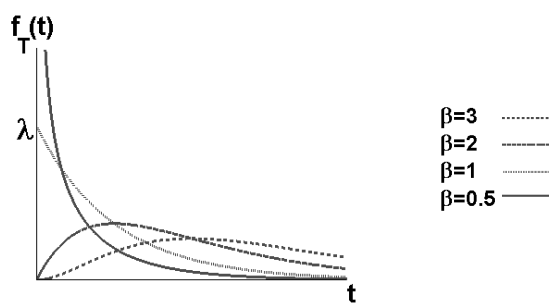
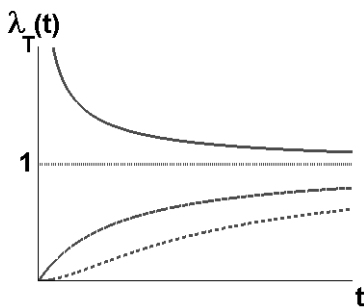
:  $\lambda_T(t) = \frac{\lambda^\beta t^{\beta-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\beta) - \Gamma_{\lambda t}(\beta)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \lambda$

$k$ -te Moment

:  $ET^k = \frac{\Gamma(k+\beta)}{\Gamma(\beta)} \frac{1}{\lambda^k}$

folglich:  $\theta = ET = \frac{\beta}{\lambda}, \text{var}(T) = \frac{\beta}{\lambda^2}$

bedingte Überlebenswahrscheinlichkeit:  $R_{T|t}(s) = \frac{\int_{\lambda t}^{\lambda(t+s)} x^{\beta-1} e^{-x} dx}{\int_{\lambda t}^{\infty} x^{\beta-1} e^{-x} dx} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-\lambda s}$



**Spezialfälle der Gammaverteilung:**

1.  $\beta = 1$  :  $f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ , d.h. Exponentialverteilung

2.  $\beta = k$  ( $k = 2, 3, \dots$ ):  $k$ -Erlang-Verteilung

$$R_T(t) = \exp(-\lambda t) \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^l}{l!}$$

$$\lambda_T(t) = \lambda^k t^{k-1} \left[ (k-1)! \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^l}{l!} \right]^{-1} \quad (\text{stets monoton wachsend})$$

3.  $\beta = \frac{n}{2}$ ,  $\lambda = \frac{1}{2}$  :  $\chi^2$ -Verteilung:  $f_T(t) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$  ( $x > 0$ )  $T \sim$  Erlang  
 $\rightarrow 2\lambda T \sim \chi_{2k}^2$

**2.2.4 weitere Lebensdauerverteilungen**

$T$  heißt bzgl.  $t = 0$  **gestutzt normalverteilt**, wenn

$$F_T(t) = a \left[ \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) \right] \quad (-\infty < \mu < \infty, \sigma > 0)$$

mit  $a = (1 - \Phi(-\frac{\mu}{\sigma}))^{-1}$ ,  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$

Überlebenswahrscheinlichkeit:	$R_T(t) = a(1 - \Phi(\frac{t-\mu}{\sigma}))$
Ausfalldichte:	$f_T(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$
Ausfallrate:	$\lambda_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} (1 - \Phi(\frac{t-\mu}{\sigma}))^{-1} \exp\left\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$ (streng wachsend)
mittlere Lebensdauer:	$ET = \mu + \frac{a\sigma}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right\}$ .

$T$  heißt **lognormal-verteilt**, wenn  $T^* = \ln T$  normalverteilt ist:

$$F_T(t) = \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right) \quad (-\infty < \mu < \infty, \sigma > 0),$$

$\mu$  ist der Maßstabsparameter und  $\sigma$  der Formparameter.

$$f_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t} \exp\left\{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad ET = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}, \quad \text{var}(T) = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$$

(Die Ausfallrate  $\lambda_T(t)$  i.a. nicht monoton.)

$T$  ist **invers-Gauß-verteilt**, wenn

$$F_T(t) = \Phi\left(\frac{\beta t - \alpha}{\sqrt{t}}\right) + e^{2\alpha\beta} \Phi\left(-\frac{(\alpha + \beta t)^2}{\sqrt{t}}\right) \quad (\alpha > 0, \beta > 0),$$

$$f_T(t) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi} t^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(\alpha - \beta t)^2}{2t}\right\},$$

$$ET = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \text{var}(T) = \frac{\alpha}{\beta^3}$$

(Die Ausfallrate  $\lambda_T(t)$  i.a. nicht monoton.)

## 2.3 Klassen von Lebensdauerverteilungen mit monotoner Ausfallrate

Es werden nun weitere Wahrscheinlichkeitsmodelle für die Zuverlässigkeitsanalyse betrachtet. Dafür muss die Existenz der Verteilungsdichte nicht vorausgesetzt werden.

Die Ausfallrate  $\lambda_T(t)$  als Funktion der Zeit ist geeignet, das Wesentliche des Ausfallverhaltens eines Ereignisses auszudrücken:

Zunehmende Ausfallrate bedeutet, dass sich das Ereignis im Laufe seines Lebens verschlechtert; abnehmende Ausfallrate heißt, dass das gebrauchte Erzeugnis besser als das neue Erzeugnis ist. Eine konstante Ausfallrate kennzeichnet den Fall, in dem sich das Alter des Erzeugnisses nicht auf die Zuverlässigkeit auswirkt.

Diese Fälle können auch kurz als „gebraucht schlechter als neu“, „gebraucht besser als neu“ oder „gebraucht so gut wie neu“ bezeichnet werden.

Wegen  $R_{T|t}(s) = \frac{R_T(t+s)}{R_T(t)} = \exp\left\{-\int_t^{t+s} \lambda_T(u) du\right\}$  kann das Verhalten der Ausfallrate auch alternativ über das der bedingten Überlebenswahrscheinlichkeit ausgedrückt werden:  $\lambda_T(t)$  wächst (fällt) monoton genau dann, wenn  $R_{T|t}(s)$  bei bel. (festem)  $s > 0$  monoton fällt (wächst).

Gemäß der genannten Kennzeichnung des Ausfallverhaltens definieren wir jetzt Klassen von Lebensdauerverteilungen.

**Definition 2.1:** Eine Lebensdauerverteilung mit  $F_T(t)$  gehört zur Klasse der IFR-(increasing failure rate)-Verteilungen, wenn  $R_{T|t}(s)$  bei bel. festem  $s \geq 0$  monoton in  $t$  fällt ( $0 < t < \infty$ ). Die durch  $F_T(t)$  beschriebene Verteilung gehört zur Klasse der DFR-(decreasing failure rate)-Verteilungen, wenn  $R_{T|t}(s)$  monoton in  $t$  wächst.

Bei bekannten Verteilungen mit Dichten kann die Zuordnung zu einer der beiden Klassen anhand der Ausfallrate getroffen werden; es ist

IFR-Verteilung: Erlang-Verteilung, gestutzte Normalverteilung, Weibull- und Gamma-Verteilung, sofern  $b \geq 1$  bzw.  $\beta \geq 1$ .

DFR-Verteilung: Weibull- und Gamma-Verteilung, bei  $b \leq 1$  bzw.  $\beta \leq 1$ ,  
(Die Exponentialverteilung ist gleichzeitig IFR- und DFR-Verteilung)

Günstig zur Beschreibung von Alterungsvorgängen ist auch eine gewisse stochastische Ordnung:

**Definition 2.2:** Wir nennen eine zufällige Zeit  $T$  mit Verteilungsfunktion  $F_T(t)$  stochastisch kleiner als die zufällige Zeit  $U$  mit Verteilungsfunktion  $G_U(t)$ :  $T \preceq^{(st)} U$ , wenn  $F_T(t) \geq G_U(t)$  für alle  $t \geq 0$ .

Wenn ein IFR-Verteilungstyp vorliegt und  $T_t$  die restliche Lebensdauer nach Erleben der Zeit  $t$  ist, dann gilt:  $T_{t_1} \succeq^{(st)} T_{t_2}$  für  $t_1 \leq t_2$ , d.h. die restliche Lebensdauer  $T_t$  wird mit

wachsendem  $t$  stochastisch kleiner. Entsprechendes gilt für DFR-Verteilungen.

Für IFR- und DFR-Verteilungen ergibt sich auch folgende Charakterisierung:

**Satz 2.2:** Verteilungen mit  $F_T(t)$  sind genau dann vom IFR- oder DFR-Verteilungstyp, wenn  $\ln R_T(t)$  konkav (konvex) ist.

Beweis: Sei  $Q(t) = -\ln R(t)$ . Dann gilt  $R_{T|t}(s) = \frac{R_T(t+s)}{R_T(t)} = e^{-(Q(t+s)-Q(t))}$ . Eine Verteilung mit  $F_T(t)$  ist vom IFR-Typ genau dann, wenn  $Q(t+s) - Q(t)$  wachsend in  $t$  für festes  $s \geq 0$ , und genau dann hat  $Q(t)$  in  $t$  wachsende Ableitungen, ist also konvex und  $\ln R_T(t)$  ist konkav.  $\square$

Die Klassen von IFR- und DFR-Verteilungen wurden erstmals von Barlow, Marshall und Proschan (1963) behandelt und sind in Barlow und Proschan (1978,[4]) genauer beschrieben. Interessant sind insbesondere auch Abschätzungen für  $R_T(t)$  und  $F_T(t)$ , die schärfer für diese Verteilungsklassen definiert werden können als allgemeine Ungleichungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Beispielsweise sei folgendes genannt: Wir betrachten zunächst die allg. bekannte Markovsche Ungleichung. Wenn  $m_k$  das  $k$ -te absolute Moment der Verteilung bedeutet, so gilt

$$R_T(t) \leq \begin{cases} 1 & \text{für } t < m_k^{\frac{1}{k}} \\ \frac{m_k}{t^k} & \text{für } t \geq m_k^{\frac{1}{k}} \end{cases}.$$

Verwendet man „nur“ den Erwartungswert  $m_1$ , so liefert die Markovsche Ungleichung im Fall der Exponentialverteilung (mit Parameter  $\lambda$  und  $\theta = \mathbf{E}T = \frac{1}{\lambda}$ )

$$R_T(t) \leq \begin{cases} 1 & \text{für } t < \theta \\ \frac{\theta}{t} & \text{für } t \geq \theta \end{cases};$$

im Fall der Weibullverteilung

$$R_T(t) \leq \begin{cases} 1 & \text{für } t < a\Gamma(1 + 1/b) \\ \frac{a\Gamma(1+1/b)}{t} & \text{für } t \geq a\Gamma(1 + 1/b) \end{cases}.$$

Für eine IFR-Verteilung erhält man andererseits für jeden Wert  $t$  eine obere Schranke für  $R_T(t)$  gemäß

$$R_T(t) \leq \begin{cases} 1 & \text{für } t < m_k^{1/k} \\ e^{-\omega t} & \text{für } t \geq m_k^{1/k} \end{cases}, \quad (*)$$

wobei  $m_k = k \int_0^t u^{k-1} e^{-\omega u} du$  die Lösung  $\omega$  liefert.

Die Ungleichung (\*) ist scharf, d.h. es gibt stets einen Wert von  $t$ , für den das Gleichheitszeichen gilt. Aus (\*) ergibt sich eine viel engere Begrenzung der Überlebenswahrscheinlichkeit als aus der entsprechenden Markovschen Ungleichung, wie das folgende Beispiel verdeutlicht:  $F_T(t)$  sei Verteilungsfunktion einer IFR-Verteilung; Abschätzung für  $R_T(t)$ :

	gemäß „Markov“	gemäß (*)
$m_k = k = 1$	$t = 2 \quad R_T(2) \leq 0.5$	$R_T(2) \leq 0.2 \quad (\omega = 0.8)$
	$t = 5 \quad R_T(5) \leq 0.2$	$R_T(5) \leq 0.007 \quad (\omega = 0.993)$

Für IFR-Verteilungen kann ebenfalls eine untere Schranke für  $R_T(t)$  angegeben werden:

$$R_T(t) \geq \begin{cases} \exp \left[ -\frac{t}{\lambda^{1/k}} \right] & \text{für } t \leq m_k^{1/k} \\ 0 & \text{für } t > m_k^{1/k}, \end{cases}$$

wobei  $\lambda_k$  aus der Gleichung  $\lambda_k = \frac{m_k}{\Gamma(k+1)}$  zu berechnen ist.

Für die Praxis wird insbesondere der Fall „ $k = 1$ “ verwendet, man erhält bei IFR-Verteilungen die folgenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned} 0 < t < m_1 &: 1 \geq R_T(t) \geq e^{-t/m_1} \\ t > m_1 &: e^{-\omega t} \geq R_T(t) \geq 0, \text{ wobei } \omega \text{ aus } m_1 = \frac{1}{\omega}(1 - e^{-\omega t}). \end{aligned}$$

**Bemerkung:**

1. Ähnliche Abschätzung für  $R_T(t)$  gelten bei DFR-Verteilungen (vgl. Barlow und Proschan (1978,[4])).
2. Derartige Schranken dienen auch zu Abschätzungen in strukturierten Systemen, wenn deren Elemente Lebensdauerverteilungen aus IFR- bzw. DFR-Klassen besitzen. Z.B. gilt im Seriensystem:

$$R_{T_S}(t) \geq \exp \left\{ -t \sum_{i=1}^n \frac{1}{\theta_i} \right\} \text{ für } t < \min(\theta_1, \dots, \theta_n),$$

wobei  $\theta_i$  die mittlere Lebensdauer des  $i$ -ten Elements ist.

Weitere Verallgemeinerungen der betrachteten Verteilungsklassen ergeben sich, wenn die durchschnittliche Ausfallrate

$$\bar{\lambda}_T(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \lambda_T(u) du \quad \left( = \frac{Q(t)}{t} \right)$$

betrachtet und damit der monotone Verlauf von  $\lambda_T(t)$  „abgeschwächt“ wird.

**Definition 2.3:** Eine Lebensdauerverteilung mit  $F_T(t)$  ist eine IFRA- (DFRA-) Verteilung, wenn  $-\frac{\ln R_T(t)}{t} = \frac{Q(t)}{t}$  monoton wachsend (fallend) in  $t$  ( $t \geq 0$ ) ist.

Eine Verteilung mit  $F_T(t)$  ist eine NBU- (NWU-) Verteilung, wenn  $R_T(t+x) \underset{(\leq)}{(\geq)} R_T(t)R_T(x)$  für alle  $x \geq 0, t \geq 0$ .

**Bemerkung:**

1. Für die definierten „allgemeineren“ Klassen existieren auch scharfe Abschätzungen.
2. IFRA ... increasing failure rate average  
NBU ... new better than used  
NWU ... new worse than used

## 2.4 Einige Aussagen zur Systemlebensdauer

### 1. Verteilungsmodell Exponentialverteilung

**Seriensystem :** Für die Lebensdauer  $T_S$  des Seriensystems gilt

$$T_S = \min(T_1, \dots, T_n);$$

sind die  $n$  Elemente mit unabhängigen und exponentialverteilten ( $\lambda_i$ ) Lebensdauern  $T_i$  versehen, so gilt

$$R_{T_S} = P(T_S > t) = \prod_{i=1}^n P(T_i > t) = \prod_{i=1}^n R_{T_i}(t) = \exp \left[ -t \sum_{i=1}^n \lambda_i \right]$$

und

$$\theta_S = ET_S = \left[ \sum_{i=1}^n \lambda_i \right]^{-1} \quad (= \frac{1}{n\lambda}, \text{ sofern } \lambda_i = \lambda \text{ für alle } i),$$

also ist  $T_S$  wiederum exponentialverteilt.

**Bemerkung:** In der Praxis versteht man unter „Baueinheit“ oder „Baugruppe“ oftmals ein (Teil-)System mit (im Sinne der Zuverlässigkeits-Ersatzschaltung) serienschalteten Elementen. Das bedeutet, dass beim Ausfall eines Elementes die gesamte Baugruppe auszuwechseln ist.

**$k$ -aus- $n$ -System :** In diesem System sind  $k$  Elemente funktionswichtig und  $m = n - k$  Elemente als (kalte) Reserve aufzufassen. Alle Elemente-Lebensdauern sind unabhängig und es ist  $T_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Dann gilt für die Systemlebensdauer  $T_S =: T_{n,k}$  die folgende Darstellung

$$T_{n,k} = T^{(1)} + \dots + T^{(m+1)},$$

wobei  $T^{(j+1)}$  die Lebensdauer von  $k$  funktionswichtigen Elementen vor Einsatz des  $j$ -ten Reserveelements ist. Nun sei identische Exponentialverteilung angenommen (d.h.  $\lambda_i = \lambda$ ). Dann ist  $T^{(j+1)} = \min(T_1, \dots, T_k) \sim \text{Exp}(k\lambda)$ , wobei verwendet wird, dass auch jede Restlebensdauer wieder mit  $\lambda$  exponentialverteilt ist. Es kann davon ausgegangen werden, dass die  $T^{(j+1)}$  unabhängig sind. Also gilt:

$$T_{n,k} \sim \text{Gamma}(k\lambda, m + 1), \text{ d.h.}$$

$$F_{n,k}(t) = 1 - \sum_{j=0}^m \frac{(k\lambda t)^j}{j!} e^{-k\lambda t} = \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{(k\lambda t)^j}{j!} e^{-k\lambda t}, \quad ET_{n,k} = \frac{m+1}{k\lambda}.$$

### Anwendungsbeispiel „ $k$ -aus- $n$ -System mit spezieller Reserveorganisation“

1.  $n = 2k$ ,  $m = k$  Reserveelemente bilden eine Reserveanlage, die bei Ausfall der ersten Anlage (mit  $k$  funktionswichtigen Elementen) zugeschaltet wird:

$$\text{erste Anlage: } F_{k,k}(t) = 1 - e^{-k\lambda t}$$

Gesamtsystem (Doppelanlage):

$$\tilde{F}_{2,1}(t) = 1 - \sum_{j=0}^1 \frac{(k\lambda t)^j}{j!} e^{-k\lambda t} = 1 - e^{-k\lambda t} - k\lambda t e^{-k\lambda t}, \quad \mathbf{E}\tilde{T}_{2,1} = \frac{2}{k\lambda}.$$

2.  $n = 2k$ , System mit  $k$  funktionswichtigen Elementen, zu jedem dieser Elemente ist ein weiteres Element (in kalter Reserve) zugeordnet:

„Doppelement“:  $F_{2,1}(t) = 1 - (1 + \lambda t)e^{-\lambda t}$

Gesamtsystem:

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{k,k}(t) &= 1 - \prod_{j=1}^k (1 + \lambda t)e^{-\lambda t} = 1 - (1 + \lambda t)^k e^{-k\lambda t} \\ \mathbf{E}\tilde{T}_{k,k} &= \int_0^\infty [(1 + \lambda t)e^{-\lambda t}]^k dt = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \int_0^\infty (\lambda t)^l e^{-k\lambda t} dt \\ &= \frac{(k-1)!}{k\lambda \cdot k^{k-1}} \sum_{l=0}^k \frac{k^l}{l!} \approx \frac{1}{k\lambda} \sqrt{\frac{k\pi}{2}}\end{aligned}$$

3.  $n = 2k$ , eigentliches  $k$ -aus- $n$ -System mit  $k$  funktionswichtigen und weiteren  $m = k$  Reserveelementen (in einem gemeinsamen (kalten) Reserve-Pool):

$$F_{2k,k}(t) = 1 - \sum_{j=0}^k \frac{(k\lambda t)^j}{j!} e^{-k\lambda t} = \sum_{j=k+1}^\infty \frac{(k\lambda t)^j}{j!} e^{-k\lambda t}, \quad \mathbf{E}T_{n,k} = \frac{k+1}{k\lambda} = \left(1 + \frac{1}{k}\right) \frac{1}{\lambda}$$

Es wird ersichtlich, dass (für  $k > 2$ ) die mittleren Lebensdauern von (1) nach (3) wachsen!

## 2. Verteilungsmodell Weibullverteilung

Wir betrachten ein Seriensystem von  $n$  Elementen mit unabhängigen Lebensdauern, die 2-parametrisch Weibull-verteilt sind:  $T_S = \min(T_1, \dots, T_n)$ ,

$$R_{T_S}(t) = P(T_S > t) = \prod_{i=1}^n R_{T_i}(t) = \exp \left[ - \sum_{i=1}^n \left( \frac{t}{a_i} \right)^{b_i} \right].$$

1. Spezialfall  $b_1 = \dots = b_n =: b$ :

$$R_{T_S} = \exp \left[ - \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^{b_i}} \right) t^b \right], \text{ also } T_S \sim \text{Weib}((a_1^{-b} + \dots + a_n^{-b})^{1/b}, b).$$

2. Lebensdauerkenngößen des Systems sind i.a. nur numerisch berechenbar:  
mittlere Lebensdauer:  $ET_S = \theta_S = \int_0^\infty R_{T_S}(t) dt$  (durch numerische Integration),  
 $\gamma$ -prozentuale Lebensdauer  $t_{S,\gamma}$ : als numerische Lösung von  $R_{T_S}(t_{S,\gamma}) = \gamma$ .

3. Beim Übergang zur 3-parametrischen Weibull-Verteilung muss (z.B. zur numerischen Integration) folgende Aufteilungen beachtet werden:

$$R_{T_S}(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < c_1 \\ \exp \left[ - \left( \frac{t-c_1}{a_{i_1}} \right)^{b_{i_1}} \right] & c_1 \leq t < c_2 \\ \exp \left[ - \left( \frac{t-c_1}{a_{i_1}} \right)^{b_{i_1}} - \left( \frac{t-c_2}{a_{i_2}} \right)^{b_{i_2}} \right] & c_2 \leq t < c_3 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

wobei die Parametertripel  $(a_i, b_i, c_i)$  nach der Größe der  $c_i$  geordnet sind, d.h.  $(c_j, a_{i_j}, b_{i_j})$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

# Kapitel 3

## Statistik für Lebensdauerdaten

Die praktische Zuverlässigkeitsanalyse beginnt mit der Erfassung bzw. der Bereitstellung von Ausfalldaten technischer Erzeugnisse. Man muss nun davon ausgehen, dass die den Ausfallzeiten zugrunde liegende Lebensdauerverteilung - zumindest teilweise - unbekannt ist. Mittels geeigneter statistischer Verfahren versucht man, die fehlenden Verteilungsinformationen aus einer Datenauswertung zu gewinnen. Dabei muss betont werden, dass man stets in einer gewissen statistischen Schlussweise von den Daten der Stichprobe auf die unbekannt Grundgesamtheit der Lebensdauerdaten schließen wird und nur wenige Eigenschaften der Grundgesamtheit als bekannt vorausgesetzt werden können. Es ergeben sich die folgenden beiden Untersuchungsrichtungen:

### 1. Schätzung von Verteilungsparametern und Zuverlässigkeitskenngrößen.

Es stehen Punkt- und Konfidenzschätzungen (Bereichsschätzungen) zur Verfügung. Da in der Regel ein Verteilungstyp vorher festgelegt wurde, kann man eine Likelihoodfunktion aufstellen und Parameter-Schätzwerte nach der Maximum-Likelihood-Methode ermitteln. Damit in Verbindung werden auch Schätzbereiche (z.B. Konfidenzintervalle) für Verteilungsparameter konstruierbar.

Weitere Methoden zur Gewinnung von Parameterschätzern, wie die Momentenmethode oder die Minimum-Quadrat-Methode sollen hier nicht verwendet werden.

Einer besonderen Möglichkeit zur Schätzung von Verteilungsparameter, nämlich mit der Bayes-Methode wird aber Raum gegeben. Man geht dabei davon aus, dass Vorinformationen über Verteilungsparameter zur Festlegung einer Prior-Parameterverteilung genutzt werden. Aus einer Posterior-Verteilung können dann Bayes-Punktschätzungen oder auch Bayessche Vertrauensintervalle hergeleitet werden.

### 2. Datenanpassung und Zuverlässigkeitsnachweis.

Neben einfachen Verfahren zur näherungsweisen Festlegung der Lebensdauerverteilung (empirische Verteilungsfunktion und graphische Verfahren) werden Anpassungstest-



und Alternativtestverfahren zur Entscheidung über Verteilungshypothesen bzw. über den Wert von Lebensdauererkenngrößen genutzt.

Ausgangspunkt aller Untersuchungen sind stets Lebensdauerdaten, d. h. Realisierungen einer zufälligen Lebensdauer  $T$ , die in folgenden Formen vorliegen können (z. B. bei  $n$  Prüflingen im Prüflabor):

- als vollständige einfache Stichprobe  $(t_1, \dots, t_n)$  oder
- als geordnete Stichprobe  $(t_{(1)}, \dots, t_{(n)})$  oder
- als zensierte (gestutzte) Stichprobe  $(t_{(1)}, \dots, t_{(r)})$  ( $r < n$ ).

Zur Datengewinnung, also zur Organisation der Datenerfassung, werden sogenannte Prüfpläne (auch "Zuverlässigkeitsprüfpläne") verwendet, mit denen i. d. R. zensierte Stichproben entstehen:

$[n, 0, r]$  ... „ausfallterminierter Prüfplan ohne Ersatz“

$[n, E, r]$  ... „ausfallterminierter Prüfplan mit Ersatz“

$[n, 0, t^*]$  ... „zeitterminierter Prüfplan ohne Ersatz“

Dabei gibt  $n$  die Anzahl der Prüfplätze, 0 bzw.  $E$  „kein Ersatz“ oder „Ersatz“ für einen ausgefallenen Prüfling und  $r$  bzw.  $t^*$  die Prüfdauerinformation (Prüfdauer  $t_r$  bis zum  $r$ -ten Ausfall oder feste Prüfzeit  $t^*$ ) an.

Weitere Prüfpläne sind:  $[n, E, t^*]$ ,  $[n, 0, (r, t^*)]$ ,  $[n, E, (r, t^*)]$ .

Hierbei bedeutet  $(r, t^*)$  die Prüfung bis zum Minimum der Zeiten  $t_r$  und  $t^*$ .

### 3.1 Schätzung von Verteilungsparametern

Das Wahrscheinlichkeitsmodell für die zufällige Lebensdauer  $T$ , d.h. der Verteilungstyp wird als bekannt vorausgesetzt. Aus den Beobachtungswerten sind unbekannte Verteilungsparameter zu schätzen, also im Sinne des Schlusses von der Stichprobe auf die Verteilungsgesamtheit. Als Parameter können die reellen Werte, die den Verteilungstyp charakterisieren, angesehen werden, es können aber auch Verteilungsmomente oder andere Lebensdauererkenngrößen sein. Mittels der Schätzverfahren werden einerseits Werte für die Parameter (Punktschätzwerte) oder andererseits Schätzbereiche angegeben, die den wahren Parameter mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit überdecken.

Es gibt, wie eingangs zum Kapitel genannt, verschiedene Methoden, mit denen die Parameter  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$  einer Lebensdauervertelung geschätzt werden können. Da den Beobachtungsdaten, die Realisierungen einer zufälligen Lebensdauer  $T$  sind und die z.B. als Stichprobe

$$(t_1, \dots, t_n)$$

vorliegen mögen, einem bekannten Verteilungstyp genügen, kann man die gemeinsame Dichte der  $n$  Beobachtungswerte angeben:

$$\mathbf{f}(t_1, \dots, t_n; \theta) = f_T(t_1; \theta) \dots f_T(t_n; \theta) \quad (0 < t_1 < \infty, \dots, 0 < t_n < \infty; \theta \in \Theta)$$

Wird diese gemeinsame Dichte nun als Funktion vom Parameter  $\theta$  angesehen, dann nennt man diese Funktion **Likelihoodfunktion**:

$$L(\theta) = L(\theta; t_1, \dots, t_n) := f_T(t_1; \theta) \dots f_T(t_n; \theta). \quad (3.1)$$

Die Likelihoodfunktion ist ein Maß dafür, inwieweit Parameterwerte  $\theta$  eine bereits vorliegende Stichprobe  $(t_1, \dots, t_n)$  repräsentieren. Der maximale Wert  $\theta$  von  $L(\theta)$  entspricht der Stichprobe am besten, er ist der plausibelste Wert. Aus dieser Erkenntnis leitet sich die Maximum-Likelihood-Methode ab, und dieser Wert  $\theta$  ist dann der Maximum-Likelihood-Schätzer (kurz: ML-Schätzer).

Zur Gewinnung des Maximum-Likelihood-Schätzers löst man eine Extremwertaufgabe und zwar aus praktischen Gründen für  $\ln(L(\theta))$ .

Auf Eigenschaften der Punktschätzer, wie Erwartungstreue, Konsistenz oder Effektivität wird später in konkreten Modellen eingegangen.

Es sei noch erwähnt, dass Eigenschaften der Likelihoodfunktion zur Konstruktion von Parameterschätzbereichen (mit vorgegebener Überdeckungswahrscheinlichkeit) genutzt werden.

