Themen für Bachelor-Arbeiten

Ansprechpartner: Prof. Stefan Neukamm (Angewandte Analysis)

Die *Angewandte Analysis* beschäftigt sich mit Mathematik an der Schnittstelle zu den Natur-, Ingenieurs- und Lebenswissenschaften. Sie möchte beispielsweise Phänomene der Natur durch mathematische Modellierung und Analysis verstehen. Häufig führt sie hierbei auf tiefgreifende und spannende, mathematischen Fragestellungen, welche in vielen Fällen die Weiterentwicklung mathematischer Methoden und die Verbindung verschiedener mathematischer Diszplinen erfordert. Die Arbeitsgebiete der Professur für Angewandte Analysis umfassen im Schwerpunkt:

- Partielle Differentialgleichungen, Anwendungen der Funktionalanalysis und Variationsrechnung
- Mehrskalenanalysis (Homogenisierung, Dimensionsreduktion)
- Kontinuumsmechanik (Nichtlineare Elastizitätstheorie, Plastizität)
- Materialien mit Mikrostruktur, Random Media

Die hier aufgelistet Vorschläge für eine Bachelorarbeit thematisieren diese Schwerpunkte oder beschäftigen sich mit den hierfür relevanten mathematischen Grundlagen aus dem Bereich der Funktionalanalysis, der Theorie partieller Differentialgleichungen und der Modellierung.

1. **Homogeniserung und Zwei-Skalen Konvergenz**.
   Wir betrachten *partielle Differentialgleichungen* der Form

   $$-\nabla \cdot A_\varepsilon(x)\nabla u(x) = f(x),$$

   wobei die Koeffizientenmatrix $A_\varepsilon(x)$ auf einer kleinen Längenskala $\varepsilon > 0$ (periodisch) variiert. Die Homogenisierungstheorie beschäftigt sich mit dem Grenzübergang $\varepsilon \downarrow 0$ und führt auf die (viel einfacherer) Gleichung

   $$-\nabla \cdot A_0\nabla u_0(x) = f(x),$$

   wobei die Koeffizientenmatrix A_0 nicht mehr von x abhängig ist. In der Kontinuumsmechanik tauchen Problemstellungen dieser Art bei der effektiven Beschreibung von Materialien mit Mikrostruktur auf. Diese umfassen beispielsweise Knochen, geschäumte Metalle, Faserverbundwerkstoffe. Diese Materialien besitzen eine interessante Struktur, die erst "unter dem Mikroskop" sichtbar wird und entscheidend für das physikalische Verhalten (z.B. mechanische Eigenschaften, Wärmeleitfähigkeite) der Materialien ist. Eine mathematische Modellierung dieser mikrostrukturierten Materialien führt auf *partielle Differentialgleichungen* der obigen Form.
   Ziel: Beweis des Homogenisierungsresultates mit Hilfe der Methode der Zwei-Skalen-Konvergenz.
   Grundlagen: Funktionalanalysis, Sobolevräume, Schwache Lösungstheorie elliptischer Gleichungen.
   Literatur: Allaire, Grégoire. "Homogenization and two-scale convergence." SIAM Journal on Mathematical Analysis 23.6 (1992): 1482-1518.

2. **Homogenisierung von Integralfunktionalen**.
   Wir betrachten ein Integralfunktional der Form

   $$\mathcal{E}_\varepsilon(u) := \int_\Omega W(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla u(x))\, dx,$$

wobei der Integrand $W(y, F)$ periodisch in $y \in \mathbb{R}^d$ und konvex (oder auch nicht-konvex) in $F \in \mathbb{R}^n$ ist und $\varepsilon > 0$ einen kleinen positiven Skalenparameter bezeichnet. Funktionale dieser Art werden vielfältig zur Beschreibung mikrostrukturierter Materialien verwendet. Ein Homogenisierungstheorem besagt, dass die Funktionale $\mathcal{E}_\varepsilon$ für $\varepsilon \downarrow 0$ gegen ein Grenzfunktional der Form

$$\mathcal{E}_0(u) := \int_\Omega W_0(\nabla u(x))\, dx,$$

konvergieren, wobei sich W_0 durch ein Minimierungsproblem aus W ergibt.
Ziel: Beweis des Homogenisierungsresultates.
Grundlagen: Funktionalanalysis, Sobolevräume, schwache Konvergenz.
Literatur: Müller, Stefan. "Homogenization of nonconvex integral functionals and cellular elastic materials", Arch. Rational Mech. Anal., 99(3):189–212

