
Elektrodynamik

© Carsten Timm 2016

LaTeX und Abbildungen: J.-E. Wichmann, F. Peter, C. Timm
Institut für Theoretische Physik, Technische Universität Dresden

Version: 19. Juli 2024

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	4
1.1	Ziele und Stellung der Elektrodynamik	4
1.1.1	Geschichte der Elektrodynamik	4
1.1.2	Stellung der Elektrodynamik innerhalb der Theoretischen Physik	5
1.2	Überblick	5
1.3	Lehrbücher	6
1.4	Danksagung	7
2	Mikroskopische Elektrostatik	8
2.1	Das Coulomb-Gesetz	8
2.1.1	Kontinuierliche Ladungsdichte	9
2.1.2	Feldlinien	12
2.1.3	Elektrischer Dipol	12
2.2	Das Gaußsche Gesetz	14
2.3	Rotation von \vec{E} und skalares Potential	18
2.3.1	Das skalare Potential	19
2.3.2	Die Poisson- und die Laplace-Gleichung	22
2.3.3	Weitere Eigenschaften der Laplace-Gleichung	23
2.4	Elektrisches Feld an Grenzflächen	25
2.4.1	Geladene Fläche	25
2.4.2	Dipolschicht	27
2.5	Arbeit und Energie in der Elektrostatik	28
2.6	Leiter	31
2.6.1	Oberflächenladung und elektrisches Feld	33
2.7	Kondensatoren	34
2.7.1	Energie in Kondensatoren	36
2.8	Orthogonale Funktionensysteme	37
2.8.1	Sturm-Liouville-Probleme	40
2.8.2	Fourier-Transformation	41
2.9	Multipolentwicklung	42
2.9.1	Multipolentwicklung in kartesischen Koordinaten	42
2.9.2	Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten	45
2.9.3	Energie von Ladungsverteilungen	46
3	Randwertprobleme in der Elektrostatik	48
3.1	Greensche Sätze	48
3.2	Eindeutigkeitssätze	49
3.3	Bildladungsmethode	51
3.4	Separationsmethode	55
3.4.1	Separation in Kugelkoordinaten	57
3.5	Komplexifizierung	58
3.6	Green-Funktionen	60

4	Makroskopische Elektrostatik	63
4.1	Polarisation von Atomen und Molekülen	63
4.1.1	Induzierte Dipole	63
4.1.2	Polare Moleküle	65
4.2	Polarisation von Materie	66
4.3	Das Verschiebungsfeld	69
4.3.1	Anschlussbedingungen	70
4.4	Lineare Dielektrika	71
4.4.1	Die Laplace-Gleichung in Dielektrika	74
4.5	Energie und Kraft in Dielektrika	75
4.5.1	Feldenergie	75
4.5.2	Kräfte auf Dielektrika	76
5	Mikroskopische Magnetostatik	78
5.1	Die Lorentz-Kraft	78
5.2	Ströme	81
5.2.1	Die Kontinuitätsgleichung	82
5.2.2	Kraft und Drehmoment auf Stromschleifen	83
5.3	Das Biot-Savart-Gesetz	84
5.4	Das Ampèresche Gesetz	87
5.4.1	Die ideale Spule	89
5.5	Quellenfreiheit des Induktionsfeldes und Vektorpotential	90
5.5.1	Vektorpotential und magnetischer Fluss	93
5.5.2	Induktionsfeld an Stromschichten	94
5.6	Multipolentwicklung	95
6	Makroskopische Magnetostatik	97
6.1	Magnetische Dipolmomente	97
6.1.1	Permanente magnetische Momente	97
6.1.2	Induzierte magnetische Momente	99
6.2	Magnetisierung von Materie	100
6.3	Das Magnetfeld \vec{H}	103
6.4	Lineare Medien	105
7	Lineare Leiter in statischen Feldern	107
7.1	Das Ohmsche Gesetz	107
7.2	Induktionsfeld in Leitern und Supraleitern	109
7.3	Der Hall-Effekt	110
8	Elektrodynamik	111
8.1	Das Faradaysche Induktionsgesetz	111
8.1.1	Bewegungsinduktion	112
8.1.2	Ruheinduktion und allgemeines Induktionsgesetz	113
8.2	Das Ampère-Maxwell-Gesetz	114
8.3	Die Maxwell-Gleichungen	116
8.4	Potentiale und Eichinvarianz	117
8.4.1	Potentiale	117
8.4.2	Eichinvarianz	118
8.4.3	Eichinvarianz der Mechanik	120
8.5	Energie, Impuls und Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes	120
8.5.1	Energiedichte und Poynting-Vektor	120
8.5.2	Impuls des Feldes und Maxwellscher Spannungstensor	122
8.5.3	Drehimpuls des Feldes	125
8.6	Quasistationäre Felder und Stromkreise	127
8.6.1	Induktivitäten	128
8.6.2	Stromkreise	129