### 3.1.1 Modell Exponentialverteilung

- Die zufällige Lebensdauer  $T$  sei exponentialverteilt mit dem Parameter  $\lambda$ . Es wird angenommen, dass Daten nach einem **Prüfplan**  $[n, O, r]$  ermittelt wurden, also der Datensatz:  $t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \dots \leq t_{(r)}$  ( $r \leq n$ ) vorliegt. Es besteht die Aufgabe, den ML-Schätzer für  $\lambda$  zu finden.
- Da im Prüfplan eine zensierte Stichprobe erhalten wird, also die Ausfallzeitpunkte der zufälligen Lebensdauer  $T$  im Zeitintervall  $[0, t_{(r)}]$  liegen und  $r \leq n$  Prüflinge ausgefallen sind, wird als Likelihoodfunktion verwendet:

$$L(r, \lambda) = \frac{n!}{(n-r)!} \left[ \prod_{i=1}^r f_T(t_{(i)}, \lambda) \right] [1 - F_T(t_{(r)}, \lambda)]^{n-r} \quad (3.2)$$

$F_T(\cdot, \lambda)$  ist die Verteilungsfunktion von  $T$ . Der Faktor  $\frac{n!}{(n-r)!}$  weist auf die Anzahl der Variationen von  $n$  Elementen bei  $(n-r)$  überlebenden hin. Übrigens ist bei  $n=r$  die Likelihoodfunktion (3.2) von der Form (3.1).

Unter Verwendung von

$$S(t) = nt_{(1)} + (n-1)(t_{(2)} - t_{(1)}) + \dots + (n-r)(t - t_{(r)}) = \sum_{i=1}^r t_{(i)} + (n-r)t$$

ergibt sich

$$L(\lambda) = \frac{n!}{(n-r)!} \lambda^r e^{-\lambda S(t)}, \text{ wobei } t = \begin{cases} t_{(r)} & \text{für } [n, O, r] \\ t^* & \text{für } [n, O, t^*] \end{cases}$$

Wir bemerken, dass bei Verwendung des Planes  $[n, O, t^*]$  die gleiche Form der Likelihoodfunktion entsteht, also der Tausch  $(t_{(r)} \rightarrow t^*)$  erfolgt.

- **ML-Schätzer:**

Als Lösung der Extremwertaufgabe bezüglich (3.2) erhält man:

$$\text{für } \lambda : \hat{\lambda} = \frac{r}{S(t)}, \quad \text{für } \theta : \hat{\theta} = \frac{S(t)}{r}.$$

Bemerkungen:

1. ML-Schätzer sind asymptotisch erwartungstreu, asymptotisch effektiv, asymptotisch normalverteilt.

2. Für Pläne  $[n, E, r]$  bzw.  $[n, E, t^*]$  ist

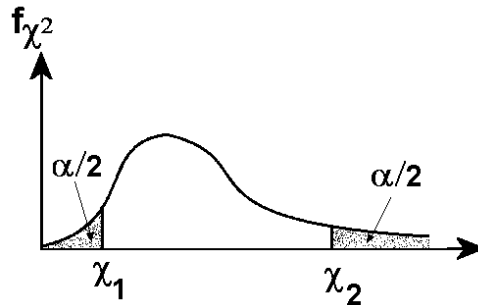
$$L(\lambda) = (n\lambda)^r \exp\{-n\lambda t\} \text{ mit } t = \begin{cases} t^* \\ t_{(r)} \end{cases}, \quad r \leq n$$

und  $\hat{\lambda} = \frac{r}{nt}$  bzw.  $\hat{\theta} = \frac{nt}{r}$ .  $\hat{\theta}$  ist erwartungstreu bezüglich  $\theta$  und von minimaler Varianz.

- **Konfidenzschätzung bei  $[n, O, r]$ :**

Es ist bekannt:  $S(t) \sim \text{Gamma}(\lambda, r)$ -verteilt für  $t = t_{(r)}$  und  $\frac{2}{\theta}S(t) \sim \chi_{2r}^2$ -verteilt

Damit gilt der Ansatz:  $P(\chi_1 \leq \frac{2}{\theta}S(t) \leq \chi_2) = 1 - \alpha \Rightarrow P(\frac{2S(t)}{\chi_2} \leq \theta \leq \frac{2S(t)}{\chi_1}) = 1 - \alpha$   
( $\chi_1$  und  $\chi_2$  sind Quantile der  $\chi_{2r}^2$ -Verteilung.)



Konfidenzgrenzen für  $\theta$  und  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \text{zweiseitig: } \underline{\theta}_{\alpha/2} &= \frac{2rS(t)}{\chi_{1-\alpha/2; 2r}^2} \left( = \frac{1}{\lambda_{1-\alpha/2}} \right) =: f_{\theta_u}^E(\alpha/2) \cdot \hat{\theta} \\ \bar{\theta}_{1-\alpha/2} &= \frac{2S(t)}{\chi_{\alpha/2; 2r}^2} \left( = \frac{1}{\lambda_{\alpha/2}} \right) =: f_{\theta_o}^E(\alpha/2) \cdot \hat{\theta} \\ \text{einseitig: } \underline{\theta}_{\alpha} &= \frac{2S(t)}{\chi_{1-\alpha; 2r}^2} \left( = \frac{1}{\lambda_{1-\alpha}} \right) =: f_{\theta_u}^E(\alpha) \cdot \hat{\theta} \\ \bar{\theta}_{1-\alpha} &= \frac{2S(t)}{\chi_{\alpha; 2r}^2} \left( = \frac{1}{\lambda_{\alpha}} \right) =: f_{\theta_o}^E(\alpha) \cdot \hat{\theta} \end{aligned}$$

Konfidenzgrenzen für die  $\gamma$ -prozentuale Lebensdauer  $t_{\gamma}$ :

Wegen  $t_{\gamma} = \theta \ln \frac{1}{\gamma}$  ergeben sich beispielsweise die folgenden zweiseitige Grenzen:

$$\underline{t}_{\gamma, \alpha/2} = f_{\theta_u}^E(\alpha/2) \hat{\theta} \ln \frac{1}{\gamma}, \quad \bar{t}_{\gamma, 1-\alpha/2} = f_{\theta_o}^E(\alpha/2) \hat{\theta} \ln \frac{1}{\gamma}$$

**Beispiel** (Die Daten entstammen Untersuchungen für den Elektromaschinenbau Dresden, "Ausfälle Schiffs-Hauptgenerator")

$[n, O, t^*]$ ,  $n = 10$ ,  $t^* = 10^4 \text{h}$

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_{(i)}$	550	790	1660	1802	2700	4011	4383	6000	9800	-

Bemerkung: Die „Datenanpassung“ ergab keinen Einwand gegen "Exponentialverteilung".

Punktschätzung:  $\hat{\theta} = \frac{S(t^*)}{r} = 4632.91 \text{h}$ ,  $\hat{t}_{\gamma} = 237.64 \text{h}$  (für  $\gamma = 0.95$ )

Konfidenzschätzung ( $\alpha = 0.1$ ; Annahme  $t^* := t_{(9)}$ ,  $[n, O, r^*]$  verwendet)

aus Tabelle:  $f_{\theta_u}^E(\alpha/2) = 0.623$ ,  $f_{\theta_o}^E(\alpha/2) = 1.917$

also  $\theta \in [2886.30; 8881.29]$ ,  $t_{\gamma} \in [148.05; 455.56]$

- **Konfidenzschätzung bei  $[n, O, t^*]$**

Es sei  $r$  die Anzahl der Ausfälle bis zum Prüfungsende bei  $t^*$  und wird als Zufallsvariable angenommen. Diese Zufallsvariable ist diskret und binomialverteilt mit dem Parameter  $p = p(t^*) = 1 - e^{-\lambda t^*}$ , der Ausfallwahrscheinlichkeit eines Prüflings.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} P(r = k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{(n-k)} \quad (k = 0, 1, \dots, n) \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{\Gamma((k+1) + (n-k+1))}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)} p^{(k+1)-1} (1-p)^{(n-k+1)-1} \\ &= \frac{1}{n+1} f_{\text{BetaI}}(p) \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass  $P(r = k)$  mit einer (stetigen) Betaverteilung 1. Art in Verbindung gebracht werden kann, mit dem Argument  $p$  in der Dichte.

Der oben genannte Zusammenhang zwischen Binomial- und Betaverteilung wird dargestellt für Konfidenzintervalle genutzt: es sei jetzt  $n$  und  $r = k$  fest;  $p = p(t^*)$  kann variieren und soll zwischen zwei Grenzen  $\underline{p}$  und  $\bar{p}$  so gelegt werden, dass die Überdeckungswahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$  beträgt. Diese Wahrscheinlichkeit wird mittels Beta-Verteilung mit den Parametern  $\tilde{p} = k + 1$  und  $\tilde{q} = N - k + 1$  festgelegt,  $\underline{p}$  und  $\bar{p}$  sind Quantile der Betaverteilung. Bei Auflösung „ $p = 1 - e^{-\lambda t^*}$ “ nach  $\lambda$  ergeben sich dann Konfidenzgrenzen für  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \text{zweiseitig:} \quad \underline{\lambda}_{\alpha/2} &= \frac{1}{t^*} \ln \frac{1}{1 - B_{\alpha/2}(r+1, n-r+1)} \\ \bar{\lambda}_{1-\alpha/2} &= \frac{1}{t^*} \ln \frac{1}{1 - B_{1-\alpha/2}(r+1, n-r+1)} \\ \text{einseitig, obere Grenze:} \quad \bar{\lambda}_{1-\alpha} &= \frac{1}{t^*} \ln \frac{1}{1 - B_{1-\alpha}(r+1, n-r+1)} \\ \text{einseitig, untere Grenze:} \quad \underline{\lambda}_{\alpha} &= \frac{1}{t^*} \ln \frac{1}{1 - B_{\alpha}(r+1, n-r+1)} \end{aligned}$$

Konfidenzintervalle für  $\theta = \frac{1}{\lambda}$  ergeben sich entsprechend.

### 3.1.2 Modell Weibullverteilung

- Formparameter  $b$  bekannt:

In diesem Fall kann die Verbindung zur Exponentialverteilung ausgenutzt werden: wenn  $T \sim \text{Weib}(a, b)$ , dann gilt  $\tilde{T} = T^b \sim \text{Exp}(a^{-b})$ .

verwende: die Stichprobe  $t_1^b \leq t_2^b \leq \dots \leq t_r^b$  anstelle der ursprünglichen Stichprobe  $(t_1, \dots, t_n)$ ,

es ist  $\theta = a\Gamma(1 + 1/b) = (\tilde{\theta})^{1/b}\Gamma(1 + 1/b)$ ,

$\tilde{\theta} := \frac{1}{\lambda} = a^b$  mittlere Lebensdauer der exponentialverteilten Werte  $t_i^b$

folglich: erhält man Punktschätzer und Intervalle der Konfidenzschätzung:

$$\hat{\theta} = (\hat{\tilde{\theta}})^{1/b}\Gamma(1 + 1/b)$$

$$\frac{\theta_{\alpha/2}}{\theta} = f_{\theta_u}(\alpha/2) \cdot \hat{\theta} = [f_{\theta_u}^E(\alpha/2)]^{1/b} \hat{\theta}$$

$$\frac{\theta_{1-\alpha/2}}{\theta} = f_{\theta_o}(\alpha/2) \cdot \hat{\theta} = [f_{\theta_o}^E(\alpha/2)]^{1/b} \hat{\theta}$$

- Beispiel (Daten aus Untersuchungen für den Elektromaschinenbau Dresden, "Lebensdauer" von Fett 8046 in Lagern von Elektromotoren 1.5kW, Prüftemperatur 100° C):  $[n, O, n]$ ,  $n = 8$ : 8301, 11182, 13678, 22342, 22990, 23470, 33238, 33238 [h]

Es konnte  $b = 2$  angenommen werden. Damit ergab sich:

$$\Rightarrow \hat{\theta} = (\hat{\tilde{\theta}})^{1/b}\Gamma(1 + 1/b) = \left(\frac{1}{8} \sum t_i^2\right)^{1/2} 0.8862 = 20230\text{h}$$

bei  $\alpha = 0.1$ , einseitig:  $\theta \in [16670, \infty)$

- Formparameter  $b$  unbekannt:

Die ML-Schätzer der Parameter  $(a, b)$  erhält man bei Verwendung der Pläne  $[n, O, t^*]$  oder  $[n, O, r]$  mit der Likelihoodfunktion (3.2), also mit:

$$L := L(a, b) = \frac{n!}{(n-r)!} \frac{b^r}{a^{rb}} \prod_{i=1}^r t_i^{b-1} \exp \left\{ -\sum_{i=1}^r \left(\frac{t_i}{a}\right)^b \right\} \exp \left\{ -(n-r) \left(\frac{t}{a}\right)^b \right\}$$

$$\text{mit } t = \begin{cases} t^* \\ t_r \end{cases} \quad \text{und } r = \begin{cases} r \\ r^* \end{cases} \quad \text{bei } \begin{cases} [n, O, t^*] \\ [n, O, r^*] \end{cases}$$

ML-Gleichungen:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = -\frac{rb}{a} + \frac{b}{a^{b+1}} \left[ \sum_{i=1}^r t_i^b + (n-r)t^b \right] = 0$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial b} = \frac{r}{b} - r \ln a + \sum_{i=1}^r \ln t_i + \frac{1}{a^b} \left[ \sum_{i=1}^r (\ln a) t_i^b - \sum_{i=1}^r (\ln t_i) t_i^b - (n-r) \left(\ln \frac{t}{a}\right)^b \right] = 0$$

mit

$$T_1(b) = \sum_{i=1}^r t_i^b + (n-r)t^b$$

$$T_2(b) = -\sum_{i=1}^r (\ln t_i) t_i^b - (n-r) \left(\ln \frac{t}{a}\right)^b + \sum_{i=1}^r (\ln a) t_i^b$$

$$T_3(b) = \sum_{i=1}^r \ln t_i$$

$$\Rightarrow ra^b - T_1(b) = 0, \quad ra^b - rba^b \ln a + ba^b T_3 + b[(\ln a)T_1(b) - T_2(b)] = 0$$

Die Lösungen sind:

$$\hat{a} = \left[ \frac{1}{r} T_1(\hat{b}) \right]^{1/\hat{b}} \quad r + \hat{b} \left[ T_3 - r \frac{T_2(\hat{b})}{T_1(\hat{b})} \right] = 0 \quad (3.3)$$

Für eine Lösung  $\hat{b}$  ist der zweite Teil von (3.3) nur numerisch z.B. mittels Newton-Raphson-Verfahren zu behandeln. Das Einsetzen in den ersten Teil ergibt den Punktschätzer  $\hat{a}$  für  $a$ .

Konfidenzschätz-Intervalle kann man unter Verwendung von "asymptotischer Normalverteiltheit der ML-Schätzer  $\hat{a}, \hat{b}$ " ermitteln.

## 3.2 Datenanpassung

### 3.2.1 Empirische Verteilungsfunktion

Wir gehen davon aus, dass die Ausfalldaten aus einer vollständigen Stichprobe in eine geordnete Stichprobe  $(t_{(1)}, \dots, t_{(n)})$  überführt wurden oder die geordnete Stichprobe bereits vorliegt. Dann ist bekanntermaßen die empirische Verteilungsfunktion

$$\widehat{F}_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < t_{(1)} \\ i/n & \text{für } t_{(i)} \leq t < t_{(i+1)}, i = 1, \dots, n-1 \\ 1 & \text{für } t \geq t_{(n)} \end{cases} \quad (3.4)$$

eine gute Schätzfunktion für die tatsächliche Verteilungsfunktion  $F_T(t)$  der Lebensdauer  $T$  (Ausfallfunktion), denn für jedes  $t$  ist  $\widehat{F}_n(t)$  ein erwartungstreuer und konsistenter Schätzer für  $F_T(t)$ , und gemäß des Satzes von Glivenko gilt:  $P(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_t |\widehat{F}_n(t) - F_T(t)| = 0) = 1$ .

### 3.2.2 Grafische Verfahren

Es werden Familien 2-parametrischer Lebensdauerverteilungen

$$F_T(t; a, b), \quad a \in \mathbb{R}^1, \quad b \in \mathbb{R}^1$$

betrachtet.

Im allgemeinen ist bei gegebenen Parametern  $a$  und  $b$  aus der Form der Verteilungsfunktion kein Rückschluss auf den Verteilungstyp möglich (Ausnahme: Gleichverteilung). Jedoch führen unterschiedliche Transformationen der Verteilungsfunktion für die verschiedenen Verteilungstypen auf Geraden, z.B.

$$\begin{aligned} \text{Weibullverteilung: } z &:= F_T(t; a, b) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t}{a}\right)^b\right\} \\ &= 1 - \exp\left\{-\exp\left(\frac{\ln t - \ln a}{\frac{1}{b}}\right)\right\} =: F_0\left(\frac{\ln t - \ln a}{\frac{1}{b}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln(1 - z) &= -\left(\frac{t}{a}\right)^b \\ v := \ln(-\ln(1 - z)) &= b \ln t - b \ln a =: bu - b \ln a \end{aligned}$$

Allgemein wird betrachtet:

$$\text{Transformation } \boxed{F_T(t; a, b) = F_0\left(\frac{h(t)-q}{p}\right)}, \quad t' = h(t),$$

wobei  $p = p(a, b)$ ,  $q = q(a, b)$ ;  
dann gilt:  $F_0^{-1}(F_T(t; a, b)) = \frac{1}{p}t' - \frac{q}{p}$

In Verbindung mit der empirischen Verteilungsfunktion (3.4) (anstelle von  $F_T(t; a, b)$ ) wird die Transformation  $(h, F_0^{-1})$  auf Punktepaare angewendet:

$$\left(t_{(i)}, \frac{i}{n}\right) \longrightarrow \left(h(t_{(i)}), F_0^{-1}\left(\frac{i}{n}\right)\right), \quad i = 1, \dots, n$$

Letztere Punktepaare müssen gemäß der beschriebenen Transformation auf einer Geraden liegen.

Entscheidung: Zu große (systematische!) Abweichung von einer Geraden führen zur Ablehnung der Verteilungsfamilie mit  $F_T(t; a, b)$ , die der Transformation zugrunde liegt!

Bemerkungen:

1. Entscheidungen, die nach passender Transformation und mittels einer Grafik getroffen werden, sind subjektiv. Allerdings sind diese umso genauer, je größer der Stichprobenumfang ist.
2. Anstelle der oben genannten Schar von ursprünglichen Punkten  $(t_{(i)}, \frac{i}{n})$  werden in der Praxis auch genutzt:  $\{(t_{(i)}, \frac{i-0.5}{n})\}$ ,  $\{(t_{(i)}, \frac{i}{n+1})\}$ ,  $\{(t_{(i)}, \frac{i-0.3}{n+0.4})\}$ ,  $\{(t_{(i)}, \frac{i-0.375}{n})\}$  bzw.  $\left\{ \left( h(t_{(i)}), E\left(\frac{h(t_{(i)})-q}{p}\right) \right) \right\}$ .
3. Folgende spezielle Transformationen von Verteilungsfunktionen sind bekannt:
  - Exponentialverteilung:  $F_T(t; \lambda) = 1 - e^{-\lambda t}$  ( $t \geq 0$ )  
 $F_0(t') = 1 - e^{-t'}$ ,  $F_0^{-1}(z) = -\ln(1-z)$ ,  $t' = h(t) = t$ ,  $p = p(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$
  - Weibullverteilung:  $F_T(t; a, b) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t}{a}\right)^b\right\}$  ( $t \geq 0$ )  
 $F_0(t') = 1 - \exp\{-\exp(\frac{t'-q}{p})\}$ ,  $F_0^{-1}(z) = \ln(-\ln(1-z))$   
(doppelte Exponentialverteilung)  
 $t' = h(t) = \ln t$ ,  $p = p(a, b) = \frac{1}{b}$ ,  $q = q(a, b) = \ln a$
  - Normalverteilung:  $F_T(t; \mu, \sigma) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$   
 $F_0(t') = \Phi\left(\frac{t'-q}{p}\right)$ ,  $F_0^{-1}(z) = \Phi^{-1}(z)$ ,  $t' = h(t) = t$ ,  $p(\mu, \sigma) = \sigma$ ,  $q(\mu, \sigma) = \mu$
  - Lognormalverteilung:  $F_T(t; \mu, \sigma) = \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)$   
 $F_0(t') = \Phi\left(\frac{t'-q}{p}\right)$ ,  $F_0^{-1}(z) = \Phi^{-1}(z)$ ,  $t' = h(t) = \ln t$ ,  $p(\mu, \sigma) = \sigma$ ,  $q(\mu, \sigma) = \mu$
4. Bei 3-parametrischer Weibullverteilung ist der Lageparameter  $c$  durch  $\hat{c} = t_{(1)}$  zu schätzen und anschließend sind alle Ausfalldaten gemäß des Vorgehens bei 2-parametrischer Weibullverteilung durch  $\tilde{t}_{(i)} = t_{(i)} - \hat{c}$ , ( $i = 2, \dots, n$ ) zu ersetzen und  $\tilde{t}_{(i)}$  auszuwerten. Wenn andererseits im Weibull-Funktionspapier durch die Punktwolke eine Kurve zu

legen ist, die

- a) konkav ist  $\rightarrow$  3-parametrische Weibullverteilung liegt vor,
- b) konvex ist  $\rightarrow$  keine Weibullverteilung liegt vor.

5. Wahrscheinlichkeitspapiere (bzw. Funktionspapiere) enthalten die oben genannten speziellen Transformationen und sind leicht anzuwenden:

- Entscheidung über Ablehnung / Nichtablehnung eines angenommenen Verteilungstyps (Ausgleichskurve ist „Gerade“ oder „keineswegs Gerade“)
- außerdem Parameterschätzung für  $a$  und  $b$  aus Anstieg  $\frac{1}{p}$  bzw. aus absolutem Wert  $-\frac{q}{p}$ ;  
speziell bei Weibullverteilung:  
wegen  $F_T(t_\gamma) = 1 - \gamma$  ergibt der Schnitt der  $1 - \gamma \cdot 100\%$ -Linie mit der Ausgleichsgeraden den Schätzwert  $\hat{t}_\gamma$  auf der  $t$ -Achse,  
wegen  $F_T(a) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{a}{a}\right)^b\right) = 1 - e^{-1} \approx 0.632$  liefert analog die 63.2%-Linie einen Schätzwert  $\hat{a}$  des Parameters  $a$  auf der  $t$ -Achse.  
Einen Schätzwert für  $b$  erhält man, indem man die Parallele zur Ausgleichsgeraden, die durch den sogenannten Pol verläuft, mit der Randskala zum Schnitt bringt.

### 3.2.3 Anpassungstests

Mit analytischen Verfahren sind genauere Entscheidungen als mit graphischen Verfahren erzielbar.

Ausgangspunkt ist eine vollständige Stichprobe  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  und die Hypothese  $H_0 : F_T = F_0$  (=vorgegebene Lebensdauervertiefungsfunktion)

- **$\chi^2$ -Anpassungstest**

Zerlegung des möglichen Wertebereichs in  $k$  Intervalle, z.B.  $[a_0, a_1), \dots, [a_{k-1}, a_k)$  mit  $a_0 = 0, a_k = \infty$ ;

$m_j \dots$  Anzahl der Stichprobenwerte im  $j$ -ten Intervall,

$p_j = F_0(a_j) - F_0(a_{j-1})$  ( $j = 1, \dots, k$ )  $\dots$  hypothetischer Wert, dass ein Ausfallwert im  $j$ -ten Intervall ist.

Dann Testgröße:

$$\chi_n^2 := \sum_{j=1}^k \frac{(np_j - m_j)^2}{np_j},$$

Sie ist asymptotisch  $\chi^2$ -verteilt mit  $k - 1$  Freiheitsgraden.

Praktische Entscheidung:  $\chi_n^2 > \chi_{1-\alpha; k-1}^2$ , dann Ablehnung von  $H_0$  ( $\chi_{1-\alpha; k-1}^2$  ist Quantil der  $\chi^2$ -Verteilung der Ordnung  $1 - \alpha$ ).

(Modifikation: Sind für die hypothetische Verteilungsfunktion  $F_0$  noch  $s$  Parameter zu schätzen, so verringert sich die Freiheitsgradanzahl auf  $k - 1 - s$ .)

- **Kolmogorov-Smirnov-Test**

Voraussetzen ist zusätzlich, dass  $F_0$  stetig sein muss.



Testgröße:

$$K_n = \sqrt{n} \max(D^+, D^-),$$

wobei  $D^+ = \max_i \left| \frac{i}{n} - F_0(t_i) \right|$ ,  $D^- = \max_i \left| F_0(t_i) - \frac{i-1}{n} \right|$ .

$K_n$  ist asymptotisch Kolmogorov-verteilt, Quantilwerte dieser Verteilung sind in Tafelwerken vorhanden.

Entscheidung:  $K_n \geq k_\alpha$ , dann  $H_0$  ablehnen ( $k_\alpha$  ist Quantil der Ordnung  $\alpha$  der Kolmogorov-Verteilung)

(bzw.  $K_n < k_\alpha \Rightarrow H_0$  nicht ablehnen).

Bemerkungen:

1. Der Kolmogorov-Smirnov-Test ist dem  $\chi^2$ -Anpassungstest vorzuziehen, weil seine Schärfe wesentlich größer ist.
2. Liegen zusammengesetzte Hypothesen derart vor, dass Verteilungsparameter von  $F_0$  unbekannt und vorher zu schätzen sind, müssen die Verteilung und damit auch die Quantile  $k_\alpha$  modifiziert werden; einige  $k_\alpha$ -Werte ( $n \geq 30$ ):

	$k_\alpha$	
	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$
$F_0$ vollständig festgelegt	1.22	1.36
$F_0$ normalverteilt, Par. unbek.	0.81	0.99
$F_0$ exponentialverteilt, Par. unbek.	1.00	1.09
$F_0$ 2-parametrisch Weibull-verteilt, Par. unbek.	0.80	0.87

praktisches Vorgehen am Beispiel „2-par. Weibull-Verteilung“

1. Ausgangspunkt: vollständige (geordnete) Stichprobe  $t_{(1)}, \dots, t_{(n)}$ ,  
Festlegung der statistischen Sicherheit  $1 - \alpha$
2. Hypothese  $H_0$ : 2-par. Weibullverteilung ( $a, b$  unbek.),  $\alpha = 0.05$   
Zahlenbeispiel für 30 Motoren-Ausfallzeiten (1.5kW-Elektromotoren):  
 $\bar{t} = 8963.67\text{h}$ ,  $s = 3479.14\text{h} \Rightarrow v = \frac{s}{\bar{t}} = 0.388$   
Schätzwerte für  $a, b$ : aus Tabelle  $v = v(b)$ :  $\hat{b} = 2.78$ ,  $\Gamma\left(1 + \frac{1}{2.78}\right) = 0.8903$ ,  
 $\hat{a} = \frac{\bar{t}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2.78}\right)} = 10068\text{h} \approx 10\text{Th}$

damit Berechnung von  $F_0(t_{(i)}) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{(i)}}{a}\right)^b\right\}$ :

$$1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{(i)}}{10000}\right)^{2.8}\right\}$$

3. Berechnung des Testgrößenwertes, Entscheidung:  
für jedes  $t_{(i)}$ : Vergleich von  $F_0(t_{(i)})$  mit  $\frac{i}{n} \cdot 100\%$  bzw. mit  $\frac{i-1}{n} \cdot 100\%$   
Maximalwert aller Abweichungen:  $D = 0.667 - 0.50 = 0.167$   
Entscheidung:  $K = \sqrt{30} \cdot 0.167 = 0.91 > 0.87 = k_\alpha$ , also Ablehnung von  $H_0$ .

(Achtung: Wäre Entscheidung bei Zugrundelegung von bekannten Parametern  $a, b$  getroffen worden, also Verwendung von  $k_\alpha = 1.36$ , dann wäre das falsche Ergebnis „Nichtablehnung“ entstanden.)

### 3.3 Zuverlässigkeitsnachweis

Der Nachweis einer vom Erzeugnishersteller vorgesehenen Zuverlässigkeit erfolgt mittels sogenannter Stichprobenpläne; diese sind aus Sicht der Statistik nichts anderes als Alternativtestverfahren für parametrische Hypothesen.

Zuverlässigkeitsnachweisverfahren können als modifizierte Datenanpassung angesehen werden: der Anwender der Stichprobenpläne prüft, ob das mittels Zuverlässigkeitsprüfplänen gewonnene Datenmaterial eine geforderte Zuverlässigkeit bestätigt oder nur ablehnen kann.

#### 3.3.1 Stichprobenplan

Der Prüfung mittels Stichprobenplan wird zugrundegelegt:

- Prüfplan  $[n, 0, r]$  bzw.  $[n, 0, t^*]$  (im zweiten Fall sei  $t_{(r)} = t^*$ )
- geordnete (gestutzte) Stichprobe  $t_{(1)}, t_{(2)}, \dots, t_{(r)}$
- Hypothesen  $\tilde{H}_0$  : „geforderte Zuverlässigkeit vorhanden“ gegen  $\tilde{H}_1$  : „geforderte Zuverlässigkeit nicht vorhanden“.

