Modellierung einer schwingenden Saite

Louisa Barth und Annamaria Schmidt

Frühjahr 2017

Abschlusspräsentation zum Schülerpraktikum (Jahrgangsstufe 9)
an der Professur für Angewandte Analysis (TU Dresden)
Betreuung: Prof. Dr. Stefan Neukamm, Markus Baldauf, Nicolas Regel, Nils Schlegel

Gliederung

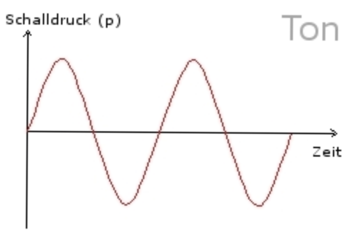
1. Schall

- Untergliederung: Ton, Klang, Geräusch, Knall
- Auditive Wahrnehmung
- Unterscheidung: Nutzschall, Störschall
- Physikalisch: Schall = Welle
- Schallgeschwindigkeit
- Regelmäßige/unregelmäßige Luftdruckschwankungen

1.1 Ton, Klang und Geräusch

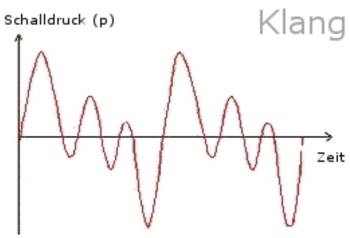
<u>Ton</u>

- Reine Sinusschwingung
- Bsp.: Stimmgabel



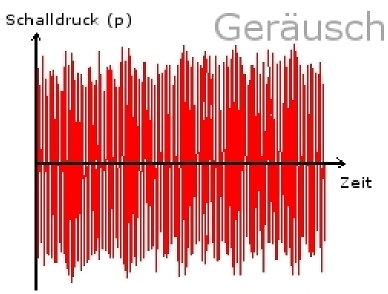
<u>Klang</u>

- Überlagerung mehrerer Töne
- Bsp.: Dreiklang



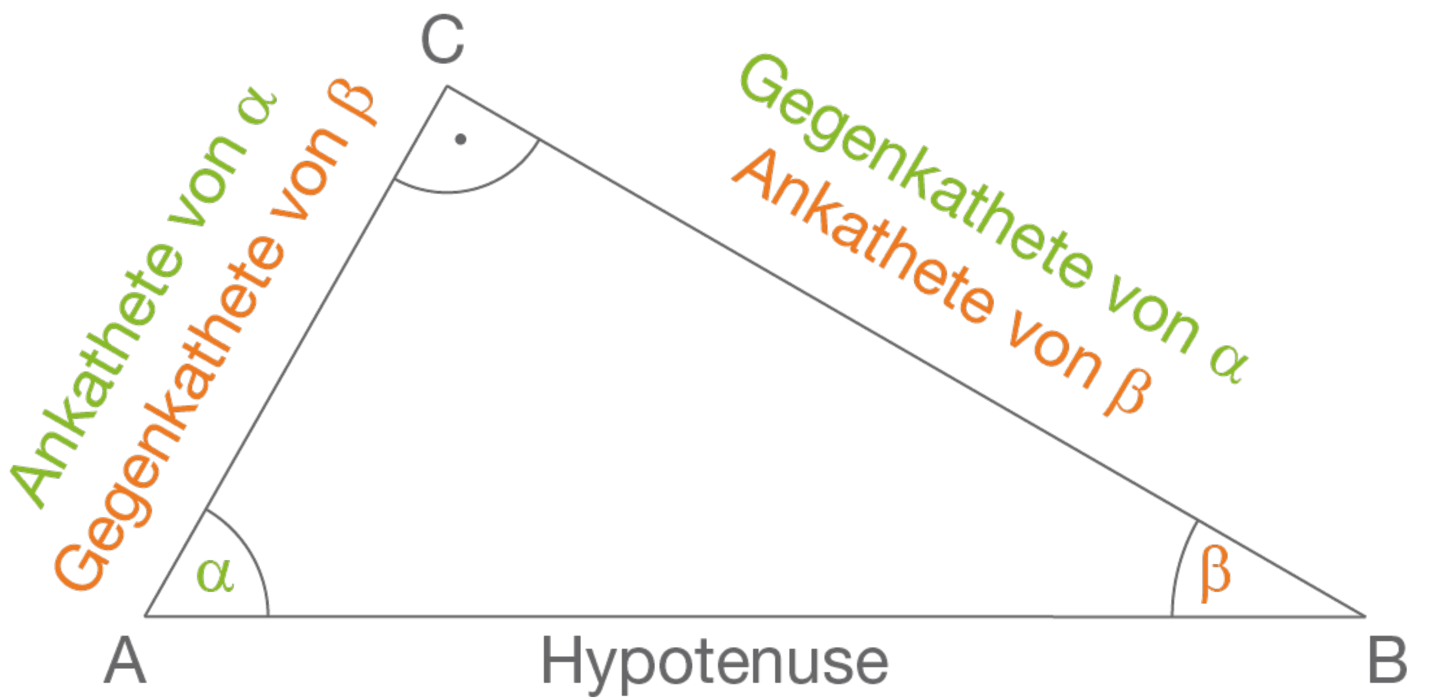
<u>Geräusch</u>

- Kaum Ähnlichkeit zu Sinusschwingung, unregelmäßig
- Bsp.: Motorenlärm

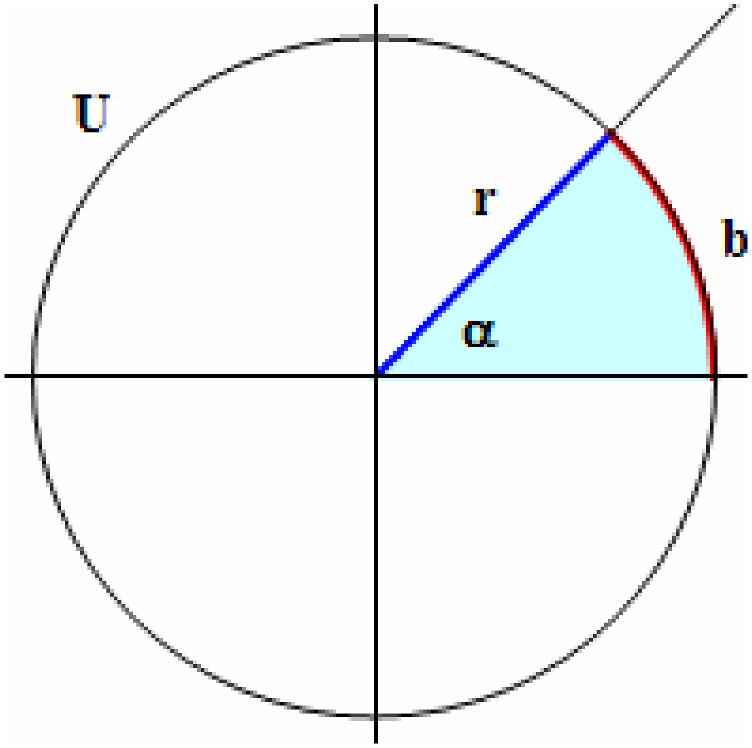


2. Sinus

- Rechtwinkliges Dreieck
  - Verhältnis Gegenkathete/ Hypotenuse
  - Winkel an Hypotenuse