3. **Die direkte Methode der Variationsrechnung und Quasikonvexität.**
   Die direkte Methode der Variationsrechnung beschäftigt sich u.a. mit der Frage, wann ein Funktional
   $$\mathcal{E}(u) := \int_\Omega W(\nabla u(x))\, dx, \qquad u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^d)$$
   Minimierer besitzt. Im einfachsten Fall ist $W(F) = \frac{1}{2}|F|^2$ und $\mathcal{E}$ gerade die Dirichlet-Energie, deren Minimierer harmonische Funktionen sind. Eine hinreichende Bedingung für die Existenz von Minimierern ist die Konvexität von W. In komplizierteren Fällen (z.B. in Modellen der nichtlinearen Elastizität) ist W jedoch nicht durch eine konvexe Funktion gegeben. Es stellt sich heraus, dass unter geeigneten Voraussetzungen die Existenz von Minimierern äquivalent zur *Quasikonvexität* von W ist. Ein zentraler Begriff ist hierbei die Unterhalbstetigkeit von Funktionalen bezüglich schwacher Konvergenz im Sobolev-Raum $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^d)$.
   Ziel: Erarbeiten der Grundlagen aus der Variationsrechnung (Schwache Konvergenz, Unterhalbstetigkeit, Lemma von Mazur, Quasikonvexität und weitere Konvexitätsbegriffe).
   Grundlagen: Funktionalanalysis, Sobolevräume, schwache Konvergenz.
   Literatur: B. Dacorogna. "Direct methods in the calculus of variations", Springer.

4. **Distributionen und die Unmöglichkeit diese zu multiplizieren.**
   Distributionen verallgemeinern den Funktionenbegriff und erlauben es Lösungen zu partiellen Differentialgleichungen auch dann zu definieren, wenn keine im klassichen Sinne zu erwarten sind. Beispielsweise löst das Newton-Potential $\Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\log|x|$, $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, welches bei 0 singulär ist, die Gleichung $-\triangle\Phi = \delta$ in einem distributionellen Sinn, wobei δ die berühmte Diracsche Delta-Distribution bezeichnet. Die mathematische Theorie der Distributionen geht auf L. Schwartz zurück. Dieser stellte auch fest, dass es unmöglich ist eine Multiplikation auf dem Raum der Distributionen zu definieren.
   Ziel: Erarbeiten der Grundlagen der Distributionen-Theorie; Ausarbeitung der Arbeit L. Schwartz "Sur limpossibilit de la multiplication des distributions", C. R. Acad. Sci. Paris, 239 (1954), p. 847-848.
   Grundlagen: Funktionalanalysis.
   Literatur: Lehrbücher, Originalarbeit.

5. **Die Fourier-Transformation und fraktionelle Sobolevräume.**
   Periodische, quadratintegrable Funktionen können durch Fourier-Reihen dargestellt werden. Die Fourier-Transformation verallgemeinert diese Darstellung auf nicht-periodische Funktionen. Sie bildet die Grundlagen vielfältiger Methoden zur Untersuchung partieller Differentialgleichungen auf $\mathbb{R}^d$ und erlaubt Ableitungen für nicht differenzierbare Funktionen zu definieren.

Ziel: Erarbeiten der Grundlagen der Distributionen-Theorie; Erörterung der Frage warum eine Multiplikation für Distributionen nicht möglich ist.
Grundlagen: Funktionalanalysis.
Literatur: Lehrbücher zur partiellen Differentialgleichungen, sowie: L. Schwartz, 1954, "Sur l'impossibilit de la multiplication des distributions", Comptes Rendus de L'Acadmie des Sciences 239, pp. 847-848.

6. **Gradientenflüsse.**
Viele zeitabhängige Prozesse lassen sich durch Gradientenflüsse der Form

$$\dot{u} = -\nabla \mathcal{E}(u)$$

beschreiben, wobei u eine zeitabhängige Zustandsgrösse und $\mathcal{E}$ ein Energiefunktional bezeichnet, welches jedem Zustand $u(t)$ einen Wert ("Energie") zuordnet. Im einfachsten Fall ist $\mathcal{E}$ durch eine glatte, stark konvexe Funktion auf $\mathbb{R}^d$ gegeben und der Gradientenfluss besitzt eine C^1-Lösung, welche durch ein variationelles Kriterium (*evolution variational inequality*) oder alternativ durch ein metrisches Kriterium (*curves of maximal slope*) characterisiert wird. Die Verallgemeinerung des Konzeptes des Gradientenflußes auf Funktionenräume, metrische Räume und nicht-konvexe Energiefunktionale sind Gegenstand aktueller Forschung.
Ziel: Charakterisierung von Gradientenflüssen auf $\mathbb{R}^d$ und metrischen Räumen.
Grundlagen: Funktionalanalysis.
Literatur: Sara Daneri and Guiseppe Savaré. "Lecture notes on gradient flows and optimal transport", `https://arxiv.org/abs/1009.3737v1`.