Die Prüfpraxis basiert nun auf Ersatzhypotesen, i.d.R. den folgenden:

$H_0$  :  $\theta > \theta_u$  („Posten der geprüften Erzeugnisse ist gut“) gegen

$H_1$  :  $\theta < \theta_u$  („Posten der geprüften Erzeugnisse ist schlecht“),

wobei  $\theta = ET$  die mittlere Lebensdauer eines Erzeugnisses und  $\theta_u$  ein Grenzwert ist, der zwischen Hersteller und Abnehmer eines Erzeugnispostens vereinbart wird.

Zum Stichprobenplan gehört eine (statistische) Entscheidungsfunktion, ein Test:

$$\varphi = \varphi(t_{(1)}, \dots, t_{(r)}) = \begin{cases} 0 & \text{Postenannahme,} \\ 1 & \text{Postenablehnung,} \end{cases}$$

wobei: Fehlerwkt. 1. Art:  $P_\theta(\varphi = 1) \leq \alpha$  für  $\theta \geq \theta_o$  („guter Posten abgelehnt“)

Fehlerwkt. 2. Art:  $P_\theta(\varphi = 0) \leq \beta$  für  $\theta \leq \theta_u$  („schlechter Posten angenommen“)

Bemerkung: Zur genauen Hypothesenüberprüfung, also zur statistischen Testung müssen Hersteller und Abnehmer eines Erzeugnispostens weitere Werte vereinbaren:  $\theta_o$  mit  $\theta_o > \theta_u$ , sowie  $\alpha$  und  $\beta$ .

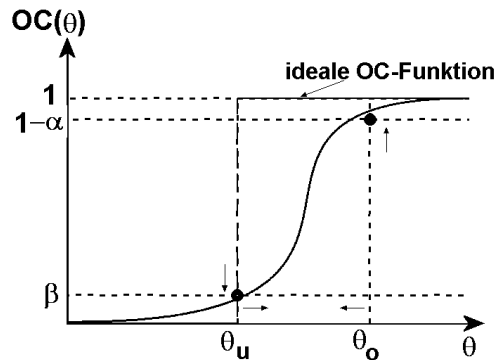
Dazu ist natürlich anzunehmen, dass

1. Hersteller möchte, dass Posten mit  $\theta \geq \theta_o \geq \theta_u$ , also mit „guter Zuverlässigkeit“, nur mit kleiner Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  zurückgewiesen werden ( $\theta_o$  wird auch annehmbare mittlere Lebenszeit genannt);

2. Abnehmer fordert i.d.R., dass Posten mit  $\theta \leq \theta_u$ , also mit „schlechter Zuverlässigkeit“, höchstens mit kleiner Wahrscheinlichkeit  $\beta$  angenommen werden ( $\theta_u$  wird auch nichtannehbare mittlere Lebensdauer genannt).

Operationscharakteristik des Alternativtests

$OC(\theta) = P_\theta(\varphi = 0)$  ... dient zur Testbeurteilung und berücksichtigt Fehlerwahrscheinlichkeiten.



Optimierung: Ein Stichprobenplan mit Test  $\varphi$  ist so zu finden, dass bei Vorgabe von Werten  $(\theta_u, \theta_o, \alpha, \beta)$  (d.h. u.a. bei Angaben zu den Fehlerwahrscheinlichkeiten 1. und 2. Art) die mittlere Ausfallanzahl (bzw. die Prüfzeit) minimal wird.

Bemerkung:

1. Nicht jeder Stichprobenplan löst das o.g. Optimierungsproblem, wenn  $(\theta_u, \theta_o, \alpha, \beta)$  vorgegeben sind. Es kann jedoch auch mehrere Pläne geben, die den Fehlerbedingungen genügen.
2. Die Testschärfe (bzw. Schärfe des Stichprobenplanes) wird durch  $(\theta_u, \theta_o, \alpha, \beta)$  festgelegt: wird größer gemäß „ $\uparrow\downarrow$ “ bzw. „ $\rightarrow\leftarrow$ “.

### 3.3.2 Modell Exponentialverteilung – Pläne mit Prüfplan $[n, O, r]$

Für die Lebensdauer der Prüflinge wird Exponentialverteilung, d.h.  $T \sim Exp(\lambda)$ , vorausgesetzt. Alle Informationen der Ausfalldaten werden genutzt (Das bedeutet eine sog. Variablenprüfung; im Gegensatz zur Attributprüfung, bei der nur 2 Zustände, aus „ $t_{(i)} < t^*$ “ und „ $t_{(i)} \geq t^*$ “ :  $p = F(t^*)$ , interessieren).

Es wird benötigt:

- geordnete Stichprobe  $t_{(1)}, \dots, t_{(r)}$
- Gesamtprüfzeit 
$$\tau(t) = nt_{(1)} + (n-1)(t_{(2)} - t_{(1)}) + \dots + (n-r+1)(t_{(r)} - t_{(r-1)}) + (n-r)(t - t_{(r)})$$
 wobei  $\tau(T_{(r)}) \sim \text{Gamma}(\lambda, r)$ , also  $2\lambda\tau(T_{(r)}) = \frac{2}{\theta}\tau(T_{(r)}) \sim \chi_{2r}^2$
- $\theta_u, \theta_o, \alpha, \beta$  : Testproblem:  

$$H_0 : \theta \geq \theta_o \longleftrightarrow H_1 : \theta \leq \theta_u \ (\theta_u < \theta_o)$$

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{falls } \tau(T_{(r)}) \geq C \\ 1 & \text{falls } \tau(T_{(r)}) < C \end{cases}$$
 wobei  $P_\theta(\varphi = 0) = P_\theta(\tau(T_{(r)}) \geq C)$ , außerdem sind  $C$  und  $r$  derart festzulegen, dass

$$P_{\theta_u}(\tau(T_{(r)}) \geq C) \leq \beta, P_{\theta_o}(\tau T_{(r)} < C) \leq \alpha.$$

Lösung des Optimierungsproblems:

1. Für jedes  $r$  wird ein  $C = C_\alpha$  bestimmt mit

$$P_{\theta_o}(\tau(T_{(r)}) < C_\alpha) = P_{\theta_o}\left(\frac{2}{\theta_o}\tau(T_{(r)}) < \frac{2C_\alpha}{\theta_o}\right) \stackrel{!}{=} \alpha \Rightarrow \frac{2C_\alpha}{\theta_o} = \chi_{2r,\alpha}^2 \text{ bzw. } C_\alpha = \frac{\theta_o}{2}\chi_{2r,\alpha}^2$$

$$\text{andererseits: } P_{\theta_u}(\tau(T_{(r)}) \geq C_\alpha) = P_{\theta_u}\left(\frac{2}{\theta_u}\tau(T_{(r)}) \geq \frac{\theta_o}{\theta_u}\chi_{2r,\alpha}^2\right) \leq \beta \Rightarrow \chi_{2r,1-\beta}^2 \leq \frac{\theta_o}{\theta_u}\chi_{2r,\alpha}^2$$

Folglich erhält man:

$$\frac{\theta_u}{\theta_o} \leq \frac{\chi_{2r,\alpha}^2}{\chi_{2r,1-\beta}^2} \quad (3.5)$$

Für  $\alpha < 1 - \beta$  ist die rechte Seite von (3.5) streng monoton wachsend in  $r$ , also existiert

$$\text{minimales } r: \quad r^* = \min \left\{ r : \frac{\chi_{2r,\alpha}^2}{\chi_{2r,1-\beta}^2} \geq \frac{\theta_u}{\theta_o} \right\}$$

2. Jetzt Ausgangspunkt Fehlerwkt. 2. Art:

$$P_{\theta_u}(\tau(T_{(r)}) \geq C_\beta) = P_{\theta_u}\left(\frac{2}{\theta_u}\tau(T_{(r)}) \geq \frac{2C_\beta}{\theta_u}\right) = \beta \Rightarrow \frac{2C_\beta}{\theta_u} = \chi_{2r,1-\beta}^2 \text{ bzw. } C_\beta = \frac{\theta_u}{2}\chi_{2r,1-\beta}^2$$

$$\text{andererseits: } P_{\theta_o}\left(\frac{2}{\theta_o}\tau(T_{(r)}) < \frac{\theta_u}{\theta_o}\chi_{2r,1-\alpha}^2\right) \leq \alpha$$

es folgen ebenso (3.5) und obiges minimales  $r = r^*$ .

Wie ist nun  $C$  zu wählen,  $C = C_\alpha$  oder  $C = C_\beta$ ?

$$C_\alpha \leftrightarrow C_\beta$$

$$C_\beta = \frac{\theta_u}{2}\chi_{2r,1-\beta}^2 = \frac{\theta_o}{2}\frac{\theta_u}{\theta_o}\chi_{2r,1-\beta}^2 \stackrel{(*)}{\leq} \frac{\theta_o}{2}\chi_{2r,\alpha}^2 = C_\alpha$$

(Das Gleichheitszeichen bedeutet auch „=“ in (3.5) und damit auch „=“ bei den Fehlerwahrscheinlichkeiten.)

Wenn nun gilt  $C \in (C_\beta, C_\alpha)$ , dann ist auch offenbar  $P_{\theta_u}(T_{(r)} \geq C) < \beta$  und  $P_{\theta_o}(T_{(r)} < C) < \alpha$ .

Feststellung: Jedes  $C \in [C_\beta, C_\alpha]$  möglich, Unterschiede zwischen  $C_\beta$  und  $C_\alpha$  i.d.R. minimal; Test  $\varphi = \varphi(\tau(T_{(r)}))$  ist Lösung des Testproblems, liefert geeigneten Stichprobenplan.

praktisches Vorgehen:

1. Testentscheidung gemäß  $\varphi = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ , falls  $\frac{\tau(T_{(r)})}{r\theta_u} \geq \frac{\chi_{2r,1-\beta}^2}{2r}$  (d.h. mit  $C = C_\beta$ )

2. Tabellen existieren für  $Q_1 := \frac{\chi_{2r,\alpha}^2}{\chi_{2r,1-\beta}^2}$  und  $Q_2 := \frac{\chi_{2r,1-\beta}^2}{2r}$

3. Zu Wert  $\frac{\theta_u}{\theta_o}$  sucht man kleinsten Wert von  $Q_1$  in Tabelle, der oberhalb  $\frac{\theta_u}{\theta_o} \rightarrow r = r^*$

Zu  $r^*$  jetzt  $Q_2$  aufsuchen: wenn  $Q_2$  höchstens gleich den Wert der Größe  $\frac{\tau(T_{(r)})}{r^*\theta_u}$ , dann Annahme von  $H_0$ .

### 3.3.3 Modell Weibullverteilung – Stichprobenpläne mit Variablen- bzw. Attributprüfung

#### 1. Formparameter $b$ bekannt, Variablenprüfung

Sei  $T$  2-parametrisch Weibull-verteilt; betrachte  $\tilde{T} := T^b$ :

$$P(\tilde{T} < t) = P(T < t^{1/b}) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t^{1/b}}{a}\right)^b\right\} = 1 - \exp\{-\lambda t\}$$

mit  $\lambda = a^{-b}$ ,  $E\tilde{T} = \tilde{\theta} = a^b$ .

Folglich sind die Untersuchungen rückführbar auf die entsprechenden bei Exponentialverteilung, und zwar unter Verwendung von  $b$ -ten Potenzen von Ausfallwerten.

#### 2. Formparameter $b$ unbekannt, Attributprüfung

- Alternativtest auf Grundlage der Ausfallwahrscheinlichkeiten  $\bar{p}(t) = F_T(t)$  bei fester Prüfzeit  $t = t^*$  (d.h. Plan  $[n, O, t^*]$ ):

$$H_0 : p = p_0 := \bar{p}_0(t) = \frac{AQL}{100}\% \text{ („annehmbare Zuverlässigkeitslage“)}$$

$$H_1 : p = p_1 := \bar{p}_1(t) = \frac{LQ}{100}\% \text{ („nichtannehmbare Zuverlässigkeitslage“)} \quad (p_0 < p_1)$$

- zwischen Hersteller von Erzeugnissen und Abnehmern ist zu vereinbaren:

1) Postenumfang  $N$  ( $N \gg n$ ), Prüfdauer  $t^* \rightarrow$  Prüfplan  $[n, O, t^*]$

2)  $AQL$ ,  $LQ$  (in %)

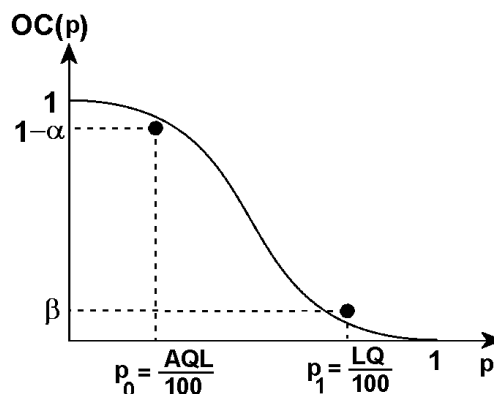
3) Fehlerwkt.  $\alpha, \beta$

- Testproblem:  $\varphi = \begin{cases} 0 & \text{falls } r \leq Ac \\ 1 & \text{falls } r > Ac \end{cases}$ , wobei  $r$  die (zufällige) Anzahl ausgefallener Prüflinge (geprüfte Erzeugnisse),  $Ac$  die sog. Annahmezahl sind.

Dann:  $n$  und  $Ac$  sind „optimal“ so zu ermitteln, daß

$$P_p(\varphi = 1) \leq \alpha \text{ für } p \leq \frac{AQL}{100\%} \text{ und}$$

$$P_p(\varphi = 0) \leq \beta \text{ für } p \geq \frac{LQ}{100\%}.$$



- Bestimmungsverfahren für Prüfplangrößen (! zufällige Anzahl  $r$  ist  $(n, p)$ -binomialverteilt, wobei  $p$  gemäß der Weibullverteilung mit  $F_T(t) = \bar{p}(t)$  festzulegen ist),

z.B. vorgeg.:  $N, t^*, AQL, \alpha$  und  $\beta$ ;

aus Tabelle (DIN-Vorschrift) bestimmbar:  $n, Ac$ ;

zusätzliche „Informationsgrößen“ aus Tabellen ebenda:

$\lambda_u(t_Z), \lambda_o(t_Z)$  (Ausf.ratenwerte bei Bezugszeit  $t_Z > t^*$ ), damit  $AQL$  und  $LQ$ .

# Kapitel 4

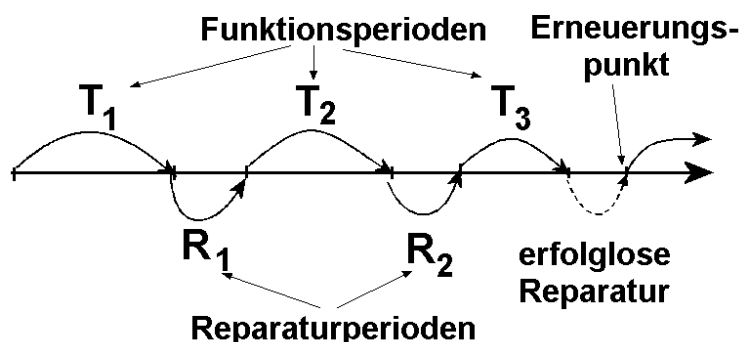
## Reparierbare Systeme

In der Praxis, insbesondere bei der Untersuchung großer technischer Systeme, kann davon ausgegangen werden, dass nach einem Ausfall sich (unmittelbar) eine Reparatur bzw. eine Instandsetzung anschließt. Die Anzahl der Reparaturen für dasselbe Erzeugnis kann unbeschränkt oder (nach vorgegebenen Kriterium, z.B. weil nach einem Zeitabschnitt eine neue technologische Generation eingesetzt werden muss) beschränkt sein. In der Modellierung der Reparatur- bzw. Instandsetzungssituationen werden bisweilen die Reparaturzeiten vernachlässigbar klein angesetzt. In anderen Fällen, wenn auf Reparaturzeiten und -kosten Wert gelegt werden muss, werden Folgen von Funktions- und Reparaturzeiten modelliert.

Den zeitlichen Ablauf von aufeinanderfolgenden Funktions- und Reparaturabschnitten nennen wir einen Funktions-Reparatur-Prozess (bisweilen auch Ausfall-Reparatur-Prozess). Es wechseln also die Zufallsvariablen  $T_i$ , die Funktionszeiten, und die Zufallsvariablen  $R_i$ , die Reparationszeiten, ( $i = 1, 2, \dots$ ) einander ab. Besonderes Interesse liegt in

- ◇ Beschreibung von Funktions- und Reparaturwechsel
- ◇ Besonderheiten von Ausfallverteilung (und Reparaturzeitverteilung)
- ◇ verschiedene Reparaturgrade (z.B. Minimalreparatur, partielle Reparatur, Perfektreparatur bzw. Erneuerung) und Inspektionsstrategien
- ◇ optimale Instandhaltung (auf der Basis von Reparaturkosten und Produktionsgewinn)

allg. Verhalten:



Die nachfolgenden Abschnitte beinhalten spezielle Modelle. Zunächst wird eine Ausfallfunktion für endlich viele Reparaturen (bei vernachlässigten Reparaturzeiten) und die Verfügbarkeitsberechnung betrachtet.

Im Weiteren werden stochastische Prozesse für die Modellierung reparierbarer Systeme eingeführt. Es wird mit einem Markovschen Funktions-Reparatur-Prozess-Modell begonnen. Danach werden Erneuerungsprozesse behandelt, die beispielsweise auch zur Beschreibung einer Maximalinstandsetzung dienen. Mit Hilfe von Zählprozessen werden schließlich unterschiedliche Reparatur- bzw. Instandsetzungsmodelle, wie z.B. auch Minimalinstandsetzungen oder Trend-Erneuerungsmodelle untersucht.

## 4.1 Ausfallfunktion und Verfügbarkeit

- Ausfallfunktion: Es wird jetzt angenommen, dass Reparaturzeiten vernachlässigbar klein sind und die Funktionszeiten unabhängig zueinander sind.

Wir führen folgende Vereinbarungen ein:

$p$  sei die Wahrscheinlichkeit für eine erfolgreiche Reparatur, dann ist

$q = 1 - p$  die Wahrscheinlichkeit für eine erfolglose Reparatur.

Es sei  $f(t)$  die Dichte der unabhängigen und identisch verteilten (i.i.d.) Funktionszeiten  $T_i$  (

Dann ist  $q_n = p^{n-1}q$  die Wahrscheinlichkeit, dass die  $n$ -te Reparatur erfolglos ist, und

$f_n(t) = f^{*n}(t)$  ist die Dichte für die Summe aus  $n$  i.i.d. Funktionszeiten (dabei bed

Die Ausfallfunktion ergibt sich schließlich zu:

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \int_0^t f_n(u) du \quad (= P(T_{S,rep} \leq t)) \quad (4.1)$$

d.h. sie ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Systemlebensdauer  $\leq t$ “, wenn zwischenzeitlich (erfolgreich) repariert werden kann und  $\int_0^t f_n(u) du$  die bedingte Ausfallfunktion bei Ausfall zur  $n$ -ten (erfolglosen) Reparatur ist.

**Beispiel** „Exponentialverteilung“:

$T_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ , d.h.  $f_{T_i}(t) = f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ ;

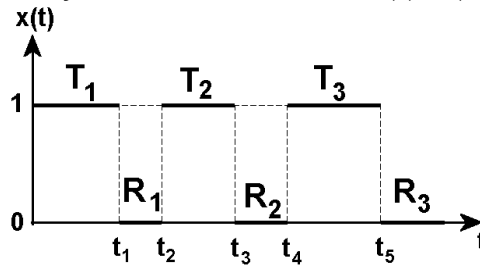
die Summe von  $n$  Funktionszeiten ist gammaverteilt:  $f_n(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}$

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt für (4.1): } F(t) &= \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} q_n \frac{\lambda^n}{(n-1)!} u^{n-1} e^{-\lambda u} du = q\lambda \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda u} du \\ &= \int_0^t q\lambda e^{-\lambda u} e^{p\lambda u} du = \int_0^t q\lambda e^{-q\lambda u} du. \end{aligned}$$

Die Systemlebensdauer ist also wieder exponentialverteilt mit Parameter  $q\lambda$ .

- Verfügbarkeit:

Wir betrachten den Funktionsindikator des reparierbaren Systems ( den Funktions-Reparatur-Prozess)  $\{X(t), t \geq 0\}$  mit Realisierungen  $x(t)$  ( $t \geq 0$ ):



Die (momentane) Verfügbarkeit ist die Wahrscheinlichkeit, dass das reparierbare System zum Zeitpunkt  $t$  funktionsfähig ist:

$$P(X(t) = 1) = EX(t) =: A(t)$$

(Bemerkung: In Kapitel 2 wurde für ein System auch  $P(S(\underline{X}(t)) = 1)$  verwendet.)

**Satz 4.1:** Die Funktionszeiten und Reparaturzeiten seien beide exponentialverteilt, d.h.  $T_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $f_{T_i}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ ,  $R_i \sim \text{Exp}(\mu)$ ,  $g_{R_i}(t) = \mu e^{-\mu t}$ .

Dann gilt für die momentane Verfügbarkeit

$$A(t) = \frac{1/\lambda}{1/\lambda + 1/\mu} + \frac{1/\mu}{1/\lambda + 1/\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

*Beweis:*

$$\begin{aligned} \text{Wegen } A(t + \Delta t) &= A(t)P(T_i > \Delta t) + (1 - A(t))P(R_i < \Delta t) \\ &= A(t)[1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)] + (1 - A(t))[\mu\Delta t + o(\Delta t)], \\ \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t} &= -(\lambda + \mu)A(t) + \mu + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \end{aligned}$$

liefert der Grenzübergang  $A'(t) = -(\lambda + \mu)A(t) + \mu$ ,  $A(0) = 1$  und damit die Aussage.  $\square$

weitere Verfügbarkeitsbegriffe:

1. mittlere Verfügbarkeit in  $[t_1, t_2]$ :  $A(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_{t_1}^{t_2} A(t) dt$ , ( $\tau = t_2 - t_1$ )
2. Grenzverfügbarkeit:  $A_g = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t A(u) du$
3. stationäre Verfügbarkeit (Dauerverfügbarkeit):  $A_D = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t)$  ( $= A_g!$ )  
(bei Exponentialverteilung:  $A_D = \frac{1/\lambda}{1/\lambda + 1/\mu}$ );  
allgemein gilt:  $A_D = \frac{ET}{ET + ER}$ .



## 4.2 Stochastische Prozesse für reparierbare Systeme

Für das zeitabhängige Verhalten von Zuverlässigkeitssystemen wird der zufällige Zustand  $X(t)$  ( $t \geq 0$ ) des Systems untersucht.  $X(t)$  kann eine detaillierte Systemstruktur beschreiben, die neben Funktions- und Ausfallzustand auch weitere Zwischenzustände enthält, beispielsweise solche, die einen Abnutzungsgrad beschreiben. Andererseits kann der Zustand  $X(t)$  den zufälligen Zählwert für festgelegte Ereignisse eines Systems darstellen.

Es wird hier zunächst vereinbart, dass  $X(t)$  eindimensional ist, also nur aus einer Komponente besteht. Für besondere Untersuchungen kann später von dieser Vereinbarung abgewichen werden.

Die Familie der zufälligen Systemzustände  $\{X(t), t \geq 0\}$  stellt einen stochastischen Prozess über dem (gemeinsamen) Wahrscheinlichkeitsraum  $[\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}]$  und dem Zustandsraum  $[\mathbf{E}, \mathfrak{E}]$  (auch Werteraum genannt) dar .

Ein diskreter stochastischer Prozess liegt vor, wenn es eine endliche Anzahl  $K$  von Zuständen (Werten) von  $X(t)$  (oder höchstens abzählbar unendlich viele) in  $\mathbf{E}$  gibt. Im Fall, dass die Zustandsmenge  $\mathbf{E}$  die reelle Achse oder ein Intervall daraus ist, spricht man von einem stetigen stochastischen Prozess. Wenn man die konkreten Zustände eines Systems - im Sinne der Ergebnis eines zufälligen Versuches - betrachtet, also  $X(t) = x_t$  mit einer reellen Zahl  $x_t$ , dann nennt man die von  $t$  abhängige Funktion  $x_t$ ,  $t \geq 0$  auch Realisierung oder Trajektorie des stochastischen Prozesses und die Werte  $t$  werden häufig als Zeitpunkte interpretiert.

Ein stochastischer Prozess ist durch seine  $n$ -dimensionalen Verteilungen charakterisiert, die z.B. in folgender Form gegeben sein können

$$P_{t_1, \dots, t_n} := P(X(t_1) \in B_1, \dots, X(t_n) \in B_n) \quad (4.2)$$

für beliebige natürliche Zahlen  $n$ , reelle Zeiten  $t_1 \leq \dots \leq t_n$  und  $B_i \subseteq \mathbf{E}$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Die gemeinsamen Verteilungen (4.2) kann man auch durch ein Produkt von bedingten Verteilungen ausdrücken:

$$P_{t_1, \dots, t_n} = P(X(t_n) \in B_n | X(t_{n-1}) \in B_{n-1}, \dots, X(t_1) \in B_1) \cdot \dots \cdot P(X(t_1) \in B_1). \quad (4.3)$$

Oftmals verwendet man für die  $B_i$  Intervalle  $(-\infty, x_i]$  oder  $(a_i, b_i]$  mit  $a_i, b_i, x_i \in \mathbf{E}$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

### 4.2.1 Markovsche Modelle

Für Markovsche Prozesse geben die bedingten Verteilungen (4.3) die sog. Markoveigenschaft, also die Unabhängigkeit des Prozessverhaltens von der Vergangenheit wider, d.h. bei  $B_i = (-\infty, x_i]$  gilt

$$P(X(t) \leq x | X(t_n) \leq x_n, \dots, X(t_1) \leq x_1) = P(X(t) \leq x | X(t_n) \leq x_n), \quad (4.4)$$

mit dem zukünftigen Zeitpunkt  $t$ , der gegenwärtigem Zeit  $t_n$  und  $t > t_n \geq t_{n-1} \geq \dots \geq t_1$ ,  $x_i \in \mathbf{E}$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Ein Beispiel eines Markovprozesses ist der Poissonprozess  $\{N(t) \mid t \geq 0\}$ .  $N(t)$  gibt die zufällige Anzahl von Ereignissen an, die im Intervall  $(0, t]$  stattfinden, z.B. die bis  $t$  registrierte Anzahl der Ausfälle eines reparierbaren technischen Systems.  $\mathbf{E}$  ist die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen. Es kann angenommen werden, dass zum Anfang der Betrachtung kein Ausfall passiert, also  $N(0) = 0$  ist. Weiterhin gelte, dass die zufälligen Anzahlen von Ausfällen in disjunkten Zeitintervallen unabhängig sind und nicht vom jeweiligen Anfangszeitpunkt der Intervalle abhängen; es ist also

$$N(t) - N(s) = N(t - s), \quad 0 \leq s < t,$$

nur von der Zeitdifferenz, nicht aber vom Anfangszeitpunkt  $s$  abhängig. Man sagt auch, dass  $\{N(t) \mid t \geq 0\}$  homogen ist und unabhängige Zuwächse hat. Für einen homogenen Poissonprozess, kurz HPP, besitzt  $N(t - s)$  eine Poissonverteilung

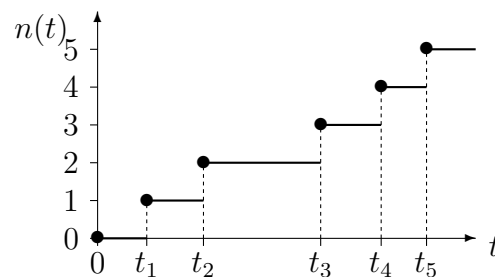
$$P(N(t - s) = k) = \frac{(\lambda(t - s))^k}{k!} e^{-\lambda(t - s)} \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (4.5)$$

mit dem Parameter (der sog. Intensität)  $\lambda > 0$ . Weil der Erwartungswert von  $N(t - s)$

$$EN(t - s) = \lambda(t - s)$$

ist, stellt die Intensität  $\lambda$  die mittlere Anzahl von Ausfällen pro Zeiteinheit dar.

Trajektorien eines Poissonprozesses sind Treppenfunktionen und haben z.B. folgendes Aussehen



Für einen homogenen Poissonprozess gilt die gemeinsame Verteilung der Form (4.2):

$$\begin{aligned} P_{t_1, \dots, t_n} &= P(N(t_1) = k_1, \dots, N(t_n) = k_n) \\ &= P(N(t_n) = k_n \mid N(t_{n-1}) = k_{n-1}) \cdot \dots \cdot P(N(t_2) = k_2 \mid N(t_1) = k_1) \cdot P(N(t_1) = k_1) \\ &= P(N(t_n) - N(t_{n-1}) = k_n - k_{n-1}) \cdot \dots \cdot P(N(t_1) = k_1) \\ &= \frac{[\lambda(t_n - t_{n-1})]^{k_n - k_{n-1}}}{(k_n - k_{n-1})!} \exp[-\lambda(t_n - t_{n-1})] \cdot \dots \cdot \frac{[\lambda t_1]^{k_1}}{(k_1)!} \exp[-\lambda t_1] \\ &=: C(t_1, \dots, t_n) \cdot \lambda^{k_n} \exp[-\lambda t_n] \end{aligned}$$

Markovsche Modelle zur Beschreibung des Zuverlässigkeitsverhaltens von Systemen werden dann benötigt, wenn eine 2-Zustands-Beschreibung nicht mehr ausreicht. Das wird immer dann der Fall sein, wenn im System beispielsweise neben dem Funktions-Ausfall-Geschehen noch gleichzeitig eine Systemstruktur betrachtet wird oder wenn der allmähliche Ausfall

über mehrere interessante Zustände hin erfolgt oder wenn neben der Funktion eines Systems auch seine Leistungsfähigkeit betrachtet wird. In der Technik wird der stochastische Prozess  $\{X(t), t \geq 0\}$  oftmals auch als Prozess der Leistungsfähigkeit bezeichnet.