9	Elektromagnetische Wellen	131
9.1	Elektromagnetische Wellen im Vakuum	131
9.1.1	Energie, Impuls und Drehimpuls elektromagnetischer Wellen	135
9.1.2	Green-Funktionen und Beugung	137
9.2	Elektromagnetische Wellen in linearen Isolatoren	141
9.2.1	Brechung und Reflexion: Grundgesetze der geometrischen Optik	142
9.2.2	Brechung und Reflexion: Polarisierte Wellen	144
9.3	Elektromagnetische Wellen in linearen Leitern	150
10	Relativistische Formulierung der Elektrodynamik	154
10.1	Spezielle Relativitätstheorie	154
10.2	Viererdarstellung der Elektrodynamik	158
10.2.1	Die Kontinuitätsgleichung	158
10.2.2	Potentiale	159
10.2.3	Der Feldstärketensor	160
10.2.4	Der duale Feldstärketensor	164
10.2.5	Elektromagnetische Wellen	165
11	Retardierte Felder	166
11.1	Felder bewegter Ladungen	166
11.1.1	Liénard-Wiechert-Potentiale	168
11.2	Strahlung	170
11.2.1	Harmonisch oszillierende Quellen	171
11.2.2	Elektrische Dipolstrahlung	172
11.2.3	Elektrische Quadrupol- und magnetische Dipolstrahlung	174
11.2.4	Abstrahlung bewegter Punktladung	178
12	Variationsprinzip der Elektrodynamik	182
12.1	Lagrange-Formalismus für Felder	182
12.2	Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Feldes und Maxwell-Gleichungen	183
A	Mathematische Grundlagen	186
A.1	Vektoren und Koordinatensysteme	186
A.1.1	Produkte von Vektoren	186
A.1.2	Felder und partielle Ableitungen	187
A.1.3	Koordinatensysteme	188
A.1.4	Vektoren und Pseudovektoren	194
A.2	Vektoranalysis: Ableitungen im \mathbb{R}^3	195
A.2.1	Erste Ableitungen	195
A.2.2	Zweite Ableitungen	200
A.3	Vektoranalysis: Integration im \mathbb{R}^3	202
A.3.1	Der Fundamentalsatz	208
A.3.2	Potentiale	211
A.4	Die Diracsche δ -Funktion	214
A.4.1	Die δ -Funktion in einer Dimension	215
A.4.2	Die δ -Funktion im \mathbb{R}^3	217
A.5	Die Taylor-Reihe	217

Kapitel 1

Einführung

1.1 Ziele und Stellung der Elektrodynamik

Diese Vorlesung bildet den zweiten Teil des Vorlesungszyklus zur Theoretischen Physik. Sie beschäftigt sich mit der klassischen Theorie des elektromagnetischen Feldes und der elektrischen Ladungen und Ströme. Dabei geht es auch um die Bewegung geladener Teilchen, insofern setzen wir die klassische Mechanik voraus.

1.1.1 Geschichte der Elektrodynamik

Historisch ist die Elektrodynamik aus drei ursprünglich strikt getrennten Feldern entstanden:

1. Elektrizität: Blitze, statische Aufladung, elektrische Ströme, Elektrochemie,
2. Magnetismus: Magneteisensteine, Kompass und Erdmagnetfeld,
3. Optik: Licht, Reflektion, Brechung, Beugung.