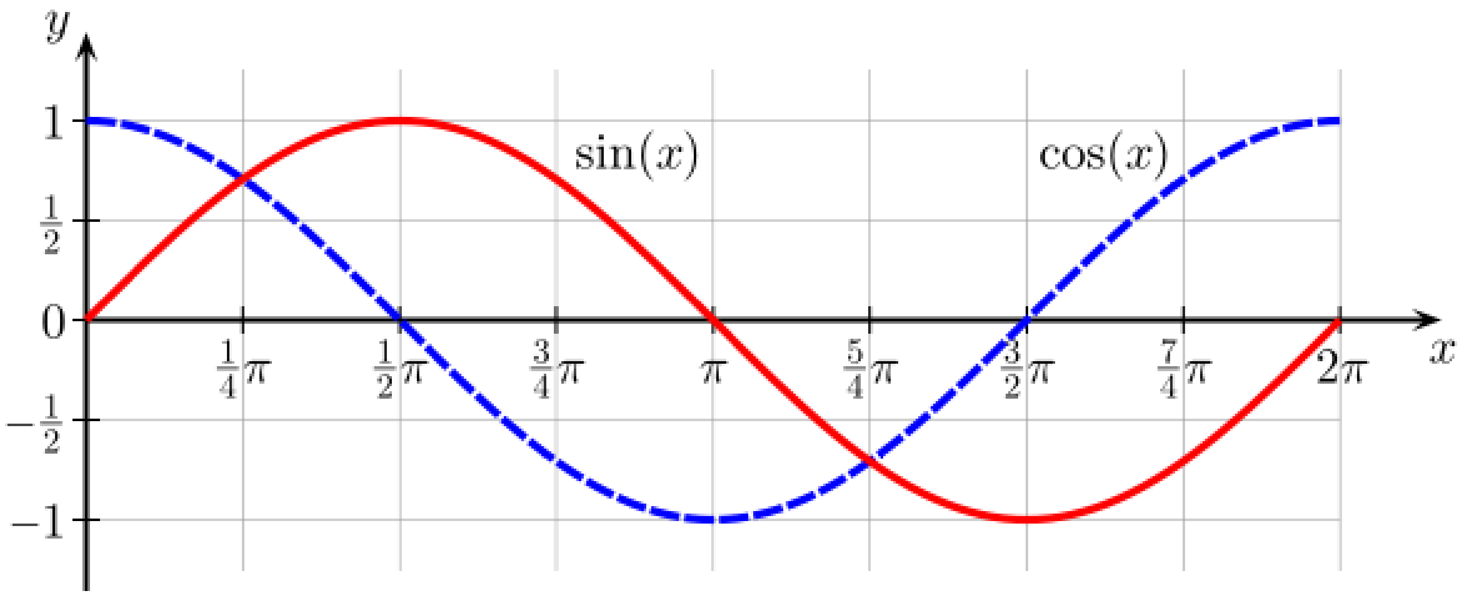


2.1 Bogenmaß



- Verhältnis Kreisbogen b und Kreisradius r
- Umrechnungsfaktor 180°/π oder π/180°