Der zeitliche Ablauf der Prozesszustände des Zuverlässigkeitssystems wird durch den Prozess  $\{X(t), t \geq 0\}$  mit Werten in  $\mathbf{E}$  beschrieben. Es wird jetzt angenommen, dass  $\mathbf{E}$  endlich ist:  $\mathbf{E} = \{0, 1, 2, \dots, K\}$ .

Zustandswahrscheinlichkeiten  $p_i(t) = P(X(t) = i)$  und Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_{ij}(s, t) = P(X(t) = j | X(s) = i)$  ( $i, j \in \mathbf{E}; 0 \leq s < t$ ) widerspiegeln das stochastische Verhalten des Ausfallprozesses.

**Definition 4.1:**  $\{X(t), t \geq 0\}$  mit Zuständen in  $\mathbf{E} = \{0, 1, \dots, K\}$  heißt homogener Markovscher Prozess mit endlich vielen Zuständen (endliche homogene Markovsche Kette) und mit den Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_{ij}(t)$  ( $t \geq 0; i, j \in \mathbf{E}$ ) vom Zustand  $i$  in den Zustand  $j$ ,

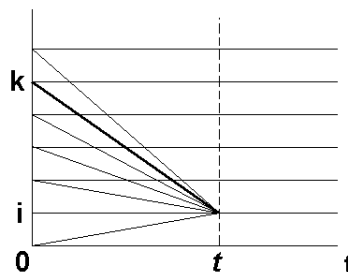
wenn für beliebige  $n \geq 1, 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n < s < t$  und  $j_1, \dots, j_n, i, j \in \mathbf{E}$  gilt:

$$P(X(t) = j | X(t_1) = j_1, \dots, X(t_n) = j_n, X(s) = i) = P(X(t) = j | X(s) = i) = p_{ij}(t - s)$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten fasst man oftmals zu sog. Übergangsmatrizen  $M_{t-s} = (p_{ij}(t - s))$  (stochastische Matrizen) zusammen.

Ein Markovscher Prozess wird vollständig bestimmt durch die Anfangsverteilung und durch seine Übergangswahrscheinlichkeiten. Die Zustandswahrscheinlichkeiten  $p_i(t)$  erhält man aus  $p_k^0 = P(X(0) = k)$  und  $p_{ki}(t)$  gemäß einer sog. Chapman-Kolmogorov-Gleichung:

$$p_i(t) = P(X(t) = i) = \sum_{k=0}^K p_k^0 p_{ki}(t)$$



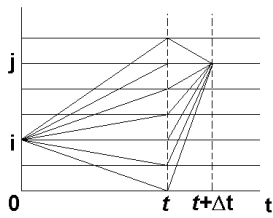
**Satz 4.2:** Es gelte

$$\begin{aligned} q_{ij} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} \quad (i \neq j) \\ q_{ii} &= - \sum_{i \neq j} q_{ij} \quad (i, j \in \mathbf{E}) \\ p_{ij}(0) &= \delta_{ij} \quad (= 1, i = j; \text{Anfangsverteilung}) \end{aligned}$$

Dann genügen die Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_{ij}(t)$  den Differenzialgleichungen (sog. Kolmogorovsche Vorwärtsgleichungen)

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k=0}^K p_{ik}(t) q_{kj} \quad (4.6)$$

Beweisskizze zu (4.6):



- Chapman-Kolmogorov-Gleichung

$$p_{ij}(t + \Delta t) = \sum_{k=0}^K p_{ik}(t)p_{kj}(\Delta t)$$

- $k = j: p_{jj}(\Delta t) = 1 - \sum_{l \neq j} p_{jl}(\Delta t)$

- Grenzübergang  $\Delta t \rightarrow 0$  □

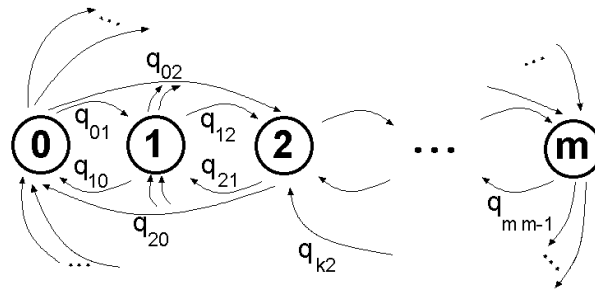
**Bemerkungen:**

1. Sind die Zahlen  $q_{ij} \geq 0, (i \neq j)$  gegeben und ist  $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$ , so hat das Differenzialgleichungssystem (4.6) eine eindeutige Lösung  $p_{ij}(t) (i, j \in \mathbf{E})$  mit  $\sum_{j=0}^K p_{ij}(t) = 1$ .

2. Für festen Anfangszustand  $i \in \mathbf{E}$  wird  $p_j(t) = p_{ij}(t)$  vereinbart, und entsprechend gilt  $p'_j(t) = \sum_{k=0}^m p_k(t)q_{kj}$  bzw. vektoriell ( $Q \dots$  Intensitätenmatrix mit Zeilensumme =0)

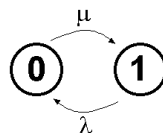
$$\underline{p}'(t) = Q^T \underline{p}(t)$$

Zustandsdiagramm („Markov-Graph“, beachte ”m=K”)



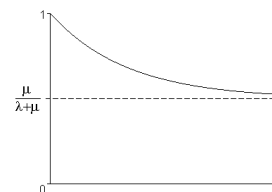
**Beispiel 1:** einelementiges System (ein Bauelement) mit Erneuerung:

- $x_1 = 1 = \{\text{BE intakt}\}, \text{Intensität } q_{10} = \lambda$
- $x_0 = 0 = \{\text{BE defekt}\}, \text{Intensität } q_{01} = \mu$



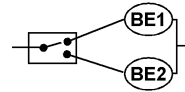
$$Q = \begin{pmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p'_0(t) \\ p'_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu & \lambda \\ \mu & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \end{pmatrix}, p_0(t) + p_1(t) = 1.$$

Lösung bei  $p_1(0) = 1 : p_1(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \exp\{- (\lambda + \mu)t\}$



**Beispiel 2:** dubliziertes System (zwei Bauelemente) ohne Erneuerung:

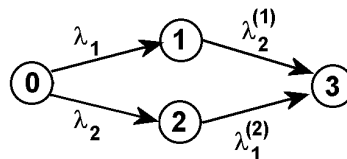
Zustände  $x_0 = 0 = \{\text{BE 1 intakt, BE 2 intakt}\}$   
 $x_1 = 1 = \{\text{BE 1 defekt, BE 2 intakt}\}$   
 $x_2 = 2 = \{\text{BE 1 intakt, BE 2 defekt}\}$   
 $x_3 = 3 = \{\text{BE 1 defekt, BE 2 defekt}\}$



Annahme:  $P(X(0) = 0) = 1$

Zustandsdiagramm mit Intensitäten:  $\lambda_i \dots \text{BE } i \text{ fällt aus}$

$\lambda_i^{(j)} \dots \text{BE } i \text{ fällt aus, wenn vorher BE } j \text{ ausgefallen war.}$



$$\text{Dgl. des Systems: } \begin{pmatrix} p'_0(t) \\ p'_1(t) \\ p'_2(t) \\ p'_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\lambda_1 + \lambda_2) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_2^{(1)} & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & -\lambda_1^{(2)} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{(1)} & \lambda_1^{(2)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix}$$

Lösung:  $p_0(t) = \exp\{-(\lambda_1 + \lambda_2)t\}$

$$p_1(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_2^{(1)}} \left[ \exp(-\lambda_2^{(1)}t) - \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2)t) \right]$$

$$p_2(t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1^{(2)}} \left[ \exp(-\lambda_1^{(2)}t) - \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2)t) \right]$$

$$p_3(t) = 1 - (p_0(t) + p_1(t) + p_2(t))$$

Zuverlässigkeit:  $p(t) = p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) (= R(t))$

$$\text{mittlere Lebensdauer: } ET_s = \frac{\lambda_1^{(2)}\lambda_2^{(1)} + \lambda_1\lambda_1^{(2)} + \lambda_2\lambda_2^{(1)}}{(\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_2^{(1)}\lambda_1^{(2)}} \left( = \int_0^\infty p(t) dt = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2^{(1)}(\lambda_1 + \lambda_2)} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1^{(2)}(\lambda_1 + \lambda_2)} \right)$$

speziell:  $\lambda_1 = \lambda$ ,  $\lambda_2 = q\lambda$  ( $0 \leq q \leq 1$ ),  $\lambda_1^{(2)} = \lambda_2^{(1)} = \lambda$

$$q = 0 \text{ (kalte Reserve): } ET_s = \frac{2}{\lambda}$$

$$q = 1 \text{ (heiße Reserve): } ET_s = \frac{q+2}{(q+1)\lambda} = \frac{3}{2\lambda}$$

$\Rightarrow$  Die mittlere Lebensdauer liegt also zwischen 3/2- und 2-fachen Wert der Einfachlebensdauer.

### 4.2.2 Erneuerungsprozesse

Erneuerungsprozesse werden für einfache Ausfall-Reparatur-Modelle verwendet, für die Reparaturzeiten  $R_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) vernachlässigbar klein sind.

**Definition 4.2:** Eine Folge nichtnegativer, vollständig unabhängiger Zufallsgrößen  $Z_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  über dem Wahrscheinlichkeitsraum  $[\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}]$ , wobei für  $n \geq 2$  alle  $Z_n$  identisch verteilt sind, heißt Erneuerungsprozess, kurz RP (renewal process).

Beispielsweise seien  $Z_n$  ( $n \geq 2$ ) Lebenszeiten eines reparierbaren Systems (jeweils Erneuerung nach Ausfall mit vernachlässigbarer Reparaturzeit) und  $Z_1$  die „restliche“ Lebensdauer, wenn Prozess bereits vor  $t = 0$  begann:

$$F_1(t) = P(Z_1 \leq t), F(t) = P(Z_n \leq t), n \geq 2.$$

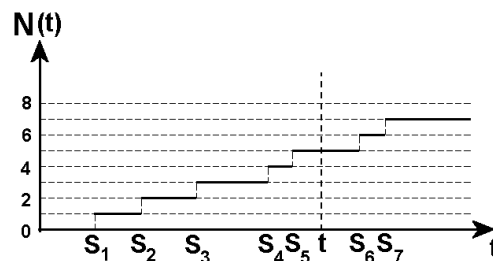
**Definition 4.3:** ein Erneuerungsprozess heißt verzögert (modifiziert), wenn  $F_1(t) \neq F(t)$  gilt; im Fall  $F_1(t) = F(t)$  heißt er einfach (gewöhnlich).

Erneuerungspunkte:  $S_k = \sum_{n=1}^k Z_n$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) ( $S_k$  Zeitpunkte des  $k$ -ten Ausfalls)

Bemerkung: Die Folge  $\{S_k, k \geq 1\}$  wird oft selbst als Erneuerungsprozess bezeichnet.

Nachfolgend wird nun die Anzahl der Erneuerungen betrachtet.

**Definition 4.4:**  $\{N(t), t \geq 0\}$  mit  $N(t) = \sum_k \mathbf{1}\{S_k \leq t\} = \max(k : S_k \leq t)$  und  $N(t) = 0$  für  $t < Z_1 = S_1$  heißt Erneuerungszählprozess.



**Satz 4.3** (o.B.): Wir verwenden  $f_1(t) = F_1'(t)$ ,  $f(t) = F'(t)$  und  $F_k(t) = P(S_k \leq t)$ . Dann gilt:  $F_k(t) = P(N(t) \geq k)$  und auch  $F_k(t) = F_1 * F^{*(k-1)}(t)$  ( $t \geq 0$ ),  $F^{*(0)}(t) = 1$ .

Weiterhin gilt  $F_k(t) = \int_0^t F_{k-1}(t-y)f_1(y)dy$ ,  $f_k(t) = \int_0^t f_{k-1}(t-y)f_1(y)dy$  ( $= f_1 * f^{*(k-1)}(t)$ ).

Und wegen  $P(N(t) \geq k) = P(N(t) = k) + P(N(t) \geq k + 1)$  ist

$$P(N(t) = k) = F_k(t) - F_{k+1}(t) \tag{4.7}$$

Beispiel:  $F_1(t) = F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$  ( $t \geq 0, \lambda > 0$ )

Damit  $S_k$   $k$ -Erlang-verteilt ( $\lambda$ ), d.h.  $F_k(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}$ .

Mit (4.7):  $P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$  ( $k \geq 0$ ), also  $N(t), t \geq 0$ , Poissonprozess HPP.

**Bemerkungen:**

- Für einen Erneuerungsprozess sind die Differenzen  $X_n = T_n - T_{n-1}$  unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable. Im einfachsten Fall, dem homogenen Poissonprozess, sind alle Differenzen  $X_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  identisch exponentialverteilt.
- Die Verteilung von  $N(t)$  kann mit (4.7) nur in wenigen Fällen angegeben werden: Exponential-, Normal- und Erlangverteilung.

**Definition 4.5:** Die Funktion  $H(t) = EN(t)$  heißt Erneuerungsfunktion.

**Satz 4.4:** Für die Erneuerungsfunktion gilt die Erneuerungsgleichung

$$H(t) = F_1(t) + \int_0^t H(t-x)dF(x) \quad (4.8)$$

*Beweis:* Durch einfache Rechnung erhält man

$$\begin{aligned} H(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} kP(N(t) = k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(N(t) \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} F_1 * F^{*(k-1)}(t) \\ &= F_1(t) + \sum_{k=2}^{\infty} F_1 * F^{*(k-1)}(t) = F_1(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t F_1 * F^{*(k-1)}(t-x)dF(x) \\ &= F_1(t) + \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} F_1 * F^{*(k-1)}(t-x)dF(x). \end{aligned}$$

□

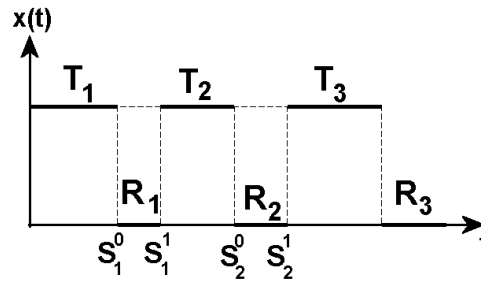
**Bemerkung:** Die Erneuerungsgleichung ist eindeutig lösbar (Feller (1968))

Es gilt, wenn Dichten existieren:  $h(t) = f_1(t) + \int_0^t h(t-x)f(x)dx$

Und für Laplace-Transformierte ( $!g(t) \longleftrightarrow g^*(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt}g(t)dt$ ):  $H^*(p) = \frac{F_1^*(p)}{1-F^*(p)}$ ,  $h^*(p) = \frac{f_1^*(p)}{1-f^*(p)}$

### 4.2.3 Alternierende Erneuerungsprozesse

Wenn in die Modellierung des Ausfall-Reparatur-Prozesses nicht nur Funktionszeiten, sondern auch nicht vernachlässigbare (zufällige) Reparaturzeiten einbezogen werden, dann kann selbst bei unabhängigen Funktions- bzw. Reparaturperioden und jeweils i.i.d. (also unabhängigen und identisch verteilten) Funktions- bzw. Reparaturzeiten der bisher eingeführten Erneuerungsprozess nicht mehr zur Modellbeschreibung verwendet werden. Es erfolgt eine Erweiterung zu alternierenden Erneuerungsprozessen bzw. zu mehrkomponentigen Zählprozessen.



Ein Ausfall-Reparatur-Modell wird durch den Funktionsindikator (Zustandsanzeiger)  $\{X(t), t \geq 0\}$  gekennzeichnet; für diesen werden stochastische Gesetzmäßigkeiten z.B. über die Folge  $\{(T_n, R_n), n \geq 1\}$  ausgedrückt, die ihrerseits vollständig das Ausfall-Reparatur-Verhalten beschreibt.

Es seien  $S_1^0 = T_1$ ,  $S_2^0 = T_1 + R_1 + T_2, \dots$  die Folge der 0-Erneuerungen (Ausfälle) und  $S_1^1 = T_1 + R_1$ ,  $S_2^1 = T_1 + R_1 + T_2 + R_2, \dots$  die Folge der 1-Erneuerungen (Inbetriebnahmen); dann wird vereinbart:

**Definition 4.6:** Wenn  $\{T_n, n \geq 1\}$  und  $\{R_n, n \geq 1\}$  jeweils Folgen von i.i.d. nichtnegativen Zufallsvariable sind, dann heißen  $\{(T_n, R_n), n \geq 1\}$  und auch  $\{(S_k^0, S_k^1), k \geq 1\}$  alternierender Erneuerungsprozess.

Zu den Folgen werden die beiden Zählprozesse zugeordnet:

$N_0(t)$ ... zufällige Anzahl der 0-Erneuerungen bis  $t$

$N_1(t)$ ... zufällige Anzahl der 1-Erneuerungen bis  $t$

und es gilt mit  $F(t) = P(T_n \leq t)$ ,  $G(t) = P(R_n \leq t)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ):

$$\begin{aligned} P(N_0(t) \geq k) &= P(S_k^0 \leq t) = F * (G * F)^{*(k-1)}(t) \\ P(N_1(t) \geq k) &= P(S_k^1 \leq t) = (F * G)^{*k}(t). \end{aligned}$$

- Erneuerungsfunktionen:

$$H_0(t) = EN_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(N_0(t) = k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(N_0(t) \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} F * (G * F)^{*(k-1)}(t)$$

$$H_1(t) = EN_1(t) = \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (G * F)^{*k}(t)$$

- Intervallverfügbarkeit für alternierende Erneuerungsprozesse

Es sei  $V_1(t)$  die restliche Funktionsdauer (Lebenszeit) bei  $t$ ,  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} P(X(t) = 1, V_1(t) > x) &= P(T_1 > t + x) + \sum_{k=1}^{\infty} P(S_k^1 \leq t, t + x < S_k^1 + T_{k+1}) \\ &= \bar{F}(t + x) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t P(t + x \leq u + T_{k+1}) d(F * G)^{*k}(u) \\ &= \bar{F}(t + x) + \int_0^t \bar{F}(t + x - u) dH_1(u) \end{aligned}$$

(Darstellung der sog. Intervallverfügbarkeit)



Daraus leitet man die („ $x = 0$ “): Momentanverfügbarkeit ab:

$$A(t) = P(X(t) = 1) = EX(t) = \bar{F}(t) + \int_0^t \bar{F}(t-u) dH_1(u).$$

- Im konkreten Ausfall-Reparatur-Modell werden stochastische Gesetzmäßigkeiten der beschreibenden Folgen von Zufallsvariablen vorgegeben. In der Regel werden Verteilungen für Funktions- und Reparaturzeiten passend vorausgesetzt. Diese Verteilungen hängen von Verteilungsparametern ab, die aufgrund von Beobachtungsdaten festgelegt (z.B. geschätzt) werden müssen. Damit geschieht eine Anpassung des Modells an eine konkrete Praxissituation. Verteilungen der Funktions- und Reparaturzeiten legen auch die Zählprozesse fest; die Verteilungsparameter finden sich in deren Beschreibung wieder.

#### 4.2.4 Markierte Punktprozesse und Zählprozesse

Reparierbare Systeme werden häufig durch markierte Punktprozesse  $(T_n, \xi_n)_{n \geq 0}$  auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $[\Omega, \mathfrak{F}, P]$  beschrieben, wobei die  $T_n \in (0, \infty)$  ( $n = 1, 2, \dots; T_0 = 0$ ) mit (zufälligen) Ereigniszeitpunkten identifiziert werden.  $\xi_n \in M$  stellen (zufällige, i.A. vektorwertige) Marken dar, die zu  $T_n$  gehören, und  $M$  ist die Menge der verschiedenen Marken (zur Vereinfachung  $M = \{1, 2, \dots, m\}$ ).

**Bemerkung:** Die Zeitpunkte  $T_n$  sind oftmals die Ausfallzeitpunkte oder auch die Reparaturendpunkte. Werden nun die Reparaturzeiten vernachlässigt, dann fallen die Ausfallzeitpunkte mit den Reparaturendpunkte zusammen.

Die Werte von  $M$  enthalten zusätzliche Informationen über die Ausfallzeitpunkte, wie beispielsweise Indikatorwerte einer Zensierung, den Reparaturtyp oder Reparaturkosten.

**Definition 4.7:** Es sei  $(T_n)_{n \geq 0}$  eine Folge reellwertiger zufälliger Zeitpunkte auf  $[\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}]$ . Dann heißt  $(T_n)_{n \geq 0}$  (reellwertiger) Punktprozess, wenn fast sicher die Bedingungen gelten:

$$T_0 = 0, T_1 > 0, T_n < T_{n+1} \text{ mit } T_n < \infty \text{ und } T_{n+1} = \infty \text{ bei } T_n = \infty.$$

**Definition 4.8:** Es sei  $\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$  eine Filtration von sub- $\sigma$ -Algebren von  $\mathfrak{F}$  zu  $(T_n)_{n \geq 0}$ . Ein stochastischer Prozess  $\{N(t), t \geq 0\}$  mit  $N(0) = 0$  heißt Zählprozess (vgl. Fleming und Herrington [19] bzw. Last und Brandt [32]), wenn seine Trajektorien fast sicher rechtsstetig und stückweise konstant sind mit Sprüngen der Höhe 1 in den Unstetigkeitsstellen.

Die Werte von  $\{N(t), t > 0\}$  sind also natürliche Zahlen. Der Zusammenhang von Punktprozessen und Zählprozessen wird mit der folgenden Definition deutlich:

**Definition 4.9:** Es seien  $(T_n)_{n \geq 0}$  ein Punktprozess mit  $T_n \in (0, \infty)$  ( $n = 1, 2, \dots; T_0 = 0$ ) und  $N(t) = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{(0,t)}(T_n)$  für  $t \geq 0$ . Dann heißt  $\{N(t), t \geq 0\}$  der zum Punktprozess  $(T_n)_{n \geq 0}$  gehörige Zählprozess.

Es gelten für beliebige  $t < \infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$  die Ereignisgleichheiten:

$$\{T_n > t\} = \{N(t) < n\}, \{T_n \leq t\} = \{N(t) \geq n\}, \{T_n \leq t < T_{n+1}\} = \{N(t) = n\}$$

Zum Zeitpunkt  $t$  werden also durch  $N(t)$  die eingetretenen Ausfälle gezählt ( $\mathbf{1}_{(0,t]}(T_n)$  hat den Wert 1, wenn  $T_n$  in  $(0, t]$  liegt). Zählprozesse und Punktprozesse liefern eine äquivalente Beschreibung von Ausfallsituationen.

**Definition 4.10:** Es seien  $(T_n)_{n \geq 0}$  ein Punktprozess und  $(\xi_n)_{n \geq 0}$  eine Folge von  $(E, \mathfrak{E})$ -messbaren Zufallsgrößen. Dann heißt  $(T_n, \xi_n)_{n \geq 0}$  markierter Punktprozess mit Marken  $\xi_n$  aus der Markenmenge  $E$ . Durch  $\{N_i(t), t \geq 0 \mid i \in E = \{1, 2, \dots, m\}\}$  mit

$$N_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}\{T_n \leq t\} \mathbf{1}\{\xi_n = i\}$$

wird der zugehörige Multivariate Zählprozess definiert.

Die Marken  $\xi_n$  enthalten zusätzliche Informationen über den Punktprozess an den Zeitpunkten  $(T_n)_{n \geq 0}$ , wie beispielsweise den Reparaturtyp, Reparaturzeiten oder Zensierungsindikatoren.

Gemäß der Doob-Meyer Zerlegung existieren zu jedem Zählprozess  $\{N_i(t), t \geq 0\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , Funktionen  $\Lambda_i(t)$ ,  $t \geq 0$ , so dass  $\{N_i(t) - \Lambda_i(t), t \geq 0\}$  Martingale bezüglich  $\{\mathfrak{F}_t\}$  sind. Es gilt  $\mathbb{E}(N_i(t) - \Lambda_i(t)) = 0$ . Es sei nun  $\mathfrak{F}_t = \sigma\{N_i(s), s \leq t, i \in E\}$ , d.h. die sogenannte natürliche Filtration. Wir nehmen an, dass  $\Lambda_i(t)$  für jedes  $i \in E$  differenzierbar ist, also eine Funktion  $\lambda_i(t)$  existiert, die sogenannte Intensitätsfunktion des Prozesses  $N_i(t)$  mit der Eigenschaft

$$\Lambda_i(t) = \int_0^t \lambda_i(u) du < \infty.$$

Im Weiteren sind die Untersuchungen wieder auf eindimensionale Zählprozesse  $\{N(t), t \geq 0\}$  eingeschränkt.

Beispiele für die hier zu betrachtenden Prozessmodelle sind auch die Erneuerungsprozesse RP aus Abschnitt 4.2.2 und inhomogene Poissonprozesse NHPP:

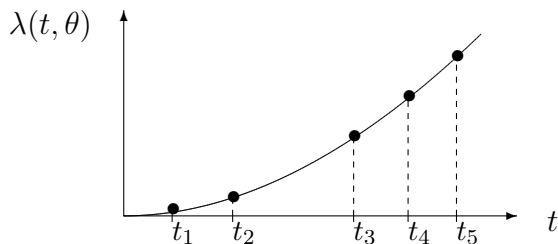
**Definition 4.11:** Ein Zählprozess  $\{N(t), t \geq 0\}$  heißt inhomogener Poissonprozess, kurz NHPP, mit der *Intensität*  $\lambda(t)$ ,  $t \geq 0$ , und dem *Intensitätsmaß*  $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du$ , wenn gilt:

1.  $\{N(t), t \geq 0\}$  hat unabhängige Zuwächse, d.h.  $N(t_1) - N(0)$ ,  $N(t_2) - N(t_1)$ , ...,  $N(t_n) - N(t_{n-1})$  mit  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$  sind unabhängig,
2.  $P(N(t + \Delta t) - N(t) = 1) = \lambda(t) \cdot \Delta t + o(\Delta t)$ ,  $P(N(t + \Delta t) - N(t) > 1) = o(\Delta t)$  für beliebig (kleines)  $\Delta t > 0$ ,
3.  $P(N(t) - N(s) = k) = \frac{[\Lambda(t) - \Lambda(s)]^k}{k!} \exp\{-[\Lambda(t) - \Lambda(s)]\}$  ( $k = 0, 1, \dots; t > s \geq 0$ )

Für die konstante Intensität  $\lambda(t) = \lambda$ ,  $t > 0$ , liegt ein homogener Poissonprozess (HPP)  $\{N(t), t \geq 0\}$  vor.

### Bemerkungen:

1. Ein NHPP wird durch seine Intensität  $\lambda(t)$  bzw. durch das Intensitätsmaß  $\Lambda(t)$  vollständig beschrieben; beispielsweise kann  $\lambda(t)$  folgende Gestalt haben



2. Für einen HPP, der durch die Folge  $(T_n)_{n=1,2,\dots}$  gegeben ist, sind die sogenannten Wartezeiten  $X_n = T_n - T_{n-1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ;  $T_0 = 0$ , unabhängig und exponentialverteilte Zufallsgrößen mit der Verteilungsfunktion  $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$ . Also ist ein HPP ein einfacher Erneuerungsprozess.
3. Ein Erneuerungsprozess beschreibt den Fall, dass beim Systemausfall das Ausfallelement durch ein gleichwertiges neues ersetzt wird. Man spricht dann von "vollständiger Reparatur" (auch "same-as-new").  
Beim inhomogenen Poissonprozess wird der Systemausfall durch ein Element gleichen Alters behoben. Man spricht hierbei von "Minimalreparatur" (auch "bad-as-old").

**Definition 4.12:** Für einen Zählprozess wird durch

$$\gamma(t|\mathfrak{F}_{t-}) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{P(N(t, t+h) > 0 | \mathfrak{F}_{t-})}{h}$$

die bedingte Intensität (vgl. Andersen u.a. [1]) eingeführt.

Für kleine  $h$  gilt  $\gamma(t) \cdot h = P(\text{Ausfall in } (t, t+h))$ . Wir vermerken, dass  $\mathfrak{F}_{t-} = \sigma\{N_i(s), s < t, i \in E\}$  die Prozessinformation bis unmittelbar vor  $t$  enthält.