Die meisten dieser Effekte waren bereits in der Antike bekannt. Aber bis ungefähr 1820 war nicht klar, dass sie etwas miteinander zu tun haben. 1820 entdeckte H. C. Ørsted, dass ein elektrischer Strom eine Kompassnadel ablenken kann. Daraufhin schlug A.-M. Ampère noch im selben Jahr vor, dass alle magnetischen Erscheinungen auf bewegten Ladungen beruhen. Das ist letztendlich korrekt. 1831 entdeckte M. Faraday, dass umgekehrt ein bewegter Magnet elektrische Ströme hervorrufen kann (Induktion). Diese und weitere Experimente legten nahe, dass Elektrizität und Magnetismus nur zwei Aspekte derselben zugrundeliegenden Physik sind. Man konnte daher erwarten, dass sie sich durch eine *vereinheitlichte* Theorie beschreiben lassen. Diese wurde von J. C. Maxwell aufbauend auf zahlreichen Vorarbeiten von anderen vollendet und 1864 veröffentlicht. Die Maxwellsche Elektrodynamik ist neben der korrekten Beschreibung elektromagnetischer Phänomene auch aus weiteren Gründen konzeptionell sehr wichtig:

- Sie war die erste *vereinheitlichte Theorie*. Das Ziel der Vereinheitlichung ist ein wichtiges Paradigma in der Entwicklung neuer Theorien, z. B. der elektroschwachen Wechselwirkung (Vereinheitlichung von Elektromagnetismus und schwacher Kraft).
- Sie ist der Prototyp einer *Feldtheorie*.
- Sie war entscheidend für die Entwicklung der *Speziellen Relativitätstheorie*. Tatsächlich ist sie bereits eine relativistische (kovariante) Theorie, auch wenn man ihr das nicht gleich ansieht.

Die Maxwellschen Gleichungen sagen elektromagnetische Wellen voraus. Sie liefern damit eine solide Basis für eine Spekulation von Faraday, wonach Licht ein elektromagnetisches Phänomen sein sollte. Elektromagnetische Wellen wurden 1888 von Heinrich Hertz nachgewiesen, was die Maxwellsche Theorie glänzend bestätigte. Damit war die Optik ebenfalls ein Aspekt der vereinheitlichten Theorie des Elektromagnetismus geworden.

1.1.2 Stellung der Elektrodynamik innerhalb der Theoretischen Physik

Gemäß der Unterscheidung von Massenpunkten und Feldern sowie von klassischer und Quantenphysik können wir folgende Tabelle aufstellen:

	Massenpunkte	Felder
Klassische Theorien	Klassische Mechanik	Kontinuumsmechanik <ul style="list-style-type: none"> • Aerodynamik • Hydrodynamik • Elastizitätstheorie <i>Elektrodynamik</i> Allgemeine Relativitätstheorie
Quantentheorien	Quantenmechanik	Quantenfeldtheorien <ul style="list-style-type: none"> • Quantenelektrodynamik • Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung • Quantenchromodynamik • Quantengravitation?

Auch die Quantenmechanik für Massenpunkte führt, in der Formulierung durch E. Schrödinger, ein Feld ein, nämlich die Wellenfunktion $\psi(\vec{r}, t)$. Ein *Feld* ist ganz allgemein eine Größe, die vom Ort \vec{r} abhängt. Es kann zusätzlich von der Zeit t abhängen. Felder werden mathematisch sinnvollerweise durch *partielle Differentialgleichungen* beschrieben, d. h. Differentialgleichungen, die Ableitungen nach mehreren Variablen – hier i. A. x, y, z, t – enthalten. Daneben ist auch für Felder, wie in der Klassischen Mechanik, eine Beschreibung durch *Variationsprinzipien* möglich.

1.2 Überblick

Die folgenden Themen werden in diesem Skript behandelt:

- Elektrostatik (mikroskopische Theorie)
- Makroskopische Elektrostatik (Dielektrika)
- Magnetostatik (mikroskopische Theorie)
- Makroskopische Magnetostatik
- Elektrodynamik (Maxwell-Gleichungen)
- Elektromagnetische Wellen
- Kovariante Formulierung
- Retardierte Felder
- Variationsprinzip der Elektrodynamik

Neue mathematische Methoden betreffen vor allem die Lösung partieller Differentialgleichungen und auch die Entwicklung in vollständige Funktionensysteme. Anwendungen der Methoden werden meist in den Übungen diskutiert. Mathematische Grundlagen werden wir ebenfalls gelegentlich in den Übungen behandeln. Ein speziell für die Elektrodynamik wesentlicher Punkt betrifft das Einheitensystem. Diese Vorlesung verwendet SI-Einheiten.