2.2 Sinus als Funktion

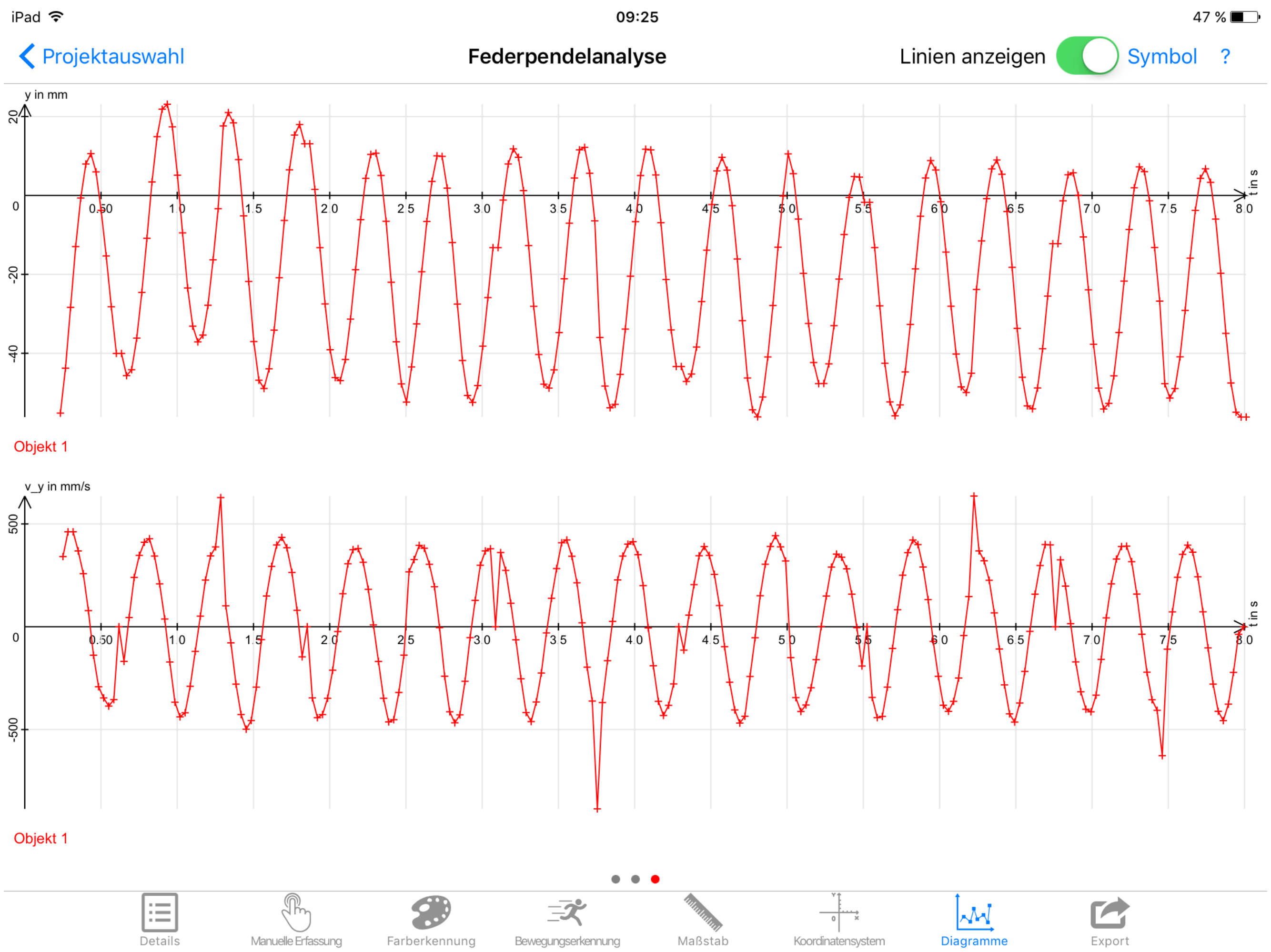


- f(x)= a sin(b*x-c)+d
- Geogebra
- f(x)=f(x+p)

3. Schwingungen und Wellen

3.1 Experiment: Schwingung eines Federpendels

- Kraft = Gegenkraft
- F = m*a = - k*x



3.2 Verschiedene Schwingungen

Rechteckschwingung

- Viereckiger Verlauf
- Hohler Klangcharakter
- Nachahmung von Flöten, Blechblasinstrumenten
- Geogebra

Dreieckschwingung

- Dreieckiger Verlauf
- Gedämpfter Klang
- Oft benutzt für ein Signal
- Geogebra