Es ist bekannt, dass für inhomogene Poissonprozesse NHPP die bedingte Intensität gleich der Intensität ist, also  $\gamma(t|\mathfrak{F}_{t-}) = \lambda(t)$ . Im Fall von Erneuerungsprozessen RP gilt  $\gamma(t|\mathfrak{F}_{t-}) = z(t - T_{N(t-)})$  ( $t \geq T_{N(t-)}$ ), wobei  $z(t)$  die Ausfallrate der Aufenthaltszeiten in einem Zustand von  $N(t)$  darstellt und  $T_{N(t-)}$  der letzte Sprungzeitpunkt vor  $t$  ist.

**Feststellung1 :** Nach Pulcini [42] kann die bedingte Intensität eines Zählprozesses aus der bedingten Verteilung abgeleitet werden. Es gilt

$$\gamma(t|\mathfrak{F}_{t-}) = \frac{f(t|\mathfrak{F}_{t-})}{1 - F(t|\mathfrak{F}_{t-})}.$$

Umgekehrt gilt für die bedingte Dichte

$$f(t|\mathfrak{F}_{t-}) = \gamma(t|\mathfrak{F}_{t-}) \cdot \exp\left\{-\int_{T_{N(t-)}}^t \gamma(u|\mathfrak{F}_{u-}) du\right\}$$

Im Fall eines NHPP ist die bedingte Dichte

$$f(t|\mathfrak{F}_{t-}) = \gamma(t|\mathfrak{F}_{t-}) \cdot (1 - F(t|\mathfrak{F}_{t-})) = \lambda(t) \cdot (1 - F(t|\mathfrak{F}_{t-})),$$

und für einen RP ist

$$f(t - T_{N(t-)}) = \gamma(t|\mathfrak{F}_{t-}) \cdot (1 - F(t - T_{N(t-)})) = z(t - T_{N(t-)}) \cdot (1 - F(t - T_{N(t-)})).$$

Spezielle NHPP sind durch die folgenden Intensitäten bzw. bedingte Intensitäten ( $\lambda(t) = \gamma(t|\mathfrak{F}_{t-})$  ( $t \geq 0$ ) mit Parametern  $\theta := (\alpha, \beta)$ ;  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ) charakterisiert:

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= \alpha \cdot \beta t^{\beta-1} && \text{Weibullprozess} \\ &= \alpha \cdot \beta \frac{1}{1+\beta t} && \text{Paretoprozess} \\ &= \alpha \cdot \beta e^{\beta t} && \text{Log-linear-Prozess}\end{aligned}$$

**Definition 4.13:** Es seien  $(T_i)_{i \geq 0}$  ein Punktprozess mit  $T_i \in (0, \infty)$  und den Realisierungen (Beobachtungen)  $T_i = t_i$  ( $i = 1, 2, \dots; T_0 = 0$ ).  $\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$  sei die zugehörige Filtration und  $\gamma(t|\mathfrak{F}_{t-})$  die bedingte Intensitätsfunktion. Dann heißt die folgende Funktion (zufällige) Likelihoodfunktion zur Beobachtungszeit  $t$  und mit Parametern  $\theta$  (cf. Anderson u.a. [1] bzw. Last und Brandt [32])

$$L(t, \theta) = \prod_{i=1}^{N(t)} \gamma(T_i|\mathfrak{F}_{T_i-}) \cdot \exp \left\{ - \int_0^t \gamma(u|\mathfrak{F}_{u-}) du \right\} \quad (4.9)$$

Wenn die konkreten Beobachtung  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$  und  $N(t) = n$  verwendet werden, so ist

$$L(t, \theta) = \prod_{i=1}^n \gamma(t_i|\mathfrak{F}_{t_i-}) \cdot \exp \left\{ - \int_0^t \gamma(u|\mathfrak{F}_{u-}) du \right\}$$

die (konkrete) Likelihoodfunktion.

### Bemerkungen:

1. Unter Verwendung der Feststellung 1 kann die Likelihoodfunktion auch durch die bedingte Verteilung dargestellt werden:

$$L(t, \theta) = \prod_{i=1}^n f(t_i|\mathfrak{F}_{t_i-}) \cdot (1 - F(t|\mathfrak{F}_{t-}))$$

2. Bisweilen ist es sinnvoll, eine zufällige Beobachtungszeit  $\tau$  (Stoppzeit) zu betrachten. In der Likelihoodfunktion ist dann die Beobachtungszeit  $t$  einfach durch  $\tau$  zu ersetzen.

### 4.2.5 Unvollständige Erneuerungsprozesse

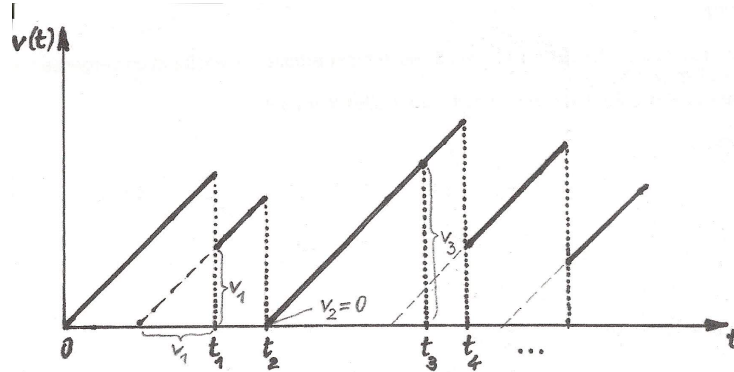
Im Hinblick auf die Reparatur von technischen Systemen beschreiben die Prozessmodelle des vorangehenden Abschnitts eine vollständige Reparatur (bzw. Erneuerung) sowie eine Minimalreparatur. Wie kann nun eine Reparatur, die zwischen diesen beiden Möglichkeiten liegt, also eine Teilreparatur oder unvollständige Reparatur ist, beschrieben werden? Die wohl bekanntesten Modelle für eine unvollständige Reparatur sind die Modelle von Kijima (vgl. [31]).

Im Folgenden werden zwei Modelle von Kijima vorgestellt. Dazu wird das virtuelle Alter, die sogenannte Virtual-Age-Funktion  $V(t)$  für eine lineare Alterung des Systems zwischen zwei

Ausfallzeitpunkten  $T_{n-1}$  und  $T_n$  ( $n \geq 0$ ;  $T_0 = 0$ ) benötigt:

$$V(t) = V_{n-1} + t - T_{n-1} \quad (T_{n-1} \leq t < T_n) \quad (4.10)$$

wobei  $V(0) = 0$ ,  $V_n := V(T_n) \in [0, V_{n-1} + T_n - T_{n-1}]$  ( $n \geq 1$ ).



Beispiel einer konkreten Virtual-Age-Funktion  $v(t)$

Das virtuelle Alter eines reparierten Systems beschreibt im Gegensatz zum Normalalter  $t$  (seit Inbetriebnahme des Systems bei  $t = 0$ ) jetzt den Zustand, den ein neues gleichartiges System hätte, das ohne Ausfall in Betrieb ist. Das Systemalter wird nach der  $n$ -ten Reparatur auf einen Wert  $V_n \in [0, V_{n-1} + T_n - T_{n-1}]$  zurückgesetzt; dabei entspricht  $V_n = 0$  einer vollständigen Reparatur und  $V_n = V_{n-1} + T_n - T_{n-1}$  einer Minimalreparatur.

Kijima-Modelle sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} V_n &= V_{n-1} + A_n X_n = \sum_{k=1}^n A_k X_k \cdots \cdots \cdots \text{Kijima I}, \\ V_n &= A_n (V_{n-1} + X_n) = \sum_{k=1}^n \left( \prod_{j=k}^n A_j \right) X_k \cdots \cdots \text{Kijima II}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

mit  $X_k = T_k - T_{k-1}$ , und  $A_k \in [0, 1]$  (zufällige Werte oder fest gewählte reelle Zahlen aus dem Intervall  $[0, 1]$ ).

### Bemerkungen:

1. In beiden Modellen liegen für die Kijima-Prozesse bei  $A_n = 1$  NHPP und bei  $A_n = 0$  RP vor. Sind die  $A_n$  unabhängige und identisch verteilte Zufallsgrößen mit den Werten 0 oder 1, so liegt ein unvollständiges Reparaturmodell gemäß Brown und Proschan [13] vor.
2. Im Fall, dass im System  $m$  verschiedene Reparaturtypen vorliegen und man dies mit festen Markenwerten  $\xi_n = A_n$  ausdrücken kann, erfassen die Zählprozesse  $\{N_i(t), t \geq 0\}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  die Anzahlen von unterschiedlichen Reparaturen, und der Gesamtprozess  $N(t) = \sum_{n=1}^m N_i(t)$  gibt die Anzahl aller Ausfälle bis  $t$  wieder.  $\square$ .

**Definition 4.14:** Die Zählprozesse  $\{N(t), t \geq 0\}$  mit dem (zufälligen) virtuellen Alter (4.10) können als verallgemeinerte Erneuerungsprozesse aufgefasst werden. Genauer, solche Prozesse werden unvollständige Erneuerungsprozesse ( $IRP(V(\cdot), F(\cdot))$ ) genannt, wobei  $F(\cdot)$  der Typ der Verteilungsfunktion von  $T_n - T_{n-1} + V_{n-1}$  ist.

**Satz 4.5:** Die bedingte Intensitätsfunktion eines IRP ist

$$\gamma(t) = \gamma(t|\mathfrak{F}_{t-}) = z(V(t)) = z(t - (T_{N(t-)} - V_{N(t-)})).$$

*Beweis:* Es sei  $Z$  die Aufenthaltszeit in einem Zustand  $N(t)$  des unvollständigen Erneuerungsprozesses und  $z(t)$  die zu  $F(\cdot)$  gehörende Ausfallrate. Dann gilt

$$P(N(t+h) - N(t) > 0 | \mathfrak{F}_{t-}) = P(Z \leq t+h - T_{N(t-)} + V_{N(t-)} | Z > t - T_{N(t-)} + V_{N(t-)})$$

wobei  $T_{N(t-)}$  der letzte Sprungzeitpunkt vor  $t$  und  $V_{N(t-)}$  das zugehörige Virtuelle Alter sind. Es ist

$$P(N(t+h) - N(t) > 0 | \mathfrak{F}_{t-}) = \frac{P(t < Z + T_{N(t-)} - V_{N(t-)} \leq t+h)}{P(Z > t - (T_{N(t-)} - V_{N(t-)}))},$$

und mit Feststellung 1 folgt damit die bedingte Intensitätsfunktion  $\gamma(t)$  follows.  $\square$

**Beispiele** "Kijima-Modelle":

$$\text{Modell I: } \gamma(t) = z \left( t - T_{N(t-)} + \sum_{k=1}^{N(t-)} A_k X_k \right),$$

$$\text{Modell II: } \gamma(t) = z \left( t - T_{N(t-)} + \sum_{k=1}^{N(t-)} \left( \prod_{j=k}^{N(t-)} A_j \right) X_k \right),$$

mit  $t \geq T_1$ .

**Bemerkung:** Im Allgemeinen hängt die bedingte Intensitätsfunktion  $\gamma(t)$  eines IRP von der vollständigen Geschichte  $\mathfrak{F}_{t-}$  ab; im Fall von RP hängt  $\gamma(t)$  nur von dem letzten Sprungzeitpunkt  $T_{N(t-)}$  ab.

## 4.2.6 Trend-Erneuerungsprozesse

Die Trend-Erneuerungsprozesse wurden in Lindqvist [12] eingeführt und in weiteren Arbeiten ausführlich diskutiert (vgl. beispielsweise [13]).

Der Trend-Erneuerungsprozess ist durch die Verteilungsfunktion  $F$  der Erneuerungszeitabschnitte und durch eine Intensitäts- oder Trendfunktion  $\lambda(t)$  beschrieben:

**Definition 4.15:** Es seien  $\lambda(t)$  eine nichtnegative Funktion für alle  $t \geq 0$  und  $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du$ .

Der Prozess  $(T_n)_{n \geq 1}$  wird Trend-Erneuerungsprozess, kurz  $TRP(F(\cdot), \lambda(\cdot))$  mit Trendfunktion  $\lambda(t)$  und Erneuerungsverteilung  $F(\cdot)$  genannt, wenn der transformierte Prozess  $(\Lambda(T_n))_{n \geq 1}$  ein Erneuerungsprozess  $RP(F(\cdot))$  ist, also die Differenzen  $Y_n := \Lambda(T_n) - \Lambda(T_{n-1})$  ( $n \geq 1$ ) unabhängig und identisch verteilt sind mit Verteilungsfunktion  $F(\cdot)$ .

**Bemerkungen:**

1. Die Klasse der TRP wurde mit Eigenschaften der Folge  $(T_n)_{n \geq 1}$  eingeführt und enthält die Prozessklassen der RP und der NHPP. Äquivalent kann der zugehörige Zählprozess  $\{N(t), t \geq 0\}$  betrachtet werden, wobei  $N(t) = \tilde{N}(\Lambda(t))$  und  $\{\tilde{N}(t), t \geq 0\}$  einen Erneuerungszählprozess darstellt.
2.  $\lambda(t)$  wird Trendfunktion und  $F(\cdot)$  die Erneuerungsverteilungsfunktion genannt, z.B. gilt für den NHPP  $F(y) = 1 - e^{-y}$ .
3. Der Trend-Erneuerungsprozess ist durch  $F$  und  $\lambda(t)$  nicht eindeutig festgelegt. Um die Eindeutigkeit zu sichern, kann der Skalenparameter der Verteilungsfunktion  $F(y)$ ,  $y \geq 0$ , gleich 1 gesetzt werden. Eine Alternative wäre, den Erwartungswert gleich 1 zu wählen (das ist allerdings für weitere Rechnungen nicht so vorteilhaft; vgl. Lindqvist [13]).

Gemäß Lindqvist [36] ist die allgemeine Form der bedingten Intensitätsfunktion für einen  $TRP(F, \lambda(\cdot))$ :

$$\gamma(t) = \gamma(t|\mathfrak{F}_{t-}) = z(\Lambda(t) - \Lambda(T_{N(t-)})) \cdot \lambda(t) \quad (4.12)$$

wobei  $z(y)$  die zu  $F(y)$  gehörige Ausfallrate und  $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du$  gilt.

Wir werden nun auf einige interessante Beispiele von  $TRP(F, \lambda(\cdot))$  schauen.

#### Weibull-Weibull-Prozess:

Für diesen Prozess gilt  $\lambda(t) = \alpha \cdot \beta t^{\beta-1}$  ( $t \geq 0; \alpha > 0, \beta > 0$ ),

d.h. die Trendfunktion ist die Intensitätsfunktion eines NHPP, nämlich des Weibullprozesses.

Damit ist  $\Lambda(t) = \alpha t^\beta$ .

Weiterhin wird  $F(y) = 1 - e^{-y^b}$  ( $y \geq 0, b > 0$ ) gewählt, d.h. die Zeiten zwischen zwei Ausfällen haben für den Erneuerungsprozess die Weibullverteilung, speziell mit dem Skalenparameter 1 und die Ausfallfunktion  $z(y) = by^{b-1}$ .

Die bedingte Intensitätsfunktion ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= b\alpha^{b-1} [t^\beta - T_{N(t-)}^\beta]^{b-1} \alpha \beta t^{\beta-1} \\ &= \alpha^b \beta b t^{\beta-1} [t^\beta - T_{N(t-)}^\beta]^{b-1} \end{aligned}$$

Es sei hervorgehoben, dass das Weibull-Weibull-Prozessmodell sehr flexibel ist und sich für unterschiedliche Anwendungen in der Praxis eignet. Die Ausfalltrendfunktion kann eine wachsende oder eine fallende Funktion sein.

#### Pareto-Weibull-Prozess:

Es gilt  $\lambda(t) = \alpha \cdot \beta \frac{1}{1+\beta t}$  ( $t \geq 0; \alpha > 0, \beta > 0$ )

$\Lambda(t) = \alpha \ln(1 + \beta t)$

$z(y) = by^{b-1}$  ( $t \geq 0; b > 0$ )

Die bedingte Intensitätsfunktion ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= b\alpha^{b-1}[\ln(1 + \beta t) - \ln(1 + \beta T_{N(t-)})]^{b-1} \frac{\alpha\beta}{1 + \beta t} \\ &= \frac{\alpha^b b \beta [\ln(1 + \beta t) - \ln(1 + \beta T_{N(t-)})]^{b-1}}{1 + \beta t}\end{aligned}$$

Die Trendfunktion im Pareto-Weibullprozess ist fallend.

### Inhomogener Gammaprozess:

Dieser spezielle TRP wurde erstmalig in Berman (1981,[12]) und auch in Calabria u.a. [15] betrachtet. Es kommt die Intensitätsfunktion eines NHPP zur Anwendung, beispielsweise mit  $\lambda(t) = \alpha \cdot \beta t^{\beta-1}$  die eines Weibullprozesses.

Weiterhin gilt

$$F(y) = I_\kappa(ay) \quad (y \geq 0, a, \kappa > 0)$$

wobei  $I_\kappa(y) = \frac{1}{\Gamma(\kappa)} \int_0^y s^{\kappa-1} e^{-s} ds$  die Verteilungsfunktion einer inversen Gamma-Verteilung ist.

Damit gilt:  $f(y) = \frac{1}{\Gamma(\kappa)} a^\kappa y^{\kappa-1} e^{-ay}$  und  $z(y) = \frac{a^\kappa y^{\kappa-1} e^{-ay}}{\Gamma(\kappa)(1 - I_\kappa(ay))}$ .

Für die bedingte Intensitätsfunktion gilt:

$$\gamma(t) = \frac{[\Lambda(t) - \Lambda(T_{N(t-)})]^{\kappa-1} e^{-\Lambda(t) - \Lambda(T_{N(t-)})}}{\Gamma(\kappa)[1 - I_\kappa(\Lambda(t) - \Lambda(T_{N(t-)}))]} \lambda(t)$$

**Bemerkung:** Im Specialfall, wenn  $\kappa$  ganzzahlig ist, vereinfacht sich das Integral  $I_\kappa(y)$  und man erhält

$$z(y) = \frac{a^\kappa y^{\kappa-1}}{\Gamma(\kappa) \sum_{i=0}^{\kappa-1} \frac{(ay)^i}{i!}}$$

□

## 4.2.7 Unvollständige Trend-Erneuerungsprozesse

Im Vergleich mit dem vorangehenden Abschnitt wird jetzt die Prozessklasse der TRP dahingehend verallgemeinert, dass der zeittransformierte Prozess nicht mehr ein Erneuerungsprozess ist, sondern ein IRP.

Es seien  $\{N(t), t \geq 0\}$  die Anzahl der Systemausfälle in  $(0, t]$  und  $(T_n)_{n \geq 1}$  die  $n$ ten Ausfallzeiten ( $T_0 = 0$ ). Wie auch in vorangehend betrachteten Prozessmodellen werden Reparaturzeiten nach Systemausfällen vernachlässigt

**Definition 4.16:**  $\lambda(t), t \geq 0$ , sei eine nichtnegative Funktion,  $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du$  und  $V(t), t \geq 0$  sei die virtuelle Altersfunktion mit

$$V(t) = t - T_{n-1} + V_{n-1} \quad (T_{n-1} \leq t < T_n)$$

$$V(0) = V_0 = 0, \quad V_n = V(T_n) \in [0, T_n - T_{n-1} + V_{n-1}] \quad (n \geq 1)$$



Die Folge  $(T_n)_{n \geq 1}$  und auch der Prozess  $\{N(t), t \geq 0\}$  werden unvollständige Trend-Erneuerungsprozesse  $TIRP(V(\cdot), F(\cdot), \lambda(\cdot))$  genannt, wenn der zeittransformierte Prozess  $(\Lambda(T_n))_{n \geq 1}$  ein  $IRP(V(\cdot), F(\cdot))$  ist, d.h. wenn die Differenzen  $\Lambda(T_n) - \Lambda(T_{n-1} - V_{n-1})$  ( $n \geq 1$ ) die Verteilungsfunktion  $F(\cdot)$  (unter der Bedingung  $T_{n-1} - V_{n-1}$ ) haben und  $z$  die zugehörige Ausfallrate ist.

**Satz 4.6:** Die bedingte Intensitätsfunktion eines TIRP ist gegeben durch

$$\gamma(t) = z(\Lambda(t) - \Lambda(T_{N(t-)} - V_{N(t-)})) \cdot \lambda(t)$$

*Beweis:* Der zu IRP gehörige Zählprozess ist  $\{\tilde{N}(t), t \geq 0\}$ , wobei  $N(t) = \tilde{N}(\Lambda(t))$ . Nach Satz 4.5 folgt daraus

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{P(\text{Ausfall TIRP in } [t, t+h] | \mathfrak{F}_{t-})}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{P(\text{fAusfall IRP in } [\Lambda(t), \Lambda(t+h)] | \mathfrak{F}_{t-})}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{P(\tilde{N}(\Lambda(t+h)) - \tilde{N}(\Lambda(t)) > 0 | \mathfrak{F}_{t-})}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{P(\tilde{N}(\Lambda(t+h)) - \tilde{N}(\Lambda(t)) > 0 | \mathfrak{F}_{t-})}{\Lambda(t+h) - \Lambda(t)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\Lambda(t+h) - \Lambda(t)}{h} \\ &= z(\Lambda(t) - \Lambda(T_{N(t-)} - V_{N(t-)})) \cdot \lambda(t) \end{aligned}$$

□

**Beispiel:** Die Funktion des virtuellen Alters möge eine aus einem Kijima-II-Modell sein. Für die bedingte Intensität gilt dann

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= z(\Lambda(t) - \Lambda(T_{N(t-)} - V_{N(t-)})) \cdot \lambda(t) \\ &= z \left( \Lambda(t) - \Lambda \left( \left[ T_{N(t-)} - \sum_{k=1}^{N(t-)} \left( \prod_{j=k}^{N(t-)} A_j \right) X_k \right] \right) \right) \cdot \lambda(t), \end{aligned}$$

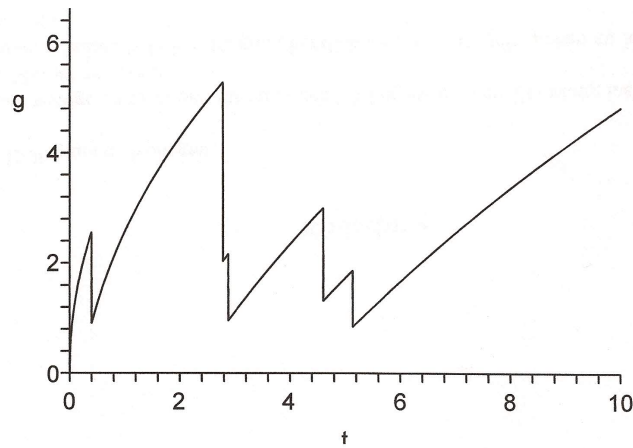
wobei  $X_k = T_k - T_{k-1}$ .

Mit  $N(t-) = n - 1$ ,  $A_j = \frac{1}{2}$  ( $j=1,2,\dots$ ) ergibt sich

$$V_{n-1} = \sum_{k=1}^{N(t-)} \left( \prod_{j=k}^{N(t-)} A_j \right) X_k = \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{2} \right)^{n-k} (T_k - T_{k-1})$$

Noch spezieller, im Fall eines Weibull-Weibull-Prozesses mit  $\Lambda(t) = \alpha t^\beta$  ( $\alpha > 0, \beta > 0$ ) und  $z(x) = bx^{b-1}$  ( $b > 0$ ) folgt dann

$$\gamma(t) = \alpha^b \beta b [t^\beta - (T_{N(t-)} - V_{N(t-)})^\beta]^{b-1} t^{\beta-1}$$



Beispiel für die bedingte Intensität  $\gamma(t)$  ( $\alpha = 1.8$ ,  $\beta = .8$ ,  $b = 2.1$ )

Zum Abschluss dieses Abschnittes soll noch die Likelihoodfunktion angegeben werden (vgl. auch Definition 4.13):

$$\begin{aligned}
 L(t) = & \prod_{i=1}^{N(t)} \{ z(\Lambda(T_i) - \Lambda(T_{i-1} - V_{i-1})) \cdot \lambda(T_i) \cdot \\
 & \exp \left[ - \int_{T_{i-1}}^{T_i} z(\Lambda(u) - \Lambda(T_{i-1} - V_{i-1})) \cdot \lambda(u) du \right] \} \cdot \\
 & \exp \left[ - \int_{T_{N(t-)}}^t z(\Lambda(u) - \Lambda(T_{i-1} - V_{i-1})) \cdot \lambda(u) du \right]. \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

Eine Likelihoodfunktion ist oftmals Ausgangspunkt für statistische Untersuchungen.



# Kapitel 5

## Schätzung und Vorhersage in reparierbaren Systemen

In der Praxis liegen oft für reparierbare Systeme Lebensdauer- bzw. Reparaturdaten vor. Es besteht die Aufgabe, zum System ein passendes Prozessmodell auszuwählen und ein solches insbesondere durch Parameterfestlegungen an das Datenmaterial anzupassen. Für die Festlegungen der Parameter werden Parameterschätzungen im Vordergrund stehen. Natürlich ist auch die weitere zeitliche Entwicklung für ein Zuverlässigkeitssystem von Interesse. Deshalb wird auch auf Prognosewerte eingegangen.

Zunächst werden wir uns mit Methoden der Punktschätzung von Parametern beschäftigen: es werden Maximum-Likelihood-Schätzungen und Bayes-Schätzungen für RP und NHPP, später auch für TRP und TIRP betrachtet.

### 5.1 Maximum-Likelihood-Schätzung

Ausgangspunkt der Untersuchungen ist die Likelihoodfunktion des betrachteten Prozesses. Nach Definition 4.13 hat die Likelihoodfunktion für eine Prozessbeobachtung bis zur Zeit  $t$  mit konkreten Ausfallzeitpunkten  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq t$  und der Ausfallanzahl  $N(t) = n$  die Gestalt

$$L(t, \theta) = \prod_{i=1}^n \gamma(t_i | \mathfrak{F}_{t_i-}) \cdot \exp \left\{ - \int_0^t \gamma(u | \mathfrak{F}_{u-}) du \right\} \quad (5.1)$$

$$= \prod_{i=1}^n f(t_i | \mathfrak{F}_{t_i-}) \cdot (1 - F(t | \mathfrak{F}_{t-})) \quad (5.2)$$

#### 5.1.1 Maximum-Likelihood-Schätzung für RP und NHPP

Nach Definition 4.12 gilt für inhomogene Poissonprozesse NHPP  $\gamma(t | \mathfrak{F}_{t-}) = \lambda(t)$  und für Erneuerungsprozesse RP  $\gamma(t | \mathfrak{F}_{t-}) = z(t - T_{N(t-)})$  für  $t \geq T_{N(t-)}$ , wobei  $z(t)$  die Ausfallrate der

Aufenthaltszeiten in einem Zustand von  $N(t)$  und  $T_{N(t-)}$  der letzte Sprungzeitpunkt vor  $t$  ist.

Die (konkrete) Likelihoodfunktion ergibt sich für einen **Erneuerungsprozess**

$$L(t, \theta) = \prod_{i=1}^n f(t_i, \theta)(1 - F(t - t_n, \theta)),$$

wobei  $f(t_i, \theta)$  die Dichten der unabhängigen und identisch verteilten Aufenthaltszeiten  $T_i - T_{i-1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) des Prozesses nach dem  $(i - 1)$ -ten Erneuerungszeitpunkt bedeutet und  $F(t, \theta)$  ist die Verteilungsfunktion;

Wir werden uns nun mit Parameterschätzungen nach der Maximum-Likelihood-Methode (ML-Methode) beschäftigen.

### Beispiel:

Es wird eine flexible Verteilung für die Aufenthaltszeiten  $T_i - T_{i-1}$  gewählt, nämlich die *Weibullverteilung*.

Die Dichten  $f(t_i, \theta)$  haben die Gestalt:

$$f(t_i, \theta) = \frac{b}{a^b} t_i^{b-1} \cdot \exp \left\{ -\left(\frac{t_i}{a}\right)^b \right\},$$

wobei  $t_i \geq 0$ ;  $\theta = (a, b)$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ .

Die Likelihoodfunktion ergibt sich damit zu (vgl. auch Abschnitt 3.1.2)

$$L(t, \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{b}{a^b} t_i^{b-1} \cdot \exp \left\{ -\left(\frac{t_i}{a}\right)^b \right\} \cdot \exp \left\{ -\left(\frac{t - t_n}{a}\right)^b \right\} \quad (5.3)$$

$$= \frac{b^n}{a^{nb}} \prod_{i=1}^n t_i^{b-1} \cdot \exp \left\{ -\sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{a}\right)^b \right\} \cdot \exp \left\{ -\left(\frac{t - t_n}{a}\right)^b \right\} \quad (5.4)$$

Für die ML-Methode ist es oftmals einfacher,  $\ln L := \ln L(t, \theta)$  bezüglich der Parameter zu differenzieren. Wir erhalten die ML-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \ln L &= n(\ln b - b \ln a) + (b - 1) \sum_{i=1}^n \ln t_i - \frac{1}{a^b} \left[ \sum_{i=1}^n t_i^b + (t - t_n)^b \right] \\ \frac{\partial \ln L}{\partial a} &= -\frac{nb}{a} + \frac{b}{a^{b+1}} \left[ \sum_{i=1}^n t_i^b + (t - t_n)^b \right] = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial b} &= \frac{n}{b} - n \ln a + \sum_{i=1}^n \ln t_i + \frac{\ln a}{a^b} \left[ \sum_{i=1}^n t_i^b + (t - t_n)^b \right] \\ &\quad - \frac{1}{a^b} \left[ \sum_{i=1}^n (\ln t_i) t_i^b - \ln(t - t_n) \cdot (t - t_n)^b \right] = 0 \end{aligned}$$

mit

$$T_1 = \sum_{i=1}^n \ln t_i \quad T_2(b) = \sum_{i=1}^n t_i^b + (t - t_n)^b$$

$$T_3(b) = \sum_{i=1}^n (\ln t_i) t_i^b - \ln(t - t_n) \cdot (t - t_n)^b$$

erhält man

$$na^b - T_2(b) = 0, \quad na^b + ba^b T_1 - bT_3(b) = 0$$

$$\text{bzw. } \hat{a} = \left[ \frac{1}{n} T_2(\hat{b}) \right]^{1/\hat{b}} \quad (1) \quad n + \hat{b} \left[ T_1 - n \frac{T_3(\hat{b})}{T_2(\hat{b})} \right] = 0 \quad (2)$$

(2) ist nur numerisch z.B. mittels Newton-Raphson-Verfahren lösbar. Das Einsetzen in (1) liefert schließlich Punktschätzwerte für  $a$  und  $b$ .

Für einen **inhomogenen Poissonprozess NHPP** ist die (konkrete) Likelihoodfunktion mit Beobachtungszeiten  $0 < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq t$

$$L(t, \theta) = \prod_{i=1}^n \lambda(t_i) \cdot \exp \left\{ - \int_0^t \lambda(u) du \right\}.$$

**Beispiel Weibull-Prozess:** Die Intensitätsfunktion und kumulative Intensitätsfunktion sind

$$\lambda(t) = \alpha \beta t^{\beta-1} \quad \Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du = \alpha t^\beta,$$

also ist die Likelihoodfunktion

$$L(t, \theta) = \prod_{i=1}^n \alpha \beta t_i^{\beta-1} \cdot \exp \{ -\alpha t^\beta \} = (\alpha \beta)^n \prod_{i=1}^n t_i^{\beta-1} \cdot e^{-\alpha t^\beta}.$$

Die ML-Methode verwendet wiederum  $\ln L(t, \theta) =: \ln L$  und  $\theta = (\alpha, \beta)$   $\alpha > 0, \beta > 0$ :

$$\ln L = (\ln \alpha + \ln \beta)n + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln t_i - \alpha t^\beta.$$

Unter Verwendung von  $M(t) := \sum_{i=1}^n \ln t_i$  erhält man für die ML-Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} &= \frac{n}{\alpha} - t^\beta = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \beta} &= \frac{n}{\beta} + M(t) - \alpha (\ln t) t^\beta = 0 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die ML-Schätzwerte

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(t) = \frac{n}{t^\beta}, \quad \hat{\beta} = \hat{\beta}(t) = \frac{n}{n \ln t - M(t)}.$$

Wir vermerken, dass man für andere NHPP, wie beispielsweise für den Pareto-Prozess in ähnlicher Weise die ML-Schätzwerte der Parameter  $\theta = (\alpha, \beta)$ ,  $\alpha > 0, \beta > 0$  gewinnen kann, allerdings mit der Ausnahme, dass stets der Parameter  $\beta$  aus einer nichtlinearen Gleichung mittels eines numerischen Verfahrens ermittelt werden muss.

### 5.1.2 Maximum-Likelihood-Schätzung für TRP und TIRP

Um ML-Schätzer für Parameter von Trend-Erneuerungsprozessen oder unvollständigen Trend-Erneuerungsprozessen studieren zu können, müssen konkrete Prozesstypen ausgewählt werden.

Für Prozesse vom TIRP-Typ soll vorausgesetzt werden, dass die Folge  $(V_n)_{n \geq 1}$  der virtuellen Alterswerte nichtzufällig und bekannt ist (das trifft ebenso für die Werte  $A_n$  zu). Wenn speziell  $(V_n) = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) gesetzt wird, ergeben sich natürlich Prozesse aus der TRP-Klasse.

**A)** Als erster Prozesstyp wird ein **Weibull-Weibull TIRP** gewählt.

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } z(x) &= bx^{b-1} & b > 0; \\ \Lambda(t) &= \alpha t^\beta & \alpha > 0, \beta > 0 \\ \text{und } V(t) &= t - T_{n-1} + V_{n-1} & T_{n-1} \leq t < T_n. \end{aligned}$$

Es ist jetzt nicht notwendig, feste Zahlen für  $V_n$  zu wählen. Jedoch sind die Werte für spezielle Reparaturstrategien festgelegt, wie beispielsweise bei  $V_n = \frac{1}{2}(V_{n-1} + T_n - T_{n-1}) = \sum_{k=1}^n (\frac{1}{2})^{n-k+1} (T_k - T_{k-1})$  eine sogenannte "Halbreparatur" erfolgt.

Die bedingte Intensitätsfunktion hat die Form

$$\gamma(t) = \alpha^b \beta b [t^\beta - (T_{n-1} - V_{n-1})^\beta]^{b-1} t^{\beta-1} \quad (5.5)$$

Der Prozess sei beobachtet bis  $t$ , die Ausfallzeitpunkte  $t_1, t_2, \dots, t_n$  wurden aufgezeichnet und es ist  $n = N(t)$ . Es sei  $\omega = \alpha^b$ ,  $\theta = (\omega, \alpha, \beta)$ . Mit (4.13) und (5.5) gilt dann für die Log-Likelihoodfunktion  $l = \ln L(\theta; \tau)$

$$\begin{aligned} l &= \sum_{i=1}^n \left\{ (b-1) \ln [t_i^\beta - (t_{i-1} - v_{i-1})^\beta] + (\beta-1) \ln t_i - \omega [t_i^\beta - (t_{i-1} - v_{i-1})^\beta]^b \right\} \\ &\quad - \omega [t^\beta - (t_n - v_n)^\beta]^b + n(\ln \omega + \ln \beta + \ln b) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Um ML-Parameterschätzungen zu ermittelt, ist die Log-Likelihoodfunktion zu maximieren:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \omega} &= \frac{n}{\omega} - \sum_{i=1}^n [t_i^\beta - (t_{i-1} - v_{i-1})^\beta]^b - [t^\beta - (t_n - v_n)^\beta]^b = 0 \\ \frac{\partial l}{\partial \beta} &= \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{(b-1)(t_i^\beta \ln t_i - (t_{i-1} - v_{i-1})^\beta \ln(t_{i-1} - v_{i-1}))}{t_i^\beta - (t_{i-1} - v_{i-1})^\beta} + \ln t_i \right\} \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left\{ \omega b (t_i^\beta - (t_{i-1} - v_{i-1})^\beta)^{b-1} (t_i^\beta \ln t_i - (t_{i-1} - v_{i-1})^\beta \ln(t_{i-1} - v_{i-1})) \right\} \\ &\quad - \omega b ((t^\beta - (t_n - v_n)^\beta)^{b-1} (t^\beta \ln t - (t_n - v_n)^\beta \ln(t_n - v_n))) = 0 \\ \frac{\partial l}{\partial b} &= \frac{n}{b} + \sum_{i=1}^n \left\{ \ln(t_i^\beta - (t_{i-1} - v_{i-1})^\beta) - \omega (t_i^\beta - (t_{i-1} - v_{i-1})^\beta)^b \ln(t_i^\beta - (t_{i-1} - v_{i-1})^\beta) \right\} \\ &\quad - \omega (t^\beta - (t_n - v_n)^\beta)^b \ln(t^\beta - (t_n - v_n)^\beta) = 0 \end{aligned}$$

Die erste dieser Gleichungen führt zur Schätzung von  $\omega$ :

$$\hat{\omega} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n [t_i^{\hat{\beta}} - (t_{i-1} - v_{i-1})^{\hat{\beta}}]^{\hat{b}} - [t^{\hat{\beta}} - (t_n - v_n)^{\hat{\beta}}]^{\hat{b}}}$$

Die Parameterschätzungen für  $\beta$  und  $b$  erhält man nur durch numerische Verfahren.

**Bemerkungen:**

Der Fall "  $v_n = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ " bedeutet die Parameterschätzung in einem Weibull-Weibull TRP; und bei spezieller Parameterwahl ergibt sich:

- 1) NHPP(Weib( $\alpha, \beta$ )) for  $b = 1$ ,
- 2) RP(Weib( $a, b$ )) for  $\beta = 1$  ( $a = \alpha^{-1}$ ) □.

**B)** Als zweiter Prozesstyp wird ein **Pareto-Weibull TRP** betrachtet. Die folgenden Formeln sind ähnlich zum TIRP-Fall, aber etwas übersichtlicher.

Gemäß (4.12) aus Abschnitt 4.2.6 ergibt sich für die bedingte Intensitätsfunktion

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= b [\Lambda(t) - \Lambda(T_{N(t-)})]^{b-1} \cdot \alpha \frac{\beta}{1 + \beta t} \\ &= \frac{\alpha^b \beta b [\ln(1 + \beta t) - \ln(1 + \beta T_{N(t-)})]^{b-1}}{1 + \beta t} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Mit (5.7) folgt dann die Likelihoodfunktion

$$\begin{aligned} L(t) &= L(t, \theta) = \prod_{i=1}^n \left[ \frac{\alpha^b \beta b}{1 + \beta t_i} [\ln(1 + \beta t_i) - \ln(1 + \beta t_{i-1})]^{b-1} \right] \cdot \\ &\quad \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \alpha^b [\ln(1 + \beta t_i) - \ln(1 + \beta t_{i-1})]^b - \alpha^b [\ln(1 + \beta t) - \ln(1 + \beta t_n)]^b \right\} \end{aligned} \quad (5.8)$$

wobei  $\theta = (\alpha, \beta, b) \in \mathbf{R}_+^3$ .

Die ML-Schätzungen erhält man dann wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(t, \theta)}{\partial \alpha} &= \frac{nb}{\alpha} - b\alpha^{b-1} \sum_{i=1}^n [\ln(1 + \beta t_i) - \ln(1 + \beta t_{i-1})]^b - \\ &\quad b\alpha^{b-1} [\ln(1 + \beta t) - \ln(1 + \beta t_n)]^b = 0 \\ \frac{\partial \ln L(\tau, \theta)}{\partial \beta} &= \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{1 + \beta t_i} + (b-1) \sum_{i=1}^n \frac{\beta \left( \frac{1}{1 + \beta t_i} - \frac{1}{1 + \beta t_{i-1}} \right)}{\ln(1 + \beta t_i) - \ln(1 + \beta t_{i-1})} \\ &\quad - \alpha^b b \beta \sum_{i=1}^n \left[ (\ln(1 + \beta t_i) - \ln(1 + \beta t_{i-1}))^{b-1} \left( \frac{1}{1 + \beta t_i} - \frac{1}{1 + \beta t_{i-1}} \right) \right] \\ &\quad - \alpha^b b \beta \left[ (\ln(1 + \beta t) - \ln(1 + \beta t_n))^{b-1} \left( \frac{1}{1 + \beta t} - \frac{1}{1 + \beta t_n} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L(t, \theta)}{\partial b} &= \frac{n}{b} - \sum_{i=1}^n [\ln(1 + \beta t_i) - \ln(1 + \beta t_{i-1})] \\
&- \alpha^b \ln(\alpha) \left\{ \sum_{i=1}^n [\ln(1 + \beta t_i) - \ln(1 + \beta t_{i-1})]^b + [\ln(1 + \beta t) - \ln(1 + \beta t_n)]^b \right\} \\
&- \alpha^b \sum_{i=1}^n [\ln(1 + \beta t_i) - \ln(1 + \beta t_{i-1})]^b \ln[\ln(1 + \beta t_i) - \ln(1 + \beta t_{i-1})] \\
&+ \alpha^b [\ln(1 + \beta t) - \ln(1 + \beta t_n)]^b \ln[\ln(1 + \beta t) - \ln(1 + \beta t_n)] = 0
\end{aligned}$$

## 5.2 Bayes-Schätzung für TRP und TIRP

Um Bayes-Schätzungen der Parameter  $\theta$  zu gewinnen, ist eine Verlustfunktion  $\mathfrak{L}(\hat{\theta}, \theta)$  und Prior-Information über die Parameter in Form einer Prior-Parameterfunktion (Prior-Dichte) nötig.

Als Verlustfunktion wird eine quadratische Verlustfunktion gewählt, also

$$\mathfrak{L}(\hat{\theta}, \theta) = (\hat{\theta} - \theta)^2.$$

### Bemerkungen:

1. Die Verlustfunktion ist ein entscheidungstheoretisches Werkzeug und wird subjektiv gewählt. Mit  $\mathfrak{L}(\hat{\theta}, \theta)$  wird der Verlust bewertet, der entsteht, wenn der Schätzwert  $\hat{\theta}$  anstelle des wahren Parameters  $\theta$  herangezogen wird.

Häufig nimmt man eine quadratische Verlustfunktion. Es sind aber auch lineare Verlustfunktionen oder eine Linex-Verlustfunktion  $\mathfrak{L}(\hat{\theta}, \theta) = \exp[a(\hat{\theta} - \theta)] - a(\hat{\theta} - \theta) - 1$  ( $a \in \mathbf{R}^1$ ) möglich.

2. Man kann natürlich auch Bayes-Schätzungen für Erneuerungsprozesse RP und inhomogene Poissonprozesse NHPP untersuchen.  $\square$ .

Im Hinblick auf die Parameter  $\beta$  und  $b$  in Prozessen der Klassen TRP und TIRP wird eine nichtinformative Priorfunktion angewendet. Eine solche Priorfunktion wird oftmals dann gewählt, wenn keine genaueren Kenntnisse über die Parameterwerte vorliegen.

Für den Parameter  $\omega = \alpha^b$  wird eine sogenannte konjugierte Prior-Parameterdichte verwendet, und zwar eine Gamma-Verteilungsdichte. Es kommt also die folgende semikonjugierte Prior-Parameterdichte zur Anwendung

$$q(\theta) = \frac{c^d}{\beta b \Gamma(d)} \omega^{d-1} e^{-c\omega} \quad (\theta = (\omega, \beta, b), \omega > 0, \beta > 0, b > 0) \quad (5.9)$$

(die Hyperparameter  $c$  und  $d$  sollten passend ausgewählt werden; etwa so, dass  $\frac{d}{c}$  etwa der erwartete Wert für  $\omega$  ist).

Für die beiden vorangehend betrachteten Prozessbeispiele Weibull-Weibull TIRP und Pareto-Weibull TRP werden jetzt Bayes-Parameterschätzungen untersucht.

**A) Weibull-Weibull TIRP:**

Unter Verwendung der Likelihoodfunktion aus (5.6) kann man die Posterior-Dichtefunktion  $\tilde{q}(\theta|t)$  ermitteln:

$$\begin{aligned}\tilde{q}(\theta|\tau) &= \frac{L(\tau, \theta)q(\theta)}{\int_{\Theta} L(\tau, \theta)q(\theta)d\theta} \\ &= \frac{(b\beta)^{n-1}\Pi(b, \beta)e^{-\gamma\Sigma(b, \beta)}\gamma^{n+d-1}}{\Gamma(n+d) \int \int (b\beta)^{n-1}\Pi(b, \beta)[\Sigma(b, \beta)]^{-(d+n)}db d\beta}\end{aligned}\quad (5.10)$$

wobei

$$\Sigma(b, \beta) = \sum_{i=1}^n [t_i^\beta - ((t_{i-1} - v_{i-1})^\beta)^b] + [\tau^\beta - ((t_n - v_n)^\beta)^b] + c$$

und

$$\Pi(b, \beta) = \prod_{i=1}^n [t_i^\beta - ((t_{i-1} - v_{i-1})^\beta)^{b-1} \cdot t_i^{\beta-1}].$$

Bayessche Parameterschätzer ergeben sich durch Minimierung des Bayes-Risikos:

$$\hat{\theta}_B(\tau) = \operatorname{argmin}_{\hat{\theta}} \int_{\Theta} \mathfrak{L}(\hat{\theta}, \theta)\tilde{q}(\theta|\tau)d\theta = \int_{\Theta} \theta\tilde{q}(\theta|\tau)d\theta$$

Mit der obigen Posterior-Dichtefunktion führt die Minimierung also zu:

$$\begin{aligned}\widehat{\omega}_B(\tau) &= \frac{n+d}{D} \int_0^\infty \int_0^\infty (\beta b)^{n-1}\Pi(b, \beta)[\Sigma(b, \beta)]^{-(n+d+1)}d\beta db \\ \widehat{\beta}_B(\tau) &= \frac{1}{D} \int_0^\infty \int_0^\infty \beta^n b^{n-1}\Pi(b, \beta)[\Sigma(b, \beta)]^{-(n+d)}d\beta db \\ \widehat{b}_B(\tau) &= \frac{1}{D} \int_0^\infty \int_0^\infty \beta^{n-1} b^n \Pi(b, \beta)[\Sigma(b, \beta)]^{-(n+d)}d\beta db\end{aligned}\quad (5.11)$$

wobei  $D = \int_0^\infty \int_0^\infty (\beta b)^n \Pi(b, \beta)[\Sigma(b, \beta)]^{-(n+d)}d\beta db$ .

**B) Pareto-Weibull TRP:**

Die Bayes-Schätzung wird wieder auf der Grundlage einer quadratischen Verlustfunktion und der Prior-Parameterdichte (5.9). hergeleitet.

Aus der Gestalt der Likelihoodfunktion (5.8) wird die Posterior-Dichtefunktion  $\tilde{q}(\theta|\tau)$  gewonnen. Hier hat  $\tilde{q}(\theta|\tau)$  die gleiche Form wie (5.10), allerdings mit anderen Abkürzungen:

$$\Sigma(b, \beta) = \sum_{i=1}^n [\ln(1 + \beta t_i) - \ln(1 + \beta t_{i-1})]^b + [\ln(1 + \beta \tau) - \ln(1 + \beta t_n)]^b + c$$

,

$$\Pi(b, \beta) = \prod_{i=1}^n \frac{[\ln(1 + \beta t_i) - \ln(1 + \beta t_{i-1})]^{b-1}}{1 + \beta t_i}.$$

Durch Minimieren des Bayes-Risikos erhält man die Bayes-Parameterschätzungen. Diese sind von derselben Form wie (5.11).

**Bemerkungen:**

- Bayes-Schätzer hängen von den gewählten Priorbedingungen ab. Die Schätzer haben eine andere Form, wenn eine andere Prior-Parameterdichte verwendet wird. In Abschnitt 5.3 wird eine Modifikation der vorher eingeführten Priorfunktion und die sogenannte nichtinformative Prior-Parameterfunktion betrachtet. Außerdem sei vermerkt, dass die Schätzungen bei Verwendung einer anderen Verlustfunktion ebenfalls eine andere Gestalt bekommen.
- Die Bayessche Posterior-Dichtefunktion erlaubt, sogenannte High-Posterior-Dichte-Intervalle (HPD-Bereiche) zu konstruieren.
- ML-Schätzungen und Bayes-Schätzungen für Parameter eines inhomogenen Gamma-Prozesses, eines weiteren TRP, wurden in Berman [2] untersucht. Bayes-Schätzungen für Weibull TRP sind in Calabria und Pulcini [4] behandelt.  $\square$ .

Numerische Ergebnisse der Parameterschätzung zeigen in speziellen Prozessbeispielen, dass die Werte von Bayes-Schätzungen Maximum-Likelihood-Schätzungen sich wenig unterscheiden, insbesondere dann, wenn der Beobachtungsumfang hinreichend groß ist.

### 5.3 Numerische Ergebnisse bei Punktschätzungen

Es werden die beiden Prozessbeispiele der vorhergehenden Abschnitte betrachtet: Weibull-Weibull TIRP und Pareto-Weibull TRP. Die Ausfallzeiten der Prozesse wurden simuliert (mit "wahre Parameterwerte"). Es wurde angenommen, dass in jeder Iteration 20 unabhängige Prozessrealisierungen abliefen, wobei nach dem zehnten bzw. nach dem fünften Ausfall die Beobachtung abgebrochen wurde.

ML-Schätzwerte aus einigen simulierten Datensätzen (arithmetische Mittelwerte) sind in den Tabellen 1 - 3 enthalten.

Im Fall des Weibull-Weibull TIRP (mit konstanten deterministischen Werten  $A_n = 1/2$ ) ist die Abweichung der Parameter-Schätzwerte vom verwendeten wahren Parameterwert relativ groß; Grund könnte die kleine Anzahl von Ausfällen bzw. die geringe Zahl von Prozesswiederholungen sein.

Parameter	wahrer Wert	Mittel der Schätzwerte	Standardabweichung
$\alpha$	1.2	1.15	0.05
$\beta$	0.8	.79	0.02
b	2.0	2.24	0.08

Tabelle 1: ML-Schätzung für Weibull-Weibull TIRP

Im Fall des Pareto-Weibull TRP liegen die Mittelwerte der Parameterschätzungen nahe an den wirklichen (für die Simulation verwendeten) Werten. Allerdings ergab die Standardabweichung für die Schätzung des Trendparameters  $\beta$  einen größeren Wert, was bedeutet, dass die aus den einzelnen (kleinen) Stichproben ermittelten Einzelwerte stark streuen. Hierbei konnte auch beobachtet werden, dass in den angesetzten Beobachtungszeiten relativ wenig Ausfälle eintraten.

Parameter	wahrer Wert	Mittel der Schätzwerte	Standardabweichung
$\alpha$	1.0	1.00	0.08
$\beta$	2.0	2.06	0.48
b	2.0	2.04	0.16

Tabelle 2: ML-Schätzung  
für Pareto-Weibull TRP

Parameter	wahrer Wert	Mittel der Schätzwerte	Standardabweichung
$\alpha$	1.0	1.00	0.08
$\beta$	0.8	0.82	0.20
b	2.0	2.05	0.17

Tabelle 3: ML-Schätzung  
für Pareto-Weibull TRP

In ähnlicher Weise kann man Schätzungen nach Bayesscher Schätzmethode erhalten. Es wird mit einer quadratischen Verlustfunktion  $\mathcal{L}(\hat{\theta}, \theta) = (\hat{\theta} - \theta)^2$  gearbeitet. Die Werte für die Bayessche Schätzung sind in den Tabellen 4 - 6 aufgeführt.

Zuerst wird das Beispiel Weibull-Weibull TIRP betrachtet; dabei wurde eine semi-konjugierte Prior-Parameterdichte (5.9) verwendet. Mit (5.11) ergibt sich beispielsweise

Parameter	wahrer Wert	Mittel der Schätzwerte	Standardabweichung
$\alpha$	1.3	1.32	0.04
$\beta$	0.6	0.56	0.01
b	2.0	2.01	0.03

Tabelle 4: Bayes-Schätzung  
für Weibull-Weibull TIRP

Ähnliche Schätzwerte erhält man bei anderen (wahren) Parameterwerten. Man bemerkt, dass die Bayesschen Schätzwerte nicht besser als die Maximum-Likelihood-Schätzwerte sind. Andererseits kann man erwarten, dass die Schätzwerte nahe beieinander liegen, wenn die Beobachtungszeit stark vergrößert wird.

In dem zweiten Beispiel Pareto-Weibull TRP schauen wir auf zwei Fälle. Wir wollen die Unterschiede zwischen dem Fall einer nichtinformativen Parameterfunktion (wenn keine Prior-Information vorhanden ist) und einer informativen Parameterfunktion (Prior-Information

existiert) untersuchen. Die nichtinformative Parameterfunktion sei

$$p(\alpha, \beta, b) = \frac{1}{\alpha\beta b}$$

Schätzwerte (für spezielle wahre Parameterwerte) sind in Tabelle 5 enthalten.

Parameter	wahrer Wert	Mittel der Schätzwerte	Standardabweichung
$\alpha$	1.0	1.01	0.08
$\beta$	2.0	2.12	0.51
b	2.0	2.01	0.16

Tabelle 5: Bayes-Schätzung  
für Pareto-Weibull TRP

Wenn eine gewisse Priorkenntnis über die Parameter vorliegt, kann auch möglicherweise die Schätzung der Parameterwerte durch Verwendung einer informativen Prior-Parameterdichte verbessert werden.

So wird im zweiten Fall eine (gemischte) Prior-Parameterdichtefunktion (5.9) angewendet. Hier wird jedoch - im Gegensatz zu den Formeln von Abschnitt 5.2 - eine Gamma-Verteilungsdichte für alle drei Parameter benutzt. Für die Gamma-Verteilungsdichte sind Hyperparameter so gewählt, dass die erwarteten Parameterwerte gleich den in der Simulation benutzten "wahren" Werten sind und eine Varianz von 10 vorliegt. Schätzwerte nach diesem Vorgehen sind in Tabelle 6 angegeben.

Parameter	wahrer Wert	Mittel der Schätzwerte	Standardabweichung
$\alpha$	1.0	1.02	0.08
$\beta$	2.0	2.02	0.46
b	2.0	2.00	0.16

Table 6: Bayes-Schätzung  
für Pareto-Weibull TRP

Im zweiten Fall hätte man mit einer Verbesserung der Schätzwerte rechnen können. Aber nur die Parameter  $\beta$  und  $b$  liegen näher am wahren Wert der Parameter (übrigens wurden ähnliche Effekte auch in weiteren Berechnungen und für andere wahren Parameterwerte beobachtet).

Die voranstehenden numerischen Untersuchungen wurden mit MAPLE- und SAS-Prozeduren (NLMIXED für die ML-Schätzung, MCMC für die Bayes-Schätzung) ausgeführt.

## 5.4 Vorhersage in reparierbaren Systemen

Allgemeine Betrachtungen zu Vorhersageproblemen wurden in Barndorff-Nielsen und Cox (1996, [5]), in Smith (1999) sowie in Lawless und Fredette (2005, [34]) vorgestellt.

Für inhomogenen Poissonprozesse, genauer für einen Weibullprozess, wurden schon von Engelhard und Bain (1978, [18]) exakte Vorhersageintervalle für eine  $k$ -te zukünftige Ausfallzeit und auf der Grundlage von Maximum-Likelihood-Schätzungen hergeleitet. In einer Arbeit von Calabria und Pulcini (1996, [14]) wurde die Vorhersage von Ausfallzeiten  $T_{n+m}$  ( $m \geq 1$ ) eines Weibull-gamma TRP, dessen letzte Beobachtung bei  $T_n$  lag, studiert. Die Vorhersage bei einem Weibullprozess mit unvollständiger Beobachtung ist in der Arbeit von Yu und anderen (2008, [54]) betrachtet.

Im Weiteren geht es nun um Vorhersageuntersuchungen bei Prozessen vom Typ TRP bzw. TIRP.

### 5.4.1 Punktschätzung von Vorhersagewerten

Die Untersuchungen dieses Abschnittes beschäftigen sich zunächst mit Punktschätzungen bei TRP und allgemeineren TIRP. Es wird damit begonnen, bei TRP mit unbekannter Erneuerungsverteilung für zukünftige Ausfallzeitpunkte Vorhersagen, also punktweise Vorhersagen zu konstruieren. Wenn die Erneuerungsverteilung unbekannt ist, dann ist auch die Likelihoodfunktion des TRP unbekannt und ML-Methoden zur Parameterschätzung und zur Vorhersage können nicht genutzt werden.

Wir betrachten jetzt einen  $TRP(F, \lambda(\cdot))$  mit Trendfunktion  $\lambda(t)$  und Erneuerungsverteilung  $F$ . Wenn vorausgesetzt wird, dass die Erneuerungsverteilung den Erwartungswert 1 hat, dann gilt

$$E(W_i) = E(\Lambda(T_i) - \Lambda(T_{i-1})) = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Diese Eigenschaft führt unmittelbar zur Vorhersage des zukünftigen Zeitpunktes  $T_{n+1}$  (vgl. auch Jokiel-Rokita und Magiera (2012,[29])):

$$\widehat{T}_{n+1} = \Lambda^{-1}(1 + \Lambda(T_n)) \quad (5.12)$$

Wir bemerken, dass die Vorhersage (5.12) für ein TRP-Modell angewendet werden kann, ungeachtet dessen, ob die Erneuerungsverteilung bekannt oder unbekannt ist.

Für den Fall, dass die Erneuerungsverteilung  $F$  bekannt ist, ist auch die bedingte Dichte  $f_{T_{n+1}|T_n=t_n}(t)$  bekannt, und die Vorhersage des zukünftigen Zeitpunktes  $T_{n+1}$  eines  $TRP(F, \lambda(\cdot))$  kann wie folgt dargestellt werden:

$$\widetilde{T}_{n+1} = \int_{t_n}^{\infty} t f_{T_{n+1}|T_n=t_n}(t) dt \quad (5.13)$$

wobei

$$f_{T_{n+1}|T_n=t_n}(t) = z(\Lambda(t) - \Lambda(t_n)) \lambda(t) \exp \left\{ - \int_0^{\Lambda(t) - \Lambda(t_n)} z(u) du \right\}$$

die bedingte Dichte der Vorhersage  $T_{n+1}$  bei gegebenen  $T_n = t_n$  und  $z(\cdot)$  die Ausfallrate zu  $F$  sind. Der Ausdruck (5.13) ist also der bedingte Erwartungswert  $E(T_{n+1}|T_n = t_n)$ .