1.3 Lehrbücher

Die zahlreichen verfügbaren Lehrbücher der Elektrodynamik unterscheiden sich recht stark in Stoffumfang und Stil. Die meisten, aber nicht alle, neueren Bücher verwenden zumindest teilweise SI-Einheiten, was bei der Auswahl auch eine Rolle spielen könnte. Sie sollten einige Bücher durchblättern, um zu entscheiden, welches Ihnen am meisten liegt. Es ist empfehlenswert, ein Buch zu kaufen und zu behalten, um später Stoff wiederholen zu können. Hier ist eine unvollständige Liste von Lehrbüchern:

- W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik, Band 3: Elektrodynamik*, 8. Aufl. (Springer-Verlag, Berlin, 2007): Die gesamte Reihe von Lehrbüchern ist empfehlenswert. Nolting legt relativ großes Gewicht auf das Einüben der Formalismen und entsprechend weniger auf die ausführliche Diskussion des physikalischen Gehalts. Er führt Herleitungen oft im Detail vor, wo andere Autoren nur das Ergebnis angeben. Die Darstellung ist überwiegend klar und korrekt. Nolting verwendet SI-Einheiten. Relevante mathematische Grundlagen werden in einem eigenen 1. Kapitel behandelt, fortgeschritteneres mathematisches Material in eigenen Abschnitten im Text. Alle Bände enthalten gute Übungsaufgaben mit Lösungen. Sie enthalten auch viele nützliche Kontrollfragen. Allerdings findet sich das Material zur relativistischen Formulierung nicht in Band 3, sondern in *Grundkurs Theoretische Physik, Band 4: Spezielle Relativitätstheorie, Thermodynamik*, 6. Aufl. (Springer-Verlag, Berlin, 2005).
- D. J. Griffiths, *Elektrodynamik: Eine Einführung*, 3. Aufl. (Pearson Studium, München, 2011): Deutsche Übersetzung eines in den U.S.A. weit verbreiteten *undergraduate* (B.Sc.) Lehrbuchs. Das technische Niveau ist daher etwas niedriger als bei anderen Büchern, Griffiths deckt aber einen relativ großen Teil dieser Vorlesung ab. Griffiths legt deutlich mehr Wert auf die klare Diskussion der Physik und der Bedeutung der Formalismen, was als Vorzug im Vergleich zu den übrigen Büchern gelten kann. Griffiths verwendet SI-Einheiten. Das Buch enthält Aufgaben, nur z. T. mit Lösungen. Der im englischen Original angenehm informelle Stil des Buches ist in der – ansonsten guten – deutschen Übersetzung weitgehend verloren gegangen.
- J. D. Jackson, *Klassische Elektrodynamik*, 4. Aufl. (de Gruyter, Berlin, 2006): Deutsche Übersetzung des klassischen *graduate* (M.Sc.) U.S.-Lehrbuchs. Technisch deutlich anspruchsvoller als die vorgenannten Bücher, geht im Stoffumfang auch deutlich über die Vorlesung hinaus. Die hier wichtigen Konzepte werden aber sorgfältig besprochen. Eventuell nützlich zum Nachlesen über mathematische Methoden. Jackson verwendet überwiegend SI-Einheiten, bei der Diskussion der relativistischen Formulierung aber Gaußsche Einheiten, was die Ausdrücke geringfügig vereinfacht. Das Buch enthält Aufgaben ohne Lösungen.
- W. Greiner, *Theoretische Physik, Band 3: Klassische Elektrodynamik*, 7. Aufl. (Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main, 2008): Ebenfalls Teil einer Reihe von Lehrbüchern zur Theoretischen Physik. Die Reihenfolge der Präsentation und insbesondere die Gliederung sind teilweise verwirrend. Greiner legt ebenfalls recht großes Gewicht auf den Formalismus, enthält aber im Vergleich zu Noltings Buch etwas weniger Zwischenschritte in Herleitungen. Der Stoffumfang ist knapper als bei Jackson und etwas größer als bei Nolting, wobei die relativistische Formulierung enthalten ist. Greiner verwendet Gaußsche Einheiten. Mathematische Abschnitte sind in den Text eingeschoben. Das Buch enthält Beispiele und einige Aufgaben mit Lösungen. Als Spezialität enthält es relativ viele historische Anmerkungen.
- L. D. Landau und E. M. Lifschitz, *Klassische Feldtheorie*, 12. Aufl. (Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main, 1997): Teil einer Reihe von russischen Lehrbüchern der Theoretischen Physik in deutscher Übersetzung, hier v. a. als „Klassiker“ genannt. Das Buch enthält die Elektrodynamik und die Allgemeine Relativitätstheorie (!), also die beiden wichtigsten klassischen Feldtheorien. Technisch anspruchsvoll und sehr knapp in der Darstellung. Zwischenschritte werden nie angegeben. Kann zum Nachlesen nützlich sein, wenn nichts anderes hilft. Enthält einige schwierige Aufgaben ohne Lösungen.
- R. P. Feynman, R. B. Leighton und M. Sands, *Feynman-Vorlesungen über Physik, Band II: Elektromagnetismus und Struktur der Materie* (Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München, September 2007): Dieses Buch fällt aus der Rahmen, da es kein Lehrbuch der Theoretischen Physik ist, sondern aus Richard Feynmans Einführungsvorlesungen, konkret dem Analogon der Experimentalphysik II, entwickelt wurde. Es hat für ein Lehrbuch zur Einführungsvorlesung jedoch ein hohes Niveau. Die Darstellung ist didaktisch sehr gut und noch ausführlicher als in Griffiths Buch, weshalb es evtl. als Zweitlektüre geeignet ist. Das Buch verwendet SI-Einheiten. Keine Aufgaben.