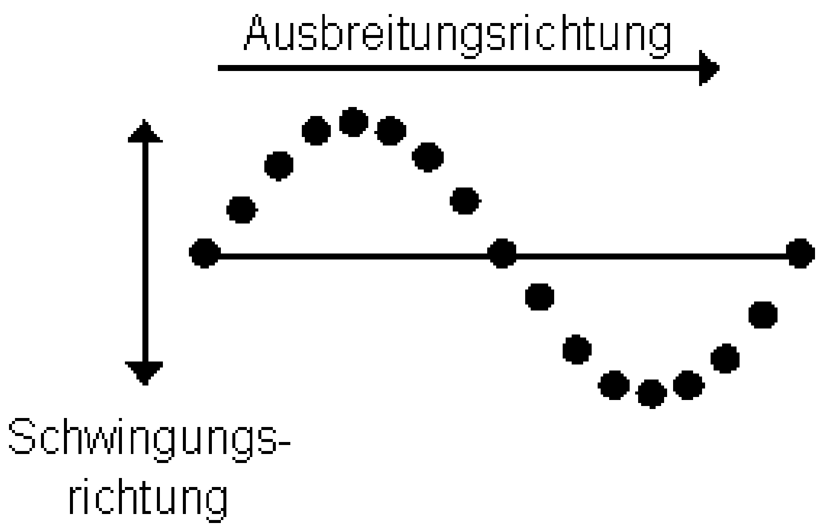
Sägezahnschwingung

- Endgültige(s) Ergebnis/ Summe von Grundton mit darüber liegenden Obertönen
- Klang
- Geogebra

3.3 Verschiedene Wellen

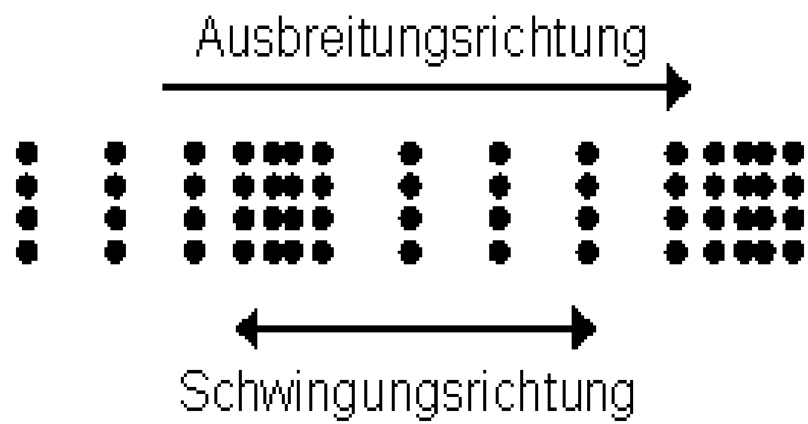
<u>Transversal-/ Querwelle</u>

- Senkrecht zur Ausbreitungsrichtung
- „Harmonische Welle“



<u>Longitudinal-/ Längswelle</u>

- Teilchen schwingen längs der Ausbreitungsrichtung
- Druck-/ Dichteschwankungen



4. Intervalle

Ein Intervall ist der Abstand zwischen zwei (aufeinanderfolgenden) Tönen.

