Dr. Stefan Neukamm, Florian Nolte, M.Sc.
Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg

Partielle Differentialgleichungen

Aufgabenblatt 5 Wintersemester 2013/2014 12.11.2013

Aufgabe 1 - (Symmetrie der Laplace-Gleichung) **2 Punkte**

Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$, $F \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und $c \in \mathbb{R}^d$. Betrachten Sie $v(x) = u(Fx + c)$. Drücken Sie ∇v und $\nabla^2 v$ mit Hilfe von u und den Ableitungen von u aus. Für welche $F \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und $c \in \mathbb{R}^d$ gilt die Implikation $\triangle u = 0 \Rightarrow \triangle v = 0$ für alle $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$ und $v(x) = u(Fx + c)$?

Aufgabe 2 - (Ableitung und Integral der Fundamentallösung) **5 Punkte**

Sei $d \geq 2$. Die Fundamentallösung $\Phi : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{|\partial B(0;1)|} \log(|x|), & d = 2, \\ \frac{1}{(d-2)|\partial B(0;1)|} \frac{1}{|x|^{d-2}}, & d > 2. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie für $x \neq 0$

$$\nabla\Phi(x), \qquad \nabla\Phi(x)\cdot x, \qquad \partial_i\partial_j\Phi(x).$$

(b) Berechnen Sie für $0 < r < R$

$$\int_{\partial B(0;r)} \Phi(\xi)\, dS(\xi), \qquad \int_{B(0;R)\setminus B(0;r)} \Phi(x)\, dx, \qquad \int_{B(0;r)} \Phi(x)\, dx.$$

(c) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{\rho\downarrow 0} \int_{B(0;\rho)} |\Phi(x)|\, dx = \lim_{\rho\downarrow 0} \int_{\partial B(0;\rho)} |\Phi(\xi)|\, dS(\xi) = 0.$$

(d) Betrachte $\varphi(x) := f(\Phi(x))$, wobei $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Finden Sie ein $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass

$$\int_{B(0;R)\setminus B(0;r)} \triangle\varphi(x)\, dx = g(\Phi(re_1), \Phi(Re_1)) \quad \text{für alle } 0 < r < R.$$

(e) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

$$(1) \quad \int_{B(0;R)} |\partial_i\Phi(x)|\, dx < \infty, \qquad (2) \quad \int_{B(0;R)} |\partial_j\partial_i\Phi(x)|\, dx < \infty$$

für $i, j \in \{1, \dots, d\}$ und $0 < R < \infty$.

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Sei $d \geq 2$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $u \in C^2(\Omega)$ und $x \in \Omega$. Betrachten Sie die Funktion

$$\varphi : [0, R) \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(r) := \begin{cases} \frac{1}{|\partial B(x;r)|} \int_{\partial B(x;r)} u(\xi)\, dS(\xi) & \text{für } r > 0, \\ u(x) & \text{für } r = 0, \end{cases}$$

wobei $R := \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$.

(a) Zeigen Sie

$$\lim_{r \downarrow 0} \left(\frac{\varphi(r) - \varphi(0)}{r^2} - \frac{1}{d|B(x;r)|} \int_{B(x;r)} \triangle u(y)\, dy \right) = -\frac{1}{2} \frac{1}{|\partial B(0;1)|} \int_{\partial B(0;1)} \xi^t \nabla^2 u(x) \xi \, dS(\xi)$$

Hinweis: Lesen Sie sich den Beweis von Satz 2.8 genau durch. Die Taylor-Entwicklung der Funktion $f(r) := u(x + r\xi)$ mit $\xi \in \partial B(0;1)$ ist nützlich.

(b) Zeigen Sie

$$\frac{1}{2} \frac{1}{|\partial B(0;1)|} \int_{\partial B(0;1)} \xi^t \nabla^2 u(x) \xi \, dS(\xi) = \frac{1}{2d} \triangle u(x).$$

Hinweis: Benutzen Sie die Rotationssymmetrie der Sphäre $\partial B(0;1)$.

(c) Es gelte

$$\forall r \in (0, R) \,:\, u(x) \leq \frac{1}{|\partial B(x;r)|} \int_{\partial B(x;r)} u(y)\, dy.$$

Zeigen Sie:

$$-\triangle u(x) \leq 0.$$