Vertiefte Informationen zu Theorie und Lösungsmethoden für partielle Differentialgleichungen finden sich in meinem Skript zu diesem Thema unter <http://www.physik.tu-dresden.de/~timm/personal/skript/pde.pdf>.

1.4 Danksagung

Ein Teil dieses Skripts ist aus meinen Vorlesungsnotizen für die Theoretische Elektrodynamik im Lehramtsstudium entstanden. Ich danke Frau Franziska Peter für die Erstellung der ursprünglichen LaTeX-Datei und der Abbildungen der ersten Version des Lehramts-Skripts. Außerdem bin ich Herrn Thomas Beyer und auch Herrn Jan-Erik Wichmann für Hinweise auf Tippfehler und Unklarheiten im Lehramts-Skript dankbar. Ich danke Herrn Jan-Erik Wichmann für die Erstellung der LaTeX-Datei und neuer Abbildungen für die Vorlesung Theoretische Elektrodynamik im Hauptfach Physik.

Kapitel 2

Mikroskopische Elektrostatik

Eine der Fragen, die die Elektrodynamik beantworten soll, ist folgende: Gegeben die (evtl. zeitabhängigen) Orte $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots$ von (Quell-) Ladungen q_1, q_2, \dots , wie verläuft die Bewegung einer weiteren Ladung, der Probeladung q ? Also sind $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \dots$ und geeignete Anfangsbedingungen für die Probeladung gegeben und die Trajektorie $\vec{r}(t)$ der Probeladung ist gesucht. Diese Formulierung der Aufgabe setzt offenbar voraus, dass die Bewegung der Probeladung die Trajektorien der Quellladungen nicht beeinflusst – andernfalls müssten wir die gekoppelten Bewegungsgleichungen für alle Ladungen lösen. Die Annahme ist sinnvoll, wenn die Probeladung klein ist, d. h., wenn für alle i gilt $|q| \ll |q_i|$. (Dies ist bei Weitem nicht die einzige Art von Frage, die wir stellen können – elektromagnetische Phänomene existieren auch ohne Quellladungen, z. B. Licht.) Die Newton-Mechanik zeigt, dass wir die Trajektorie $\vec{r}(t)$ im Prinzip bestimmen können, wenn wir die zu jedem Zeitpunkt auf die Probeladung wirkende Gesamtkraft kennen. Damit haben wir das Problem darauf zurückgeführt, die Kraft auf q aufgrund der Quellladungen q_1, q_2, \dots zu bestimmen. Die allgemeine Lösung ist nicht einfach – der Grund dafür ist, dass sich elektromagnetische Wirkungen nur mit einer endlichen Geschwindigkeit, der Lichtgeschwindigkeit c , ausbreiten. Die Kraft auf die Ladung q zur Zeit t aufgrund der Ladung q_i kann daher nicht vom Ort $\vec{r}_i(t)$ von q_i zur Zeit t abhängen, sondern nur vom Ort $\vec{r}_i(t')$ zur Zeit $t' < t$, wobei eine Wirkung im Zeitintervall $t - t'$ gerade den Weg zwischen q_i (zur Zeit t') und q (zur Zeit t) zurücklegt. Dies bedeutet