4.1 Frequenzverhältnisse verschiedener Intervalle

Messung:

Grundton: e‘	Halbtonschritte	Frequenz	Frequenzverhältnis
Reine Prime	0	1613	**1**
Kleine Sekunde	1	1724	**16/15**
Große Sekunde	2	1818	**9/8**
Kleine Terz	3	1933	**6/5**
Große Terz	4	2083	**5/4**
Reine Quarte	5	2174	**4/3**
Übermäßige Quarte	6	2272	**7/5**
Reine Quinte	7	2439	**3/2**
Kleine Sexte	8	2564	**8/5**
Große Sexte	9	2702	**5/3**
Kleine Septime	10	2857	**16/9**
Große Septime	11	3030	**15/8**
Reine Oktave	12	3333	**2/1**

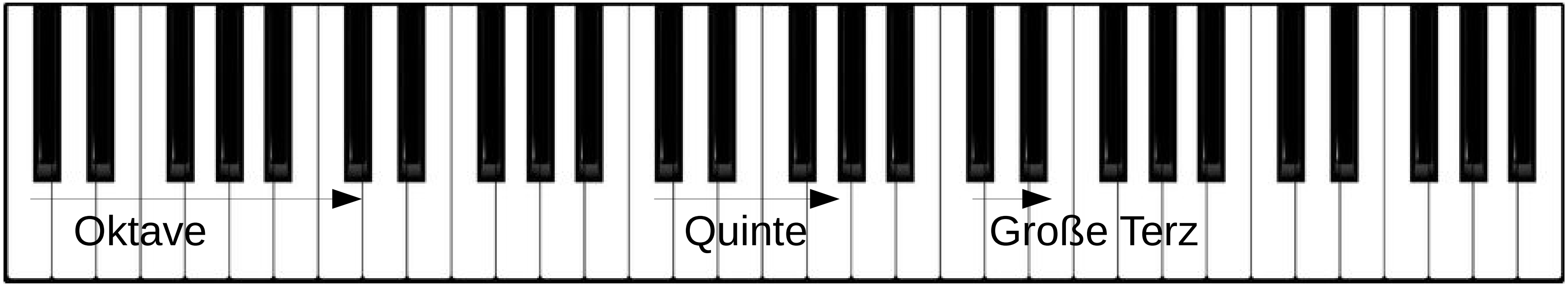
4.2 Das pythagoreische und das syntonische Komma

Pythagoreisches Komma

- Auf dem Klavier entsprechen sieben Oktaven zwölf Quinten
- Differenz zwischen den Frequenzverhältnissen

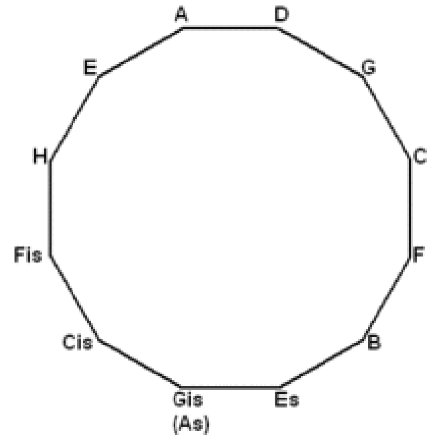
Syntonisches Komma

- Unterschied zwischen vier Quinten und großer Terz mit zwei Oktaven
- Verhältnis: 80/81



Die Unterschiede der Frequenzverhältnisse des selben Intervalls (auf dem Klavier) sind auf die verschiedenen Stimmungen zurückzuführen.