Eine andere Möglichkeit zur Ermittlung der Vorhersage des zukünftigen Zeitpunktes in einem  $TRP(F, \lambda(\cdot))$  ergibt sich gemäß des Artikels von Franz, Jokiel-Rokita und Magiera (2013,[24]) wie folgt:

**Satz 5.1:** Für einen  $TRP(F, \lambda(\cdot))$  seien  $T_1, T_2, \dots$  die Ausfallzeitpunkte,  $\gamma(t)$  die bedingte Intensitätsfunktion und  $\Gamma(t) = \int_0^t \gamma(u) du$  die kumulative Intensitätsfunktion.

Dann bildet die Folge der Ereigniszeitpunkte  $(\Gamma(T_1), \Gamma(T_2), \dots)$  einen homogenen Poissonprozess HPP(1) mit Erwartungswertparameter 1.

Eine Vorhersage von zukünftigen Ausfallzeitpunkten  $T_{n+1}^i$  bei gegebenen  $T_n$ ,  $i = 1, \dots, m$  kann erzeugt werden mit

$$T_{n+1}^i = \Gamma^{-1}(Y_i + \Gamma(T_n)), \quad (5.14)$$

wobei  $Y_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  Zufallswerte aus einer Exponentialverteilung  $\mathcal{E}(1)$  sind. Die zukünftige Ausfallzeit  $T_{n+1}$  bei gegebenen  $T_n$  wird durch

$$\widehat{T}_{n+1} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m T_{n+1}^i$$

vorhergesagt; und das ist eine Approximation für (5.13). □

Wir werden nun punktweise Vorhersagen im Beispiel eines Weibull-TRP, bezeichnet mit  $WPLP(\alpha, \beta, \gamma)$  (Weibull-Power-Law-Prozess) vorstellen.

Für die Intensitätsfunktion gilt bekanntlich

$$\lambda(t; \alpha, \beta) = \alpha \cdot \beta t^{\beta-1}, \quad \Lambda(t; \alpha, \beta) = \alpha \cdot t^\beta \quad (\alpha > 0, \beta > 0),$$

und die Erneuerungsfunktion und zugehörige Hazardfunktion seien

$$F(x) = F(x; \gamma) = 1 - \exp[-(\Gamma(1 + \frac{1}{\gamma})x)^\gamma], \quad \gamma > 0, \quad z(x) = (\Gamma(1 + \frac{1}{\gamma}))^\gamma \gamma x^{\gamma-1}.$$

( $\gamma$  ist also hier ein Parameter,  $\Gamma$  bedeutet die Gammafunktion.)

Für einen  $WPLP(\alpha, \beta, \gamma)$  erhält man die bedingte Dichte und die bedingte Verteilungsfunktion wie folgt:

$$f_{T_{n+1}|T_n=t_n}(t) = \varphi \beta \gamma (t^\beta - t_n^\beta)^{\gamma-1} t^{\beta-1} \exp \{ -\varphi (t^\beta - t_n^\beta)^\gamma \}$$

und

$$F_{T_{n+1}|T_n=t_n}(t) = 1 - \exp \{ -\varphi (t^\beta - t_n^\beta)^\gamma \},$$

wobei die Abkürzung

$$\varphi = \varphi(\alpha, \gamma) = [\alpha \Gamma(1 + \frac{1}{\gamma})]^\gamma \quad (5.15)$$

verwendet wird. Übrigens, für  $\varphi = \alpha$  betrachtet man einen (einfachen) Weibullprozess. Die Vorhersage ist nun in folgender Aussage enthalten (vgl. auch (5.14)):

**Satz 5.2:** Für einen  $WPLP(\alpha, \beta, \gamma)$  kann die bedingte zukünftige Ausfallzeit  $T_{n+1}$  bei gegebenen  $T_n$  vorhergesagt werden durch

$$\widehat{T}_{n+1} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m T_{n+1}^i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left( \frac{Y_i^{\frac{1}{\gamma}}}{\alpha \Gamma(1 + \frac{1}{\gamma})} + T_n^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (5.16)$$

wobei  $Y_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  Zufallswerte aus einer Exponentialverteilung  $\mathcal{E}(1)$  sind.  $\square$

Wenn die Parameter  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  des  $WPLP(\alpha, \beta, \gamma)$ -Modells unbekannt sind, so können diese in Satz 5.2 auch durch Parameterschätzungen, etwa durch ML-Schätzwerte ersetzt werden.

Für die Parameterschätzung von  $(\alpha, \beta, \gamma)$  wurde in Jokiel-Rokita und Magiera (2012,[29]) sowie in Franz, Jokiel-Rokita und Magiera (2013,[24]) die Minimum-Quadrat-Methode unter Nebenbedingung (CLS, constrained least squares) verwendet. Dabei wird die Quadratsumme definiert:

$$S_{LS}^2(\vartheta) = \sum_{i=1}^n (W_i - 1)^2 = \sum_{i=1}^n [\Lambda(t_i; \vartheta) - \Lambda(t_{i-1}; \vartheta) - 1]^2,$$

wobei  $t_i$  Realisierungen von  $T_i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) sind und  $\Lambda(t_0) = 0$  gilt. Schätzungen der Parameter erhält man aus der Extremwertaufgabe

$$\widehat{\vartheta}_{CLS} = \arg \min_{\vartheta \in C} S_{CLS}^2(\vartheta)$$

mit der Nebenbedingung  $C = \{\vartheta : \Lambda(t_n; \vartheta) = n\}$ .

Für einen Weibull- $TRP(F, \lambda(\cdot))$  mit  $\lambda(t) = \alpha \beta t^{\beta-1}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , und für den die Erneuerungsfunktion  $F$  nicht spezifiziert ist, gilt nach Jokiel-Rokita und Magiera (2012,[29])

**Satz 5.3:** Im Weibull- $TRP(F, \lambda(\cdot))$  und mit den Ausfallzeitpunkten  $t_1, \dots, t_n$  sind die Schätzungen für  $\alpha$  und  $\beta$

$$\widehat{\alpha}_{CLS} = \frac{n}{t_n^{\widehat{\beta}_{CLS}}}, \quad \widehat{\beta}_{CLS} = \arg \min S_{CLS}^2(\beta), \quad (5.17)$$

$$S_{CLS}^2(\beta) = \frac{1}{t_n^{2\beta}} \sum_{i=1}^n (t_i^\beta - t_{i-1}^\beta)^2. \quad (5.18)$$

Die Vorhersage für den nächsten Ausfallzeitpunkt ergibt sich zu

$$\widehat{T}_{n+1}^{CLS} = \left( \widehat{\alpha}_{CLS}^{-1} + T_n^{\widehat{\beta}_{CLS}} \right). \quad (5.19)$$

$\square$



### 5.4.2 Intervallschätzung von Vorhersagewerten

Wir beschränken uns auf einen  $TRP(F, \lambda(\cdot))$  mit Trendfunktion  $\lambda(t)$  und Erneuerungsverteilung  $F$ . Die transformierten Funktionszeiten des Systems, also  $W_i = \Lambda(T_i) - \Lambda(T_{i-1})$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) haben die Verteilungsfunktion  $F(t)$ . Ein Vorhersageintervall kann dann aus

$$P(q_F(\varepsilon_1) \leq W_{n+1} \leq q_F(1 - \varepsilon_2)) = P(q_F(\varepsilon_1) \leq \Lambda(T_{n+1}) - \Lambda(T_n) \leq q_F(1 - \varepsilon_2)) = 1 - \varepsilon$$

bestimmt werden, wobei  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \in (0, 1)$  und  $q_F(\varepsilon)$  ein Quantil der Ordnung  $\varepsilon$  der Verteilung  $F$  darstellt.

**Satz 5.4:** In einem  $TRP(F, \lambda(\cdot))$  ist das Vorhersageintervall  $(T_L, T_U)$  für die zukünftige Ausfallzeit  $T_{n+1}$  gegeben durch

$$T_L = \Lambda^{-1}(\Lambda(T_n) + q_F(\varepsilon_1)), \quad T_U = \Lambda^{-1}(\Lambda(T_n) + q_F(1 - \varepsilon_2))$$

□

Speziell gilt für einen Weibull-TRP, wenn also  $\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$ , ( $\alpha > 0, \beta > 0$ )

$$P\left(\left(T_n^\beta + \frac{1}{\alpha} q_F(\varepsilon_1)\right)^{\frac{1}{\beta}} \leq T_{n+1} \leq \left(T_n^\beta + \frac{1}{\alpha} q_F(1 - \varepsilon_2)\right)^{\frac{1}{\beta}}\right) = 1 - \varepsilon.$$

Und wenn  $F$  die Weibullverteilung  $We(\gamma, \frac{1}{\Gamma(1+\frac{1}{\gamma})})$  darstellt, dann sind  $T_L$  und  $T_U$  definiert durch

$$T_L = \left[ T_n^\beta + \left( \frac{1}{\varphi} \ln \frac{1}{1 - \varepsilon_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right]^{\frac{1}{\beta}}, \quad T_U = \left[ T_n^\beta + \left( \frac{1}{\varphi} \ln \frac{1}{\varepsilon_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right]^{\frac{1}{\beta}},$$

wobei  $\varphi = [\alpha\Gamma(1 + \frac{1}{\gamma})]^\gamma$ .

Im Fall, dass die Erneuerungsverteilung unbekannt ist, kann man auch mit Schätzungen arbeiten.

### 5.4.3 Numerische Ergebnisse zur Schätzung von $T_{n+1}$

Wir wollen noch eine Simulationsstudie für Schätzwerte des zukünftigen Ausfallwertes  $T_{n+1}$  bei einem Weibull-TRP angeben. Diese Studie ist der Arbeit von Franz, Joki-Rokita und Magiera (2013,[24]) entnommen und nach einem Computerprogramm auf Basis von MATHEMATICA 8.04 erhalten. Bei der Simulation werden Ausfallwerte gemäß

$$T_i = \left[ T_{i-1}^\beta + \frac{1}{\alpha\Gamma(1 + \frac{1}{\gamma})} \left( \ln \frac{1}{1 - U_i} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right]^{\frac{1}{\beta}}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

$T_0 = 0$  und mit Zufallszahlen  $U_i$  aus einer Gleichverteilung  $\mathcal{U}(0, 1)$  generiert.

In Tabelle 7 werden Schätzwerte  $\widehat{T}_{n+1}$  gemäß Satz 5.2 sowie solche angegeben, für die Parameter mit der ML-Methode geschätzt wurden. Darüber hinaus sind Schätzwerte  $\widehat{T}_{n+1}^{CLS}$ , ermittelt, für die Parameter nach der voranstehend in Satz 5.3 genannten Minimum-Quadrat-Methode geschätzt werden.

No.	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$T_n$	$T_{n+1}$	$\tilde{T}_{n+1}$	$\hat{T}_{n+1}^{ML}$	$\tilde{T}_{n+1}^{ML}$	$\hat{T}_{n+1}^{CLS}$
1	20	0.8	0.8	7.5423	7.6333	7.6361	7.6341	7.6346	7.6395
2	15	1	0.8	6.6837	6.7412	6.7502	6.7493	6.7491	6.7546
3	5	2	0.8	4.4539	4.4746	4.4763	4.4757	4.4756	4.4766
4	1	3	0.8	4.6414	4.6599	4.6567	4.6570	4.6569	4.6577
5	0.5	4	0.8	3.7517	3.7615	3.7611	3.7612	3.7611	3.7615
6	20	0.8	1	7.4586	7.5558	7.5522	7.5521	7.5524	7.5552
7	5	2	1	4.4724	4.4981	4.4947	4.4946	4.4946	4.4953
8	1	3	1	4.6490	4.6646	4.6644	4.6650	4.6649	4.6648
9	0.5	4	1	3.7658	3.7755	3.7752	3.7755	3.7755	3.7755
10	20	1	1	4.9506	4.9988	5.0006	4.9998	4.9998	5.0019
11	5	1	1	20.0940	20.3100	20.2941	20.2936	20.2942	20.2988
12	0.5	1	1	202.4071	204.4756	204.4057	204.4796	204.4779	204.4725
13	20	0.8	2	7.5203	7.6171	7.6140	7.6153	7.6153	7.6140
14	15	1	2	6.6851	6.7508	6.7518	6.7522	6.7522	6.7514
15	5	2	2	4.4549	4.4777	4.4773	4.4773	4.4773	4.4770
16	1	3	2	4.6473	4.6633	4.6627	4.6629	4.6630	4.6627
17	0.5	4	2	3.7580	3.7673	3.7674	3.7675	3.7675	3.7673
18	20	0.8	4	7.4573	7.5497	7.5507	7.5519	7.5520	7.5497
19	15	1	4	6.6542	6.7220	6.7208	6.7215	6.7214	6.7199
20	5	2	4	4.4637	4.4857	4.4861	4.4863	4.4863	4.4858
21	1	3	4	4.6394	4.6548	4.6548	4.6549	4.6549	4.6546
22	0.5	4	4	3.7609	3.7704	3.7703	3.7704	3.7704	3.7702

Tabelle 7: Vorhersagen der Ausfallwerte  $T_{n+1}$

Die Tabelle 8 gibt Vorhersageintervalle  $(T_L, T_U)$  und auch  $(\hat{T}_L^{ML}, \hat{T}_U^{ML})$ , bei denen ML-Schätzungen für die Prozessparameter verwendet werden, an.

No.	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$T_L$	$T_U$	$\mathcal{L}$	$\hat{T}_L^{ML}$	$\hat{T}_U^{ML}$	$\hat{\mathcal{L}}^{ML}$	C	$\hat{C}^{ML}$
1	20	0.8	0.8	7.5431	7.9663	0.4232	7.5434	7.9455	0.4021	97.0	97.0
2	15	1	0.8	6.6843	6.9845	0.3002	6.6844	6.9735	0.2891	95.0	94.5
3	5	2	0.8	4.4541	4.5545	0.1004	4.4541	4.5498	0.0956	96.5	95.0
4	1	3	0.8	4.6415	4.7105	0.0690	4.6415	4.7104	0.0688	92.5	93.5
5	0.5	4	0.8	3.7518	3.7939	0.0422	3.7518	3.7932	0.0414	92.5	93.0
6	20	0.8	1	7.4609	7.8043	0.3434	7.4615	7.7926	0.3311	92.0	91.5
7	5	2	1	4.4729	4.5543	0.0814	4.4730	4.5516	0.0786	92.5	91.5
8	1	3	1	4.6494	4.7054	0.0560	4.6495	4.7063	0.0568	95.0	95.0
9	0.5	4	1	3.7661	3.8000	0.0340	3.7661	3.8007	0.0345	98.0	96.0
10	20	1	1	4.9518	5.1350	0.1832	4.9520	5.1277	0.1757	95.5	94.5
11	5	1	1	20.0990	20.8318	0.7327	20.1001	20.8091	0.7091	95.5	92.0
12	0.5	1	1	202.4578	209.7849	7.3271	202.4621	210.0582	7.5961	94.5	94.5
13	20	0.8	2	7.5371	7.7236	0.1865	7.5396	7.7184	0.1788	95.5	95.0
14	15	1	2	6.6971	6.8296	0.1325	6.6985	6.8257	0.1271	94.0	92.5
15	5	2	2	4.4589	4.5033	0.0444	4.4592	4.5025	0.0432	97.5	97.0
16	1	3	2	4.6501	4.6806	0.0305	4.6502	4.6807	0.0305	95.5	95.5
17	0.5	4	2	3.7597	3.7783	0.0186	3.7597	3.7786	0.0188	96.5	95.5
18	20	0.8	4	7.4984	7.6003	0.1020	7.5024	7.5970	0.0946	96.0	94.5
19	15	1	4	6.6835	6.7561	0.0726	6.6860	6.7539	0.0678	93.0	92.0
20	5	2	4	4.4736	4.4978	0.0243	4.4742	4.4974	0.0232	94.0	92.5
21	1	3	4	4.6462	4.6629	0.0168	4.6463	4.6629	0.0165	96.5	95.0
22	0.5	4	4	3.7650	3.7752	0.0102	3.7651	3.7753	0.0102	95.5	95.0

Tabelle 8: Vorhersageintervalle für Ausfallwerte  $T_{n+1}$

### 5.4.4 Bayessche Schätzintervalle für Vorhersagewerte

Es werden Vorhersageintervalle in Form von Bayesschen Intervallen konstruiert. Für die untersuchten Prozesse ist die Kenntnis der Likelihoodfunktion  $L(t, \theta)$  sowie die Angabe einer Prior-Parameterdichte  $q(\theta)$  erforderlich.

Im Folgenden wird für einen Weibull-Weibull TIRP sowie für einen Pareto-Weibull TRP jeweils ein Bayessches Vorhersageintervall für den unbekanntem zukünftigen Zeitpunkt  $T_{n+1}$  konstruiert, wenn der Prozess bis  $T_n$  beobachtet wurde:

Es wird die bedingte Dichtefunktion für  $T_{n+1}$  unter der Bedingung  $T_n = s$  ( $t \geq s$ ) und  $V_n = v$  benötigt (vgl. auch (5.13):

Fall Weibull-Weibull TIRP:

$$\begin{aligned} f_{T_{n+1}|T_n=s, V_n=v}(t) &= z(\Lambda(t) - \Lambda(s-v))\lambda(t) \exp \left\{ - \int_0^{\Lambda(t)-\Lambda(s-v)} z(u) du \right\} \\ &= \alpha^b \beta b [(t)^\beta - (s-v)^\beta]^{b-1} (t)^{\beta-1} \exp \left\{ -\alpha^b [(t)^\beta - (s-v)^\beta]^b \right\} \end{aligned}$$

Fall Pareto-Weibull TRP:

$$\begin{aligned} f_{T_{n+1}|T_n=s}(t) &= z(\Lambda(t) - \Lambda(s))\lambda(t) \exp \left\{ - \int_0^{\Lambda(t)-\Lambda(s)} z(u) du \right\} \\ &= \alpha^b \beta b \frac{[\ln(1 + \beta t) - \ln(1 + \beta s)]^{b-1}}{1 + \beta t} \exp \left\{ -\alpha^b [\ln(1 + \beta t) - \ln(1 + \beta s)]^b \right\} \end{aligned}$$

In beiden Fällen wird die gleiche Prior-Parameterdichte (5.9) verwendet. Dabei ergibt sich die Posterior-Parameterdichte (vgl. (5.10))

$$\tilde{q}(\theta|\tau) = \frac{(b\beta)^{n-1} \Pi(b, \beta) e^{-\omega \Sigma(b, \beta)} \omega^{n+d-1}}{\Gamma(n+d) \int_0^\infty \int_0^\infty (b\beta)^{n-1} \Pi(b, \beta) \Sigma(b, \beta)^{-(d+n)} db d\beta}$$

wobei  $\omega = \alpha^b$ .

Dann ist die Bayessche Vorhersagedichte für den zukünftigen Zeitpunkt  $T_{n+1}$ :

$$g_{T_{n+1}}(t) = \int_{\Theta} f_{T_{n+1}|T_n=s}(t) \tilde{q}(\theta|\tau) d\theta.$$

$\Theta$  bedeutet den Bereich der Parameter  $\theta = (\alpha, \beta, b)$ .

Ein Vorhersageintervall  $I_{pred} = [t_*, t^*]$  erhält man, wenn folgende Gleichungen gelöst werden:

$$\begin{aligned} \int_s^{t_*} g_{T_{n+1}}(t) dt &= \varepsilon_1, \\ \int_s^{t^*} g_{T_{n+1}}(t) dt &= 1 - \varepsilon_2 \end{aligned}$$

wobei  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$  und  $1 - \varepsilon$  die gewählte Überdeckungswahrscheinlichkeit des Schätzintervalls darstellen ( $\varepsilon \in (0, 1)$ ).

# Kapitel 6

## Spezielle Reparatursituationen

In diesem Kapitel werden Modifikationen zu den vorangehend beschriebenen Reparaturmodellen für Zuverlässigkeitssysteme beschrieben. Besondere Bedeutung kommt dabei mehrdimensionalen Punkt- und Zählprozessen zu. Man kann unterschiedliche Phasen eines Ausfall-Reparatur-Prozesses durch gesonderte Prozesskomponenten untersuchen.

Die Gesamtlebenszeit technischer oder auch biologischer Systeme wird oftmals von einer zufälligen Zensierungszeit beendet. Für die Untersuchung solcher Situationen können mehrdimensionale Punktprozesse herangezogen werden.

### 6.1 Zufällige Zensierung in Reparaturmodellen

Wir betrachten ein reparierbares System, bei dem Funktionszeiten entweder durch normalen Ausfall oder durch eine zufällige Zensierungszeit beendet werden. Zufällige Reparaturzeiten, die eine nichtvernachlässigbare Größe haben, können berücksichtigt werden. Dabei ist sogar möglich, unterschiedliche Reparaturarten zu modellieren.

Andernfalls treten Zensierungssituationen in verschiedenen biologischen und medizinischen Bereichen auf. Dort spielt die Survivalanalyse eine große Rolle. Beispielsweise kann als Zensierung in der medizinischen Behandlung eines Patienten ein operativer Eingriff als solcher interpretiert werden kann. Medizinische Modelle beinhalten oftmals eine Untersuchung der durch Zensierung modifizierten Überlebenswahrscheinlichkeiten.

Das System ist charakterisiert durch eine alternierende Folge von (auch zensierten) Funktionszeiten und Reparaturzeiten. Das Modell verwendet Zählprozesse, durch die die Anzahlen von Normalausfällen, von Zensierungsausfällen und von Reparaturenenden (evtl. bei unterschiedlicher Reparaturart) für einen Beobachtungszeitraum  $[0, t]$  aufgezeichnet werden. Zu den Zählprozessen gehören eine Ausfallintensität, eine Zensierungsintensität und Reparaturintensitäten. Unterschiedliche Reparaturarten kann man durch eine geeignete Virtual-Age-Funktion gestalten. Ausfallzeiten, Zensierungszeiten (wobei das Minimum von beiden zum Ausfall führt) und Reparaturzeiten werden als stochastisch unabhängig vorausgesetzt.

Ein allgemeines Modell basiert auf einem markierten Punktprozess (vgl. auch Kapitel 4)

$\{(T_n, \xi_n), n \geq 1\}$  auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $[\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}]$  und mit  $T_0 = 0$ .  $T_n$  sind die (zufälligen) Ereigniszeitpunkte, an denen entweder ein Ausfall eintritt oder eine Reparatur beendet wird; beobachtet werden die konkreten Zeiten  $t_1, t_2, \dots$

Die zweite Komponente  $\xi_n$  sind Marken, die eine Zensierung oder eine von  $r$  Reparaturarten angeben ( $i \in \{2, \dots, r+1\}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots\}$ ).

$$\xi_n = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ 1 & n = 2k - 1 \quad k - te \text{ Fktz. zens.} \\ i & n = 2k - 1 \quad k - te \text{ Fktz. norm. } i - te \text{ Rep.art.} \end{cases}$$

Nun können Zählprozesse alternativ zum Punktprozess eingeführt werden:

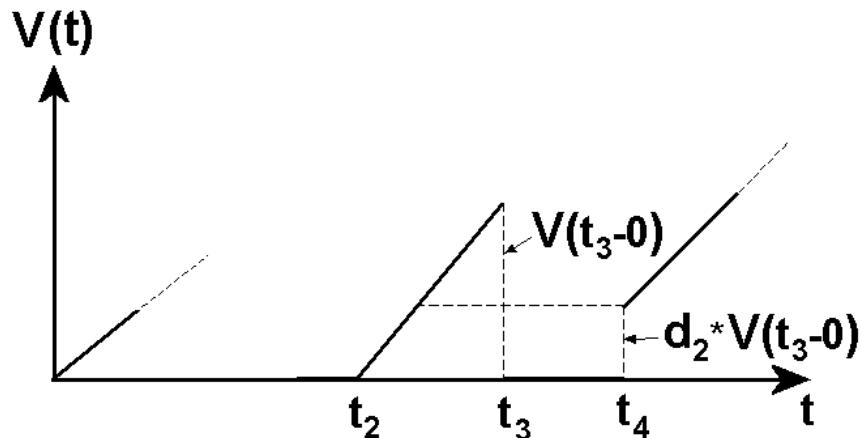
$$\begin{aligned} N_0(t) &= \Sigma \mathbf{1}\{T_{2k-1} \leq t\} \mathbf{1}\{\xi_{2k-1} \neq 1\} && \text{Norm.ausf.} \\ N_1(t) &= \Sigma \mathbf{1}\{T_{2k-1} \leq t\} \mathbf{1}\{\xi_{2k-1} = 1\} && \text{Zens.ausf.} \\ N_i(t) &= \Sigma \mathbf{1}\{T_{2k} \leq t\} \mathbf{1}\{\xi_{2k-1} = i\} && \text{Rep.typ } i. \end{aligned}$$

Hier bedeutet  $\mathbf{1}\{A\}$  eine Indikatorvariable mit  $\mathbf{1}\{A\} = 1$ , wenn  $A$  zutrifft, andernfalls gilt  $\mathbf{1}\{A\} = 0$ .

Bevor wir Intensitäten zu den Zählprozessen einführen, müssten Zeitreduzierungen eingeführt werden. Speziell soll die Virtual-Age-Funktion für die Zählfunktion der Normalausfälle angegeben werden:

$$V_0(t) := V(t) = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ t - t_{2k-2} + V(2k-2) & t_{2k-2} < t < t_{2k-1} \\ 0 & t_{2k-1} \leq t < t_{2k} \\ d(\xi_{2k-1})V(t_{2k-1} - 0) & t = 2k \end{cases}$$

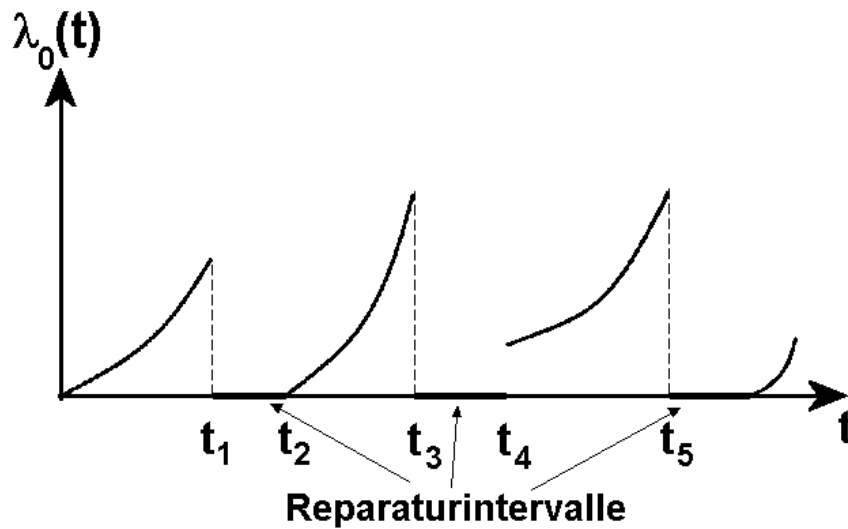
Der Faktor  $d(\xi_{2k-1}) \in [0, 1]$  beschreibt den Effekt der  $k$ -ten Reparaturart, beispielsweise  $d(1) = 0$  bei Perfektreparatur, zum Beispiel nach einer Zensierung.



Es sei vorausgesetzt, dass die Zeitreduzierung für die Zensierung  $V_1(t) = t - t_{2k-2}$ ,  $t > t_{2k-2}$ , und für Reparaturaktionen (eine Reparaturart)  $V_2(t) = t - t_{2k-1}$ ,  $t > t_{2k-1}$  sind.

Weiterhin nehmen wir an, dass die Intensitäten die Form  $\lambda_j(t, \alpha_j, \beta_j) = \alpha_j \mu_j(V_j(t), \beta_j)$  besitzen. Das ist der Fall ist bei Weibullprozessen, Paretoprozessen oder Loglinearprozessen

bzw. den entsprechenden unvollständigen Erneuerungsprozessen.



Dann hat die Likelihoodfunktion die Gestalt

$$L(\theta, t) = \exp \left\{ \sum_{j=0}^2 [(\ln \alpha_j) N_j(t) + M_j(\beta_j, t) - \alpha_j \int_0^t \mu_j(V_j(u, \beta_j) du) \right\}. \quad (6.1)$$

Dabei gilt

$$M_0(\beta_0, t) = \sum_{k=1}^n \ln \mu_0(V_0(t_{2k-1} - 0), \beta_0) \mathbf{1}\{\xi_{2k-1} \neq 1\},$$

$$M_1(\beta_1, t) = \sum_{k=1}^n \ln \mu_1(V_1(t_{2k-1} - 0), \beta_1) \mathbf{1}\{\xi_{2k-1} = 1\},$$

$$M_2(\beta_2, t) = \sum_{k=1}^n \ln \mu_2(V_2(t_{2k} - 0), \beta_2)$$

Besonders interessant beim Studium der Zählprozesse sind außer der Likelihoodfunktion auch Sprungwahrscheinlichkeiten und die Verteilung der Funktionszeiten im System.