$$|\vec{r}(t) - \vec{r}_i(t')| = c(t - t'). \quad (2.1)$$

Das ist selbst eine komplizierte Gleichung für t' , die auch von der noch unbekanntem Trajektorie $\vec{r}(t)$ abhängt. Wir kommen gegen Ende der Vorlesung auf die Berechnung der resultierenden zeitverzögerten (*retardierten*) Kräfte zurück. Sind die Quellladungen in Ruhe, wird das Problem viel einfacher. Diese Annahme definiert die *Elektrostatik*, um die es in diesem Kapitel geht.

Das Auffinden der Gesamtkraft auf die Probeladung wird durch das *Superpositionsprinzip* stark vereinfacht: Ist \vec{F}_i die Kraft auf q aufgrund von q_i , so ist die Gesamtkraft die vektorielle Summe

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots \quad (2.2)$$

Die Gültigkeit des Superpositionsprinzips ist eine Erfahrungstatsache für das elektromagnetische Feld, es gilt aber nicht in jeder Feldtheorie. Die klassische Feldtheorie der Gravitation, also die Allgemeine Relativitätstheorie, erfüllt das Superpositionsprinzip z. B. nicht. Die beobachtete Gültigkeit schränkt sowohl die Form der das Feld selbst beschreibenden Gleichungen (also der „ungestörten Dynamik“ des Feldes) als auch die Form der Kopplung der Ladungen an das Feld deutlich ein. Wegen des Superpositionsprinzips reicht es aus, die Wirkung *einer* Quellladung zu untersuchen.

2.1 Das Coulomb-Gesetz

Experimentell findet man, dass die Kraft einer Quellladung q' in Ruhe am Ort \vec{r}' auf eine Punktladung q am Ort \vec{r} gegeben ist durch das *Coulomb-Gesetz* (in SI-Einheiten)

$$\vec{F} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\widehat{\Delta r}}{(\Delta r)^2} \equiv \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{\Delta r}}{(\Delta r)^3} \quad (2.3)$$

mit dem Abstandsvektor

$$\vec{\Delta r} := \vec{r} - \vec{r}', \quad (2.4)$$

dessen Betrag, dem Abstand

$$\Delta r := |\vec{\Delta r}| = |\vec{r} - \vec{r}'| \quad (2.5)$$

und dem Einheitsvektor

$$\widehat{\Delta r} := \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta r} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.6)$$

ϵ_0 heißt die *Permittivität des Vakuums* oder *Influenzkonstante*. Der Vorfaktor $1/4\pi\epsilon_0$ beruht nur auf dem Einheitensystem, wir könnten den Faktor $1/\sqrt{4\pi\epsilon_0}$ in die Ladung absorbieren, was auf Gaußsche Einheiten führt. Physikalisch bedeutsam sind dagegen folgende Beobachtungen: Die Kraft \vec{F} ist

- proportional zur Quellladung und zur Probeladung,
- proportional zu $1/(\Delta r)^2$ (Δr ist der Abstand),
- entlang der Verbindungslinie zwischen den Ladungen gerichtet, d. h. eine *Zentralkraft*, und
- abstoßend für gleichnamige und anziehend für verschiedennamige Ladungen.

Wir berechnen die Rotation $\vec{\nabla} \times \vec{F}$. Dazu legen wir den Koordinatenursprung in den Punkt \vec{r}' , also $\vec{r}' = 0$, und verwenden Kugelkoordinaten. Dann gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times F_r \hat{r} = \frac{\hat{\theta}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} F_r - \frac{\hat{\varphi}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} F_r. \quad (2.7)$$

Nun ist aber

$$F_r = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad (2.8)$$

unabhängig von θ und φ und daher $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$. Damit ist die Coulomb-Kraft *konservativ* und es existiert ein Potential. Für mehrere Quellladungen q_i bei \vec{r}_i liefert das Superpositionsprinzip die Gesamtkraft

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{(\Delta r_i)^2} \widehat{\Delta r}_i \quad (2.9)$$

mit $\widehat{\Delta r}_i = \vec{r} - \vec{r}_i$ usw.

Die Kraft ist offenbar proportional zur Probeladung q . Wir können die Abhängigkeit von der Probeladung also abspalten und schreiben

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (2.10)$$