4.3 Stimmungen



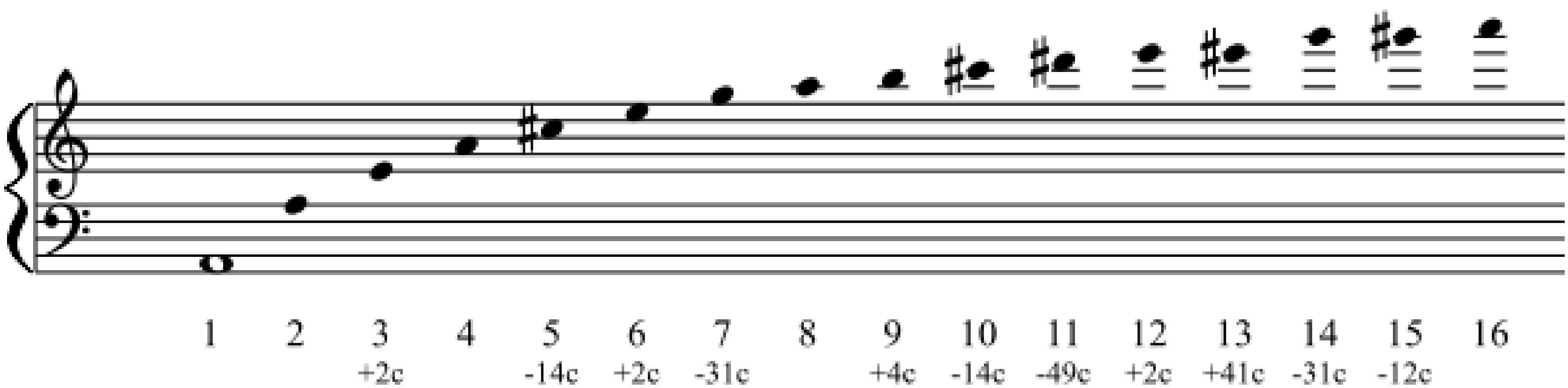
- Festsetzen der Frequenzen bestimmter Töne

Reine Stimmung	Pytagoreische Stimmung	Gleichstufige Stimmung
Orientierung an Frequenzverhältnissen (ausgehend vom c)	Reine Quinten als Grundlage	Unterteilung der Oktave in zwölf gleich große Halbtonschritte, je 100 Cent
Rein gestimmte Oktaven, Quinten und (große) Terzen	Rein gestimmte Oktaven und Quinten	Rein gestimmte Oktaven
Im 15. Jh. entstanden	Im Mittelalter gebräuchlich	Seit dem 19. Jh. (bis heute) benutzt

