Dr. Stefan Neukamm, Florian Nolte, M.Sc.
Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg

# Partielle Differentialgleichungen

**Aufgabenblatt 7** Wintersemester 2013/2014 26.11.2013

## Aufgabe 1 **2+2 Punkte**

Sei $d \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt.

(i) Beweisen Sie das *schwache Maximumsprinzip*: Ist $u \in C(\overline{\Omega})$ schwach subharmonisch (im Sinne von Definition 2.65 im Skript), dann gilt $\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u$.
(*Hinweis: Modifizieren Sie den Beweis von Satz 2.15.*)

(ii) Zeigen Sie: $u \in C(\overline{\Omega})$ ist genau dann schwach subharmonisch, wenn $u \leq v$ in $\overline{B}$ für

- jede offene Kugel $B$ mit $\overline{B} \subset \Omega$ und
- jede Funktion $v \in C^2(B) \cap C(\overline{B})$ mit $v$ harmonisch in $B$ und $v \geq u$ auf $\partial B$

gilt.

## Aufgabe 2 **1+2+2 Punkte**

Sei $d \geq 2$. Es bezeichnet

$$K_{B(0;1)} : B(0;1) \times \partial B(0;1) \to \mathbb{R}, \qquad K_{B(0;1)}(x,\xi) := \frac{1 - |x|^2}{|\partial B(0;1)||x-\xi|^d}.$$

den Poissonkern für die Kugel $B(0;1) \subset \mathbb{R}^d$.
Für $g \in C(\partial B(0;1))$ betrachte die Funktion $u : \overline{B(0;1)} \to \mathbb{R}$,

$$u(x) := \begin{cases} \displaystyle\int_{\partial B(0;1)} K_{B(0;1)}(x,\xi) g(\xi)\, dS(\xi) & \text{falls } x \in B(0;1), \\ g(x) & \text{falls } x \in \partial B(0;1). \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(i) $u \in C^\infty(B(0;1))$ und $\triangle u = 0$ in $B(0;1)$.
*(Hinweis: Verwenden Sie Zusatzaufgabe 1 auf Blatt 4.)*

(ii) $\int_{\partial B(0;1)} K(x,\xi)\, dS(\xi) = 1$.
*(Hinweis: Zeigen Sie zunächst $K(x,\xi) = -\partial_\nu G(x,\xi)$, wobei $G$ die Greensche Funktion für die Kugel $B(0;1)$ bezeichnet. Beachten Sie, dass in der betrachteten Situation $\partial_\nu G(x,\xi) = \nabla_\xi G(x,\xi) \cdot \xi$ gilt. Wenden Sie Satz 2.51 mit geeignetem $u$ an.)*

(iii) Für $\xi_0 \in \partial B(0;1)$ gilt

$$\lim_{\substack{x \to \xi_0 \\ x \in B(0;1)}} |u(x) - u(\xi_0)| = 0.$$

## Aufgabe 3 **2 Punkte**

Sei $d \geq 2$, $z \in \mathbb{R}^d$, $R > 0$ und $g \in C(\partial B(z;R))$. Zeigen Sie: Das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} -\triangle u &= 0 \quad \text{in } B(z;R) \\ u &= g \quad \text{auf } \partial B(z;R) \end{aligned}$$

besitzt eine eindeutige Lösung $u \in C^\infty(B(z;R)) \cap C(\overline{B(z;R)})$ und es gilt

$$u(x) := \begin{cases} \displaystyle\int_{\partial B(z;R)} K_{B(z;R)}(x,\xi) g(\xi)\, dS(\xi) & \text{falls } x \in B(z;R), \\ g(x) & \text{falls } x \in \partial B(z;R), \end{cases}$$

wobei

$$K_{B(z;R)} : B(z;R) \times \partial B(z;R) \to \mathbb{R}, \qquad K_{B(z;R)}(x,\xi) := \frac{R^2 - |x-z|^2}{R|\partial B(0;1)||x-\xi|^d}$$

den Poissonkern für die Kugel $B(z;R)$ bezeichnet.
*(Hinweis: Betrachten Sie die skalierte Funktion $\tilde{u} : \overline{B(0;1)} \to \mathbb{R}$, $\tilde{u}(x) := u(z+Rx)$ und verwenden Sie Aufgabe 2.)*

## Aufgabe 4 **2 Punkte**

Sei $d \geq 2$, $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ und $g \in C(\partial B(0;1))$. Zeigen Sie: Das Dirichlet-Problem der Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} -\triangle u &= f \quad \text{in } B(0;1) \\ u &= g \quad \text{auf } \partial B(0;1) \end{aligned}$$

besitzt eine eindeutige Lösung.

*Bei Fragen zum Übungsblatt wenden Sie sich bitte an Herrn Nolte (INF 294, Zimmer 226). Bitte wenden Sie sich auch an Herrn Nolte, falls Sie (nach längerem Nachdenken) einen Lösungshinweis benötigen sollten.*