**Satz 6.1:** Es sei  $U_k = T_{2k-1} - T_{2k-2}$  die (zufällige) Funktionszeit zwischen der  $(k-1)$ -ten und der  $k$ -ten Reparatur. Dann gilt für  $t^* \in [0, t_{2k-1} - t_{2k-2})$

$$\begin{aligned} P_\theta(U_k > s + t^* | U_k > t^*) &= \\ &= \exp \left\{ - \int_{t^*}^{s+t^*} [\alpha_0 \mu_0(u + V_0(t_{2k-2}), \beta_0) + \alpha_1 \mu_1(u + t_{2k-3} - t_{2k-4}, \beta_1)] du \right\} \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$P_\theta(\xi_{2k-1} = 1 | T_{2k-1} = t) = \frac{\alpha_1 \mu_1(V_1(t), \beta_1)}{\alpha_0 \mu_0(V_0(t), \beta_0) + \alpha_1 \mu_1(V_1(t), \beta_1)} \quad (6.3)$$

*Beweis:* Unter Verwendung von Lemma 2.1 aus Pruscha (1984,[55]) erhält man

$$P_\theta(U_k > s) = \exp \left\{ - \int_{t_{2k-2}}^{s+t_{2k-2}} [\lambda_0(\theta_0, V_0(u)) + \lambda_1(\theta_1, V_1(u))] du \right\}$$

und wegen  $P_\theta(U_k > s + t^* | U_k > t^*) = P_\theta(U_k > s + t^*) [P_\theta(U_k > t^*)]^{-1}$  folgt (6.2) unmittelbar. Für festes  $T_{2k-1} = t$  erhält man (6.3) aus  $P_\theta(\xi_{2k-1} = 1) = \lambda_1(\theta_1, t) [\lambda_0(\theta_0, t) + \lambda_1(\theta_1, t)]^{-1}$ .  $\square$

Aus der Likelihoodfunktion (6.1) gewinnt man die ML-Schätzer für die Parameter  $\alpha_j$ ,  $\beta_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ):

$$\widehat{\alpha}_j(t) = \frac{N_j(t)}{\int_0^t \mu_j(V_j(t), \widehat{\beta}_j(t))} \quad \frac{d}{d\beta_j} \mu_j(V_j(t), \widehat{\beta}_j(t)) = \frac{N_j(t) \frac{d}{d\beta_j} \int_0^t \mu_j(V_j(t), \widehat{\beta}_j(t))}{\int_0^t \mu_j(V_j(t), \widehat{\beta}_j(t))} \quad (6.4)$$

Der Ausdruck  $\frac{d}{d\beta_j} Y(t, \beta_j)$  bedeutet die erste Ableitung von  $Y(t, \beta_j)$  nach dem Parameter; in (6.4) wird die zufällige Form der Schätzung angegeben. Die zweite Gleichung in (6.4) kann wiederum nur numerisch nach dem Parameterschätzer aufgelöst werden. Es sei noch darauf hingewiesen, dass die ML-Parameterschätzer konsistent und asymptotisch normalverteilt sind.

### Koziol-Green-Modell

Ein Koziol-Green-Modell der Zensierung ist dadurch gekennzeichnet, dass Ausfall- und Zensierungsintensität zueinander proportional sind. Für verschiedene Zensierungsformen der Praxis ist diese Vorgehensweise durchaus gerechtfertigt. Wir werden eine einfache Modellvariante betrachten, bei der Reparaturzeiten (und damit Reparaturanzahlen) vernachlässigt werden (d.h. es gibt nur noch Zeitpunkte für Funktionsenden). Die Zensierungsintensität hat die Darstellung

$$\lambda_1(\theta_1, t) = \delta \lambda_0(\theta_0, t), \quad \delta > 0.$$

Für das vereinfachte Modell hat damit die Likelihoodfunktion folgende Gestalt

$$L(\theta, t) = \exp \{ (\ln \alpha_0) N(t) + \ln \delta N_1(t) + M(\beta_0, t) - \alpha_0 S_0(\beta_0, t) \}, \quad (6.5)$$

wobei

$$\begin{aligned} N(t) &= N_0(t) + N_1(t), \\ M(\beta_0, t) &= M_0(\beta_0, t) + M_1(\beta_0, t), \\ S(\beta_0, \delta, t) &:= S_0(\beta_0, t) + \delta S_1(\beta_0, t) := \int_0^t [\mu_0(V_0(u, \beta_0) + \delta \mu_1(V_1(u, \beta_0))] du \end{aligned}$$

Aus der Likelihoodfunktion (6.5) gewinnt man die ML-Schätzer für die Parameter  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\delta$ :

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}_0(t) &= \frac{N(t)}{S_0(\widehat{\beta}_0(t), \widehat{\delta}(t), t)} \\ \widehat{\delta}(t) &= \frac{N_1(t) S_0(\widehat{\beta}_0(t), t)}{N_0(t) S_1(\widehat{\beta}_0(t), t)} \quad (N_0(t) > 0) \\ \frac{d}{d\beta_0} M(\widehat{\beta}_0(t), t) &= \frac{N(t) \frac{d}{d\beta_0} S(\widehat{\beta}_0(t), \widehat{\delta}(t), t)}{S(\widehat{\beta}_0(t), \widehat{\delta}(t), t)} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Noch einfacher wird das Modell, wenn nur Minimal- und Perfektreparaturen vorliegen, denn dann haben wir  $V_0(t) = V_1(t)$ , also  $S_0(\beta_0, t) = S_0(\beta_0, t)$  und  $S(\beta_0, \delta, t) = (1 + \delta) S_0(\beta_0, t)$ .

**Beispiel:**

Für den zuletzt genannten einfachen Modellfall, bei dem nur Minimal- und Perfektreparaturen in Betracht kommen, erhält man die Abkürzungen

$$M(\beta_0, t) = \sum_{k=1}^{N(t)} \ln \mu_0(t_{2k-1} - t_{2k-2}, \beta_0) \quad S(\beta_0, \delta, t) = (1 + \delta)S^+(\beta_0, t)$$

$$S^+(\beta_0, t) = \left[ \sum_{k=1}^{N(t)} \int_{t_{2k-2}}^{t_{2k-1}} \mu_0(u - t_{2k-2}, \beta_0) du + \int_{t_{2N(t)}}^t \mu_0(u - t_{2N(t)}, \beta_0) du \right]$$

und die ML-Schätzer

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}_0(t) &= \frac{N(t)}{(1 + \widehat{\delta}(t))S^+(\widehat{\beta}_0(t), t)} \\ \widehat{\delta}(t) &= \frac{N_1(t)}{N_0(t)} \quad (N_0(t) > 0) \\ \frac{d}{d\beta_0} M(\widehat{\beta}_0(t), t) &= \frac{N(t) \frac{d}{d\beta_0} S^+(\widehat{\beta}_0(t), t)}{S^+(\widehat{\beta}_0(t), t)}; \end{aligned} \quad (6.7)$$

und dann im Fall von Weibull-Typ-Prozessen die Schätzer gemäß (6.7) mit

$$\begin{aligned} M(\beta_0, t) &= (\ln \beta_0)N(t) + (\beta_0 - 1) \sum_{k=1}^{N(t)} \ln t_{2k-1} - t_{2k-2} \\ S^+(\beta_0, t) &= \sum_{k=1}^{N(t)} (t_{2k-1} - t_{2k-2})^{\beta_0} + (t - t_{2N(t)})^{\beta_0} \\ \frac{d}{d\beta_0} M(\beta_0(t), t) &= \frac{N(t)}{\beta_0} + \sum_{k=1}^{N(t)} \ln(t_{2k-1} - t_{2k-2}) \\ \frac{d}{d\beta_0} S^+(\beta_0(t), t) &= \sum_{k=1}^{N(t)} (t_{2k-1} - t_{2k-2})^{\beta_0} \ln(t_{2k-1} - t_{2k-2}) + (t - t_{2N(t)})^{\beta_0} \ln(t - t_{2N(t)}). \end{aligned}$$

## 6.2 Reparaturmodelle mit Stress

In der Technik kommt es oft vor, dass Ausfalldaten von solchen Systemen gewonnen werden, bei denen ein gewisser Stress wirkt, wie zum Beispiel unterschiedlich hohe Temperaturen oder überhöhte elektrische Spannungen. Aus solchen Daten sollen Aussagen zur Zuverlässigkeit eines technischen Systems ermittelt werden, wie beispielsweise über Parameterschätzungen, mittlere Funktionsdauer oder Überlebenswahrscheinlichkeiten.

Andererseits werden hochwertige technische Systeme gewissen erhöhten Stresseinflüssen ausgesetzt, um überhaupt Ausfalldaten erhalten zu können. Solche Systemprüfungen werden meist unter Laborbedingungen durchgeführt. In der Prüfungsauswertung versucht man dann, Zuverlässigkeitsaussagen, die zum Normalbetrieb gehören, zu bekommen.

Wir werden nun die Modellierung von reparierbaren System unter Stresseinfluss an einem einfachen Fall vorstellen. Es wird auf Reparaturzeiten verzichtet, d.h. es wird angenommen, dass Reparaturzeiten vernachlässigbar klein sind. Die Funktions- bzw. Ausfallzeiten genügen einem Erneuerungsprozess RP, bei dem die Erneuerungsintensität vom Stress gemäß eines



Arrheniusgesetzes abhängt. Ein derartiges Stressmodell passt in der Praxis vielfach dann, wenn die Stressgröße die (erhöhte) Temperatur ist.

Es wird angenommen, dass die Ausfallzeitpunkte  $T_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  einen Erneuerungsprozess mit Weibull-verteilten Differenzen  $X_n = T_n - T_{n-1} \sim \text{Weib}(a, b)$  darstellen, also die Verteilungsfunktion (Erneuerungsfunktion)

$$F_X(t) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t}{a}\right)^b\right\} \quad (t \geq 0; \quad a > 0, b > 0)$$

vorliegt. Dann hat die Verteilungsdichte die Gestalt

$$f_X(t) = \frac{b}{a^b} t^{b-1} \exp\left\{-\left(\frac{t}{a}\right)^b\right\}$$

und für den Erwartungswert (Mittelwert) von  $X_n$  ergibt sich:  $\theta = a\Gamma(1 + 1/b)$

In Modell soll vorausgesetzt werden, dass

$$\theta = \theta(S) = a(S)\Gamma(1 + 1/b)$$

gilt ( $S$  ist hier eine Stressgröße, beispielsweise die Temperatur oder auch eine Spannung). In der Praxis könnte das technologisch so begründet werden, dass eine Temperatur- (oder Spannungs-)erhöhung bei gleicher Technologie der Produktherstellung nur den Skalenparameter, jedoch nicht den Formparameter der Weibullverteilung beeinflusst.

Nun möge das sogenannte (modifizierte) Arrhenius-Gesetz für  $a(S)$  gelten:

$$a(S_i) = \exp\{-d_0 + d_1(S_i^{-1} - \bar{S})\}, \quad \bar{S} = \frac{\sum_{i=1}^k r_i/s_i}{\sum_{i=1}^k r_i} \quad (i = 1, \dots, k)$$

$\bar{S}$  ist ein "Stressmittel" für das modifizierte Arrhenius-Gesetz.

Wenn  $S \dots$  die Temperatur bedeutet, dann sollen im Modell  $k$  (erhöhte) Stress-Stufen zur Anwendung kommen; zusätzlich gibt es den Normalstress  $S_u$  und einen technologisch bedingten Höchststress  $S_H$ :

$$S_u < S_1 < \dots < S_k \leq S_H,$$

In jeder Stress-Stufe wird der Ausfallprozess im Zeitintervall  $[0, t]$  beobachtet. Zu den Ausfallzeiten  $T_{ij}$ , ( $i = 1, \dots, k$ ;  $j = 1, \dots, n_i$ ) auf jeder der Stufen gibt es dann die Werte  $t_{ij}$ . Dazu gehören  $k$  Zählprozesse  $\{N_i(u), u \geq 0\}$  und zum Beobachtungsende  $t$  die Werte  $N_i(t) = n_i$ . Auf den verschiedenen Stufen erfolgt die Beobachtung unabhängig voneinander.

Die gemeinsame Likelihoodfunktion (für die beobachteten Ausfallzeiten aller Stufen) ist:

$$L(n; d_0, d_1, b) = \prod_{i=1}^k \left[ \frac{b^{n_i} (\prod_{j=1}^{n_i} t_{ij}^{b-1}) \exp\{-\sum_{j=1}^{n_i} t_{ij}^b \exp(d_0 b - d_1 b(S_i^{-1} - \bar{S}))\}}{\exp\{n_i(-d_0 b + d_1 b(S_i^{-1} - \bar{S}))\}} \right] \cdot \exp\left\{-(t - t_{in_i})^b e^{bd_0 - bd_1(S_i^{-1} - \bar{S})}\right\} \text{ mit } n = \sum_{i=1}^k n_i$$

Aus der Likelihoodfunktion können die drei nichtlinearen ML-Gleichungen

$$\frac{\partial \ln L}{\partial d_0} = 0, \quad \frac{\partial \ln L}{\partial d_1} = 0, \quad \frac{\partial \ln L}{\partial b} = 0$$

abgeleitet werden, die nur numerisch, z.B. mittels Newton-Raphson-Verfahren, zu lösen sind. Ergebnis: ML-Schätzer  $\hat{d}_0, \hat{d}_1, \hat{b}$  (konkrete Werte ergeben sich mit den Stichprobenwerten  $t_{ij}$ )

Als nächster Untersuchungsschritt ist der Rückschluß auf Normalstress  $S_u$  vorzunehmen:

- Für  $n = \sum_{i=1}^k n_i \rightarrow \infty$  sind die Schätzer  $\hat{d}_0, \hat{d}_1, \hat{b}$  asymptotisch normalverteilt und erwartungstreu  $E\hat{d}_0 = d_0, \dots$
- Wenn  $b$  bekannt ist, sind  $\hat{d}_0$  und  $\hat{d}_1$  asymptotisch unkorreliert und die Varianzen (gemäß inverser Fisher-Information):

$$D^2(\hat{d}_0) \approx \sigma_{d_0}^{*2} = \frac{1}{b^2 R}, \quad D^2(\hat{d}_1) \approx \sigma_{d_1}^{*2} = \frac{1}{b^2 \sum_{i=1}^k r_i (S_i^{-1} - \bar{S})^2}$$

Also ist  $\hat{a}_u = \widehat{a}(S_u) = \exp\{-\hat{d}_0 + \hat{d}_1(S_u^{-1} - \bar{S})\}$

asymptotisch log-normalverteilt (d.h.  $\ln \hat{a}_u$  asympt. normalvert.) mit Parametern

$$\mu = -d_0 + d_1(S_u^{-1} - \bar{S}), \quad \sigma^2 = \sigma_{d_0}^{*2} + (S_u^{-1} - \bar{S})^2 \sigma_{d_1}^{*2}$$

- Es ergibt sich  $E\hat{a}_u \underset{as.}{\approx} e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$ , folglich ist der Ausdruck

$$\hat{a}_{ue} = \exp\left\{-\hat{d}_0 + \hat{d}_1 S_u^{-1} - \bar{S}\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\sigma_{d_0}^{*2} + (S_u^{-1} - \bar{S})\sigma_{d_1}^{*2})\right\}$$

asymptotisch erwartungstreu.

Ebenso erhält man asymptotisch erwartungtreue Punktschätzer für  $\theta$  und  $t_\gamma$ :

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \hat{a}_{ue} \Gamma(1 + 1/\hat{b}) \\ \hat{t}_\gamma &= \hat{a}_{ue} (-\ln \gamma)^{1/\hat{b}} \end{aligned}$$

- Schließlich kann man asympt. Konfidenzintervall für  $a_u$  (bei Annahme, dass  $n \rightarrow \infty$  und  $b \approx \hat{b}$  aus „Vorschätzung“ bekannt ist) konstruieren:

$$[\hat{a}_{ue} \exp(-z_{1-\alpha/2} w), \hat{a}_{ue} \exp(z_{1-\alpha/2} w)]$$

mit  $z_{1-\alpha/2} \dots$  Quantil der standardisierten Normalverteilung der Ordnung  $1 - \alpha/2$  und

$$w^2 \approx (\hat{b}^2 R)^{-1} + (S_u^{-1} - \bar{S})^2 (\hat{b}^2 \sum_{i=1}^k r_i (S_i^{-1} - \bar{S})^2)^{-1}.$$

**Bemerkungen:**

1) Für  $\theta$  und  $t_\gamma$  kann man keine asympt. Konfidenzintervalle angeben. Es gibt aber sog. Plausibilitätsintervalle (als näherungsweise Intervallschätzung).

2) Vorangehend wurde nur ein einfacher Erneuerungsprozess betrachtet. Es ist aber offensichtlich, dass auch kompliziertere Prozessmodelle und auch andere Stressabhängigkeiten betrachtet werden können.

**Beispiel:** (mit Ausfalldaten von Antriebsmotoren aus dem Elektromaschinenbau Dresden)

Es lagen vor: 2 Temperaturstufen:  $S_1 = 433K (=160^\circ C=S_u)$       $S_2 = 453K$

Datenauswertung ergab:  $\hat{\theta}(433) = 860h$

$\hat{\theta}(453) = 218h$

aus Stressauswertung:  $\hat{a}_{ue}(S_u) = 1055h$

$\hat{\theta}(S_u) = 929h$

$\hat{t}_{0.90}(S_u) = 360h$

untere Intervallgrenzen ( $\alpha = 0.1$ ; Plausibilitätsintervalle):

$\underline{\theta}_{0.90}(S_u) = 737h$

$\underline{t}_{0.90;0.90}(S_u) = 328h$

## Literaturverzeichnis

- [1] Andersen, P.K.; Borgan, O.; Gill, R.D.; Keiding, N. (1993). *Statistical Models Based on Counting Processes*. Springer-Verlag New York.
- [2] Aven, T.; Jensen, U. (1999). *Stochastic Models in Reliability*. Springer-Verlag New York.
- [3] Barlow, R.E.; Proschan, F. (1966). Tolerance and confidence limits for classes of distributions based on failure rate. *Ann. Math. Stat.* 37, 1593-1601.
- [4] Barlow, R.E.; Proschan, F. (1978). *Statistische Theorie der Zuverlässigkeit*. Akademie-Verlag Berlin.
- [5] Barndorff-Nielsen, O.; Cox, D. (1996). Prediction and asymptotics. *Bernoulli* 2/4, 319-340.
- [6] Bathe, F.; Franz, J. (1996). Modelling of Repairable Systems with Various Degrees of Repair. *Metrika* 43, 149-164.
- [7] Beichelt, F. (1985). Confidence bounds for the percentiles of a wearout failure distribution. *IEEE Trans. Reliab.* 34, 356-359.
- [8] Beichelt, F. (1992). A unifying treatment of replacement policies with minimal repair. *Naval Research Logistics* 39, 1221-1238.
- [9] Beichelt, F. (1993). *Zuverlässigkeits- und Instandhaltungstheorie*. Teubner-Verlag Stuttgart.
- [10] Beichelt, F.; Franken, P. (1983). *Zuverlässigkeit und Instandhaltung*. Mathematische Methoden. Carl-Hanser-Verlag München.
- [11] Belyaev, Y.K.; Kahle, W. (2000). *Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik bei der Analyse von Zuverlässigkeitsdaten*. Teubner-Verlag Stuttgart.
- [12] Berman, M. (1981). Inhomogeneous and Modulated Gamma Processes. *Biometrika* 68/1, 143 - 152.
- [13] Brown, M.; Proschan, F. (1983). Imperfect Repair. *Journal of Applied Probability* 20/4, 851 - 859.
- [14] Calabria, R.; Pulcini, G. (1996). Maximum likelihood and Bayes prediction of current system lifetime. *Commun.Statist.-Theory Meth.* 25(10), 2297 - 2309.
- [15] Calabria, R.; Pulcini, G. (1997). Bayes inference for the modulated power law process. *Commun.Statist.-Theory Meth.* 26(10), 2421 - 2438.
- [16] Cox, D.R. (1972). The statistical analysis of dependencies in point processes; In *Stochastic Point Processes* P.A.W. Lewis, Ed.; Wiley New York, 155 - 166.

- [17] Cox, D.R.; Oakes, D. (1984). Analysis of Survival Data. Chapman-Hall London.
- [18] Engelhardt, M.; Bain, L. (1978). Prediction intervals for the Weibull process. *Technometrics* 20(2),167-169.
- [19] Fleming, T.R.; Harrington, D.P. (1991). Counting Processes and Survival Analysis. John Wiley New York.
- [20] Franz, J. (1994). On Estimation Problems in Random Censored Repair Models. *Economic Quality Control* 9/3, 125-142.
- [21] Franz, J. (1999). On Repair Models and Estimators of Wear-out Limits. *Economic Quality Control* 14/3-4, 135-151.
- [22] Franz, J.; Abdel-Aty, Y. (2003). Bayes Inference Problems in Failure-Repair Processes. *Economic Quality Control* 18/2, 209-222.
- [23] Franz, J.; Pietzner, D. (2012). Statistical Models and Parameter Estimation for Repairable Systems. *Economic Quality Control* 27/1, 65-84.
- [24] Franz, J.; Jokiel-Rokita, A.; Magiera, R. (2014, online 2013). Prediction in trend-renewal processes for repairable systems. *Statistics and Computation* 24/4, 633-649.
- [25] Gnedenko, B.W.; Beljajew, J.K.; Solovjew, A.D. (1968). *Mathematische Methoden der Zuverlässigkeit*. Akademie-Verlag Berlin.
- [26] Härtler, G. (1983). *Statistische Methoden für die Zuverlässigkeitsanalyse*. Verlag Technik Berlin, Springer-Verlag Wien.
- [27] Heggland, K.; Lindqvist, B.H. (2006). A non-parametric monotone maximum likelihood estimator of time trend for repairable system data. *Reliab.Engin.&System Safety* , 92, 575 - 584.
- [28] Jensen, U. (1990). A general replacement model. *ZOR-Methods and Models of Oper.Res.* 34, 423-439.
- [29] Jokiel-Rokita, A.; Magiera, R. (2012). Estimation of parameters for trend-renewal processes. *Statistics and Computation* 22, 625-637.
- [30] Kahle, W. (1995). Estimation of the Parameters of the Weibull Distribution for Censored Data. *Metrika*.
- [31] Kijima, M. (1989). Some Results for Repairable Systems with General Repair. *Journal of Applied Probability* 26/1, 89 - 102.
- [32] Last, G.; Brandt, A. (1995). *Marked Point Processes on the Real Line*. Springer New York.

- [33] Last, G.; Szekli, R. (1998). Stochastic Comparison of Repairable Systems by Coupling. *Journal of Applied Probability* 35/2, 348 - 370.
- [34] Lawless, J.F.; Thiagarajah, K. (1996). A Point-Process Model Incorporating Renewals and Time Trends, with Application to Repairable Systems. *Technometrics* 38/2, 131 - 138.
- [35] Lindqvist, B.H. (1993). The trend-renewal process, a useful model for repairable systems. Malmö, Sweden. Society in Reliability Engineers, Scand. Chapter, Annual Conference.
- [36] Lindqvist, B.H. (2006). On the statistical modeling and analysis of repairable systems. *Statistical Science* 21/4, 532 - 551.
- [37] Lindqvist, B.H.; Elvebakk, G.; Heggland, K. (2003). The trend-renewal process for statistical analysis of repairable systems. *Technometrics* 45/1, 31 - 44.
- [38] Luhm, A.; Pruscha, H. (1997): Semi-parametric Inference for Regression Models Based on Marked Point Processes. Discussion Paper 78, LMU München.
- [39] Mann, N.R.; Schafer, R.E.; Singpurwalla, N.D. (1974). *Methods for statistical analysis of reliability and life data*. Wiley New York.
- [40] Pawlitschko, J. (1996). Die Schätzung einer Überlebensfunktion in Verallgemeinerungen des Koziol-Green-Modells. Diss. FB Statistik Univ. Dortmund.
- [41] Pham, H.; Wang, H. (1996). Imperfect Maintenance. *European Jour. Oper. Res.* 94/3, 425-438.
- [42] Pulcini, G. (2001). A bounded intensity process for the reliability of repairable equipment. *Jour. Qual. Tech.* 33, 480-492.
- [43] Pulcini, G. (2003). Mechanical Reliability and Maintenance Models, in: *Handbook of Reliability Engineering*. Springer London, 317-348.
- [44] Pietzner, D. (2008). Modellierung und Statistik des Trend-Erneuerungsprozesses. Diplomarbeit Mathematik, TU Dresden.
- [45] Reinschke, K. (1973). *Zuverlässigkeit von Systemen*. Verlag Technik Berlin.
- [46] Rigdon, S.E.; Basu, A.P. (2000). *Statistical Methods for the Reliability of Repairable Systems*. Wiley New York.
- [47] Stadje, W.; Zuckerman, D. (1990). Optimal strategies for some repair replacement models. *Adv. Appl. Prob.* 22, 641-656.
- [48] Stefanov, V. (1995). Explicite limit results for minimal sufficient statistics and maximum likelihood estimators in some Markov processes. Exponential families approach. *Ann. Statist.* 23/4, 577-595.

- [49] Stadje, W.; Zuckerman, D. (1991). Optimal Maintenance strategies for Repairable Systems with General Degrees of Repair. *Journal of Applied Probability* 1991, 28, 384 - 396.
- [50] Storm, R. (2001) *Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik und statistische Qualitätskontrolle*. Fachbuchverlag Leipzig.
- [51] Viertl, R. (1988). *Statistical Methods in Accelerated Life Testing*. Vandenhoeck/Ruprecht Göttingen.
- [52] Viertl, R. (1990). *Einführung in die Stochastik*. Springer Wien - New York.
- [53] Yeh, L. (1990). A repair replacement model. *Adv. Appl. Prob.* 22, 494-497.
- [54] Yu, J.W.; Tian, G.L.; Tang, M.L. (2008). Statistical inference and prediction for the Weibull process with incomplete observations. *Computational Statistics and data Analysis* 52/3, 1587-1603.
- [55] Pruscha, H. (1984). *Statistical inference in multivariate point processes with parametric intensity*. Preprint Univ. München, Math. Institut.

# DRESDNER SCHRIFTEN ZUR MATHEMATISCHEN STOCHASTIK

- 2/2015 **Wilfried Schenk**  
*Zur Geschichte der Stochastik an der TU Dresden (Die Anfänge nach 1945 bis 1968)*
- 1/2015 **Dietmar Ferger**  
*Arginf-sets of multivariate cadlag processes and their convergence in hyperspace topologies*
- 3/2013 **Daniel Tillich, Dietmar Ferger**  
*Estimation of rating classes and default probabilities in credit risk models with dependencies*
- 2/2013 **Dietmar Ferger**  
*Optimal Constants in the Marcinkiewicz–Zygmund Inequalities*
- 1/2013 **Dietmar Ferger**  
*Moment equalities for sums of random variables via integer partitions and Faà di Bruno’s Formula*
- 4/2011 **Mark Freidlin, Matthias Weber**  
*Perturbations of the motion of a charged particle in a noisy magnetic field*
- 3/2011 **Dietmar Ferger, Jens Klotsche and Ulrike Lüken**  
*Estimation and testing of crossing-points in fixed design regression*
- 2/2011 **Dietmar Ferger**  
*On the Argmin-Sets of Stochastic Processes and their Distributional Convergence in Fell-Type-Topologies*
- 1/2011 **Jürgen Franz, Diana Pietzner**  
*Statistical Models and Parameter Estimation for Repairable Systems*
- 2/2010 **Michael Scholz**  
*Verteilungskonvergenz für V- und U-Statistiken basierend auf multiplen stochastischen Integralen vom Wienertyp*
- 1/2010 **Dietmar Ferger**  
*On the Argmin-sets of stochastic processes and their distributional convergence in Fell-type-topologies*
- 9/2009 **Jürgen Franz, Diana Pietzner**  
*A Discussion on Modeling and Parameter Estimation in Trend-Renewal Processes*
- 8/2009 **Anja Voß-Böhme, Wilfried Schenk, Ann-Kathrin Köllner**  
*On the Duality Relation between Interacting Particle Systems and Markov Chains*
- 7/2009 **Dietmar Ferger**  
*Stochastische Prozesse mit Strukturbrüchen*
- 6/2009 **Anja Voß-Böhme**  
*A Core for Generators of Interacting Particle Systems*
- 5/2009 **Dietmar Ferger**  
*Minimum distance estimation in normed linear spaces with Donsker-classes*
- 4/2009 **Anja Voß-Böhme, Andreas Deutsch**  
*The cellular basis of cell sorting kinetics*
- 3/2009 **Tobias Klauß, Anja Voß-Böhme**  
*Two types of phase transitions in an interacting particle system for collective migration*
- 2/2009 **Anja Voß-Böhme**  
*Gibbsian characterization for the reversible measures of interacting particle systems*