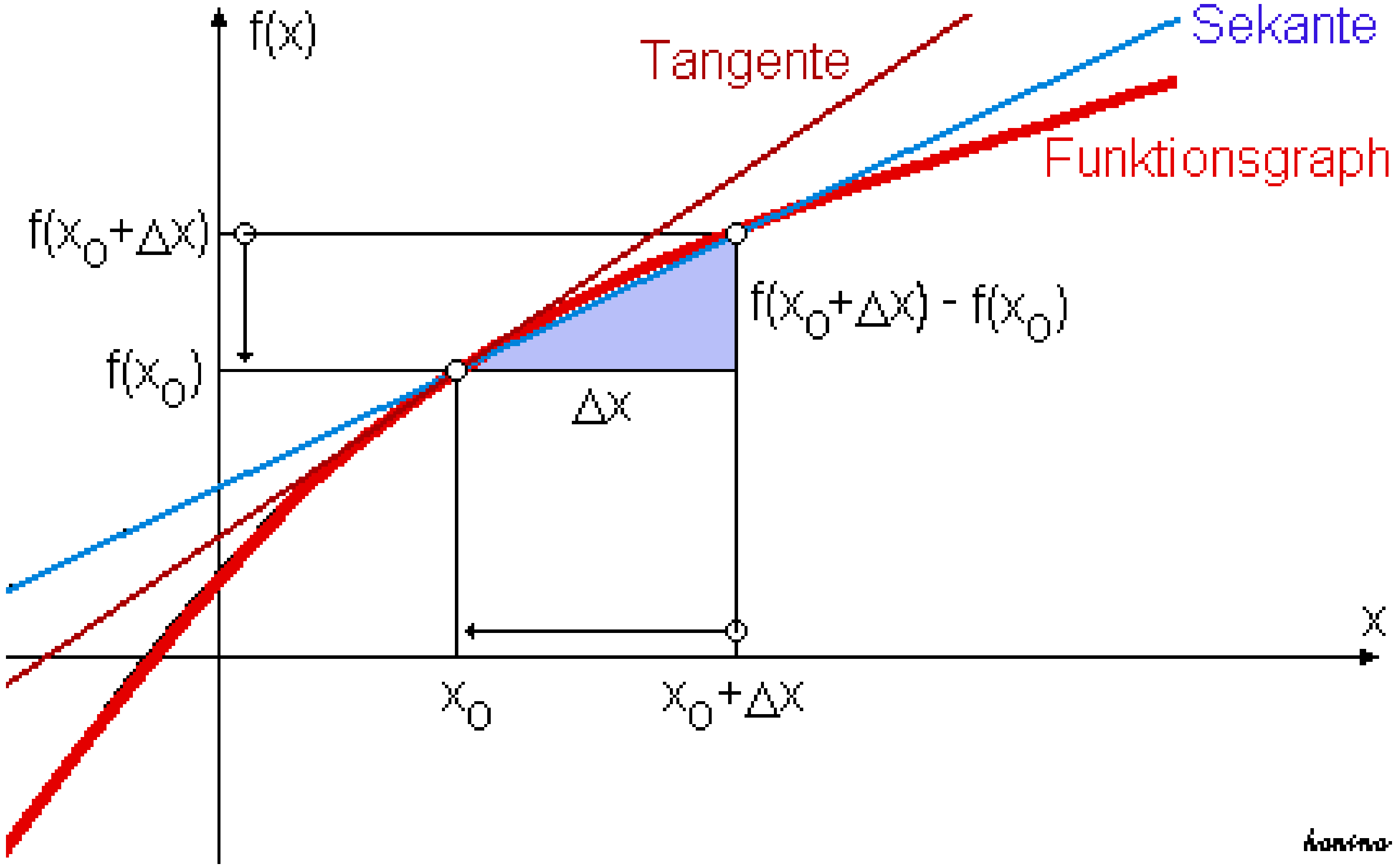
4.4 Obertonreihe

- Klang besteht aus Grundton und Obertönen
- Obertöne haben zweifache Frequenz, dreifache Frequenz, vierfache Frequenz,etc.
- Verhältnisreihe der Obertöne :

  1:2:3:4:5:6:7:8:9:…



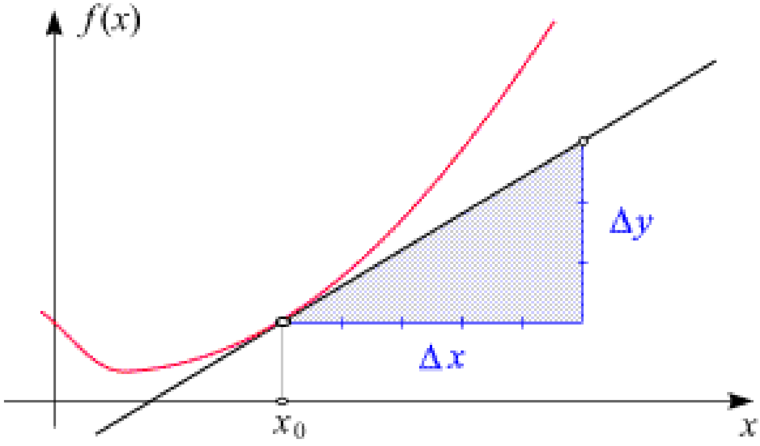
5. Differenzialrechnung



Bei der Differenzialrechnung wird eine Tangente an eine Kurve angelegt, um den Anstieg (der Kurve) in einem Punkt zu berechnen. Daraus entsteht die Ableitungsfunktion, die den Anstieg in jedem Punkt der Kurve angibt.

5.1 Grafisches Ableiten und Ableitungsfunktion

- Zeichnerisch Tangente durch einzelnen Punkte anlegen
- Mit Anstiegsdreieck: Anstieg im jeweiligen Punkt berechnen
- Anstieg an der x-Achse (an entsprechender Stelle) abtragen



Anstieg der Tangente an der Stelle x_0 =

$$= f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{5} = 0.6$$

- An einem Sattelpunkt und an den Extremstellen ist die (erste) Ableitung 0
- Ableitungsfunktionen:

Funktion	Ableitungsfunktion
Parabel	Lineare Funktion
Lineare Funktion	Gerade, parallel zur x-Achse
Gerade, parallel zur x-Achse	Gerade auf der x-Achse

5.2 Differenzenquotient und Differenzialquotient

- Differenzenquotient: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
- Differentialquotient (Grenzwert des Differenzenquotienten): $\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
- h-Methode zur Ermittlung des Anstiegs in einem Punkt, Beispiel:

$$f(x)=x^2$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}2x+h$$

$$f'(x)=2x$$

5.3 Ableitung des Sinus

Funktion	Ableitung
sin(x)	cos(x)
cos(x)	- sin(x)
- sin(x)	- cos(x)
- cos(x)	sin(x)

5.4 Ableitungsregeln

- Potenzregel: $f(x) = x^n$
  $f'(x) = n * x^{n-1}$
- Faktorregel: $f(x) = k * g(x)$
  $f'(x) = k * g'(x)$
- Summenregel: $f(x) = g(x) + h(x)$
  $f'(x) = g'(x) + h'(x)$
- Kettenregel: $f(x) = g(h(x))$
  $f'(x) = h'(x) * g'(h(x))$
- Produktregel: $f(x) = g(x) * h(x)$
  $f'(x) = g'(x) * h(x) + g(x) * h'(x)$
- Quotientenregel: $f(x) = g(x) / h(x)$
  $f'(x) = (g'(x) * h(x) + g(x) * h'(x)) / h(x)^2$

5.5 Partielle Ableitung

- Ableitung einer Funktion mit mehreren Variablen nach einer Variable
- Variablen, nach denen nicht abgeleitet wird, werden als Konstanten gesehen
- Bsp.:

  - 1) $u(x,y)= x^3+x^2y+xy^2+y$

    $\partial_x u(x,y)= 3x^2+2xy+y^2$

    $\partial_{xx} u(x,y)= 6x+2y$

  - 2) $v(x,y)= \sin(x+3y)-\cos(x-5y)$

    $\partial_y v(x,y)= 3*\cos(x+3y)-5*\sin(x-5y)$

    $\partial_{yy} v(x,y)= -9*\sin(x+3y)+25*\cos(x-5y)$

6. Wellengleichung

- $m*\partial_{tt} u(t,x)-k*\partial_{xx} u(t,x)=0$
- m…Masse der Saite
- k… Steifigkeit der Saite
- t… Zeit
- x… Position
- Bsp.:
  - $u(x,t)=g(ax+bt+c)$
  - $m*b^2*g''(ax+bt+c)-k*a^2*g''(ax+bt+c)=0$
  - $m*b^2-k*a^2=0$
  - $m*b^2=k*a^2$
  - $b=\sqrt{(k/m)}*a$

6.1 Randbedingungen

- Endpunkte der Saite sind fixiert: $u(t,0)=u(t,l)=0$
- Wellengleichung gilt für alle $t \geq 0$ und x
- Bei $t=0$:
  - $u(t=0,x)=u_0(x)$ (u_0 : Auslenkung vor dem Loslassen)
  - $\partial_t\, u(t=0,x)=0$ (Ableitung des Weges (Geschwindigkeit) der Saite=0)
- Gegebene Größen:
  - Masse der Saite $m>0$
  - Steifigkeit der Saite $k>0$
  - Länge der Saite $l>0$
  - Anfangsauslenkung u_0

Beschreibung von a und b

- $b = \sqrt{(k/m)}*a$ (Beispiel der Wellengleichung)
- $u(t,0) = 0$ (Randbedingung)
- $t = 0$, $x = l$
- $0 = u(0,l) = \sin(al) \cos(b0) = \sin(al)$
- $\sin(x) = 0$ wenn $x = n\pi$ (n Element von N)
- $al = n\pi$
- $a = n*\pi/l$
- $b= n*\sqrt{(k/m)}\pi/l$

6.2 Superposition

- f(x,t) löst die Wellengleichung, g(x,t) löst die Wellengleichung

  → b(x,t)=A*f(x,t) + g(x,t) löst die Wellengleichung

- $c(x,t)=A_1*f_1(x,t) + A_2*f_2(x,t) + A_3*f_3(x,t) + \ldots + A_n*f_n(x,t)$ mit f_1 als Grundton und n-1 Obertönen

- Darstellung von Fourier-Reihen, z.B. bei der Dreiecksschwingung, der Rechteckschwingung, der Sägezahnschwingung

- Beispiele:
  - s(x,t)= sin(x/10+t)+1/2*sin(2x/10+t)+1/3*sin(3x/10+t)+1/4*sin(4x/10+t)+1/5*sin(5x/10+t)+…
  - r(x,t)= sin(x/2+t)+1/3*sin(3x/2+t)+1/5*sin(5x/2+t)+1/7*sin(7x/2+t)+1/9*sin(9x/2+t)+…

Quellen

- https://cdn.pixabay.com/photo/2015/02/26/15/34/piano-650490_960_720.jpg
- http://www.hoerplus.de/img/hoeren-und-verstehen/schallwellen.jpg
- https://i.ytimg.com/vi/QkLDhkZ5ank/hqdefault.jpg
- http://de.bettermarks.com/wp-content/uploads/media/kem_Tri_TriBaDBez_3.jpg
- http://www.sengpielaudio.com/Bogenmass01.gif
- https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/7/71/Sine_cosine_one_period.svg/2000px-Sine_cosine_one_period.svg.png
- https://www.oberton.org/wp-content/uploads/obertonreihe-A110Hz_trsp600.png
- http://www.mathe-online.at/materialien/bernhard.ruttinger/files/LP_Differential/Images/Ableitung.png
- http://daten.didaktikchemie.uni-bayreuth.de/umat/wellen_mechanisch/wellen_mechanisch.htm