

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1

1. Woche – Wiederholung Abiturstoff + etwas Ausblick

Funktionen

A1 Zeichnen Sie (ohne Taschenrechner!) folgende Funktionen

- (a) $f(x) = 2^x, g(x) = 3^x$ (ggf. erst eine kleine Wertetabelle erstellen).
- (b) ($e \approx \dots$?) $f(x) = e^x = \exp(x), g(x) = f(-x) = e^{-x}, h(x) = -f(x) = -e^x$ sowie $y = 1 - e^{-x}$.
- (c) $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (ohne Tafelwerk!: Funktionen aus (b) grafisch addieren!)
- (d) $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (ohne Tafelwerk!: Funktionen aus (b) grafisch subtrahieren!)
- (e) $|x|, |x - 3|, 2 \cdot |x - 3|$. Kennzeichnen Sie auf der x-Achse den Bereich, für den gilt $|x - 3| < 4$ sowie den Bereich mit $|x - 3| \geq 4$ (grafisch denken!).
- (f) $|x + 1|, |x - 1|$ und $y = |x + 1| - |x - 1|$.
- (g) Sie werden öfter mit der Heaviside- bzw. Sprungfunktion arbeiten:

$$s(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t < 0 \\ 1, & \text{falls } t \geq 0 \end{cases}$$

Zu zeichnen: $s(t), s(t - 2), 2 \cdot s(t - 3)$ sowie $s(t - 2) - 2 \cdot s(t - 3)$

- (h) $\sin(x), \sin(-x), \sin(x + \frac{\pi}{2}), \cos(x), \tan(x), \arctan(x)$

A2 Geben Sie folgende Funktionswerte der Sinusfunktion an (ohne Tafelwerk/Rechner!): am rechtwinkligen Dreieck mit Definition Sinus und mit Pythagoras arbeiten und in dem in der Tabelle vorgeschlagenen Format angeben!

α	0	30°	45°	60°	90°
sin α	$\frac{\sqrt{\dots}}{2}$	$\frac{\sqrt{\dots}}{2}$	$\frac{\sqrt{\dots}}{2}$	$\frac{\sqrt{\dots}}{2}$	$\frac{\sqrt{\dots}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{\dots}}{2}$	$\frac{\sqrt{\dots}}{2}$	$\frac{\sqrt{\dots}}{2}$	$\frac{\sqrt{\dots}}{2}$	$\frac{\sqrt{\dots}}{2}$
tan α					

In der höheren Mathematik geben wir Winkel in radian (im Bogenmaß) anstatt in Grad an, $0^\circ \sim 0, 180^\circ \sim \pi$. Rechnen Sie die obigen Winkel in radian um.

Lösung:

α	0	30°	45°	60°	90°
sin α	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
tan α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Nullstellen

A3 Lösen Sie folgende Gleichungen:

(a) $x^2 + 2x = 0$

(b) $(x - 3)(x + 2) = 0$ (Hingucken! Nicht dem 'Ausmultiplizier-Reflex' nachgeben.)

(c) Was besagt der Wurzelsatz von Vieta? Nutzen Sie ihn, um die Lösungen der Gleichungen zu 'sehen': $x^2 + 5x + 6 = 0$, $x^2 - 2x - 8 = 0$, $x^2 + 5x = 14$.

Lösung:

(a) $x^2 + 2x = x(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = -2$

(b) $x = 3 \vee x = -2$

(c) Regel von Vieta: $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - \underbrace{(x_1 + x_2)}_p x + \underbrace{x_1 x_2}_q$

$$x^2 + 5x + 6 \Rightarrow x = -2 \vee x = -3$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4 \vee x = -2$$

$$x^2 + 5x = 14 \Rightarrow x = -7 \vee x = 2$$

Analytische Geometrie

A4 (a) Zwei Vektoren \underline{a} und \underline{b} haben die Länge 2 bzw. 3 und schließen einen Winkel von 45° ein. Zeichnen Sie die Situation und geben Sie das Skalarprodukt der beiden Vektoren an.

(b) Skizzieren Sie eine Ebene im 3-dimensionalen Raum (im \mathbb{R}^3) und einen Normalvektor dazu (einen Vektor senkrecht zu der Ebene).

(c) Zeichnen Sie den Vektor $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ in ein 3-dim. Koordinatensystem. Überlegen Sie, für

welche Punkte (x, y, z) (geometrische Gestalt dieser Punktmenge) gilt: $\underline{a} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

Lösung:

(a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 45^\circ$
 $2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 \cdot \sqrt{2}$

(c) Ebene $\perp \underline{a}$ durch Koordinatenursprung

Integralrechnung

A5 Machen Sie sich (möglichst grafisch) klar

- (a) Das Integral $\int_{t_0}^{t_1} i(t)dt = q(t_1) - q(t_0)$ (mit q =Stammfunktion von i , also $\frac{dq}{dt} = i$) gibt die Fläche unter der Kurve $i(t)$ zwischen t_0 und t_1 an.
- (b) Das Integral $\int_{t_0}^t i(\tau)d\tau = q(t) - q(t_0)$ (mit $\frac{dq}{dt} = i$) ist die Fläche unter der Kurve $i(t)$ zwischen t_0 und **variablen rechten Rand** t . Sinnvollerweise nennt man die Integrationsvariable anders als die Integrationsgrenze (τ und nicht t).
- (c) Aus (b) folgt $q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^t i(\tau)d\tau$ (mit $\frac{dq}{dt} = i$), was der Summe aus dem **'Startwert'** zum **'Startzeitpunkt'** (linker Rand t_0) und dem Integral über ein variables (Zeit-) Intervall entspricht. Da die Integrationsgrenze von t abhängt, ist auch diese Summe eine Funktion von t und keine konstanter Wert wie im Fall (a).

Gleichungen und Ungleichungen

A6 Bringen Sie die beiden Terme 'auf einen Bruchstrich': $\frac{1}{(x-1)} - \frac{x}{(x-1)^2} =$

Lösung: $= \frac{-1}{(x-1)^2}$

A7 Lösen Sie die Gleichung $\frac{1}{e} = \frac{1}{a-1b} - \frac{1}{g}$ nach b auf! **Lösung:** $b = \frac{aeg}{e+g}$

A8 Geben Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $|x - 1| < 3$ an! **Lösung:** $-2 < x < 4$

A9 Welche der folgenden Aussagen sind wahr:

() Für alle $x, y \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2(1+y)} = x\sqrt{1+y}$,

() Für alle $x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+4} = x+2$,

Lösung: beide falsch; am besten mit Gegenbeispiel demonstrieren: $x = -1 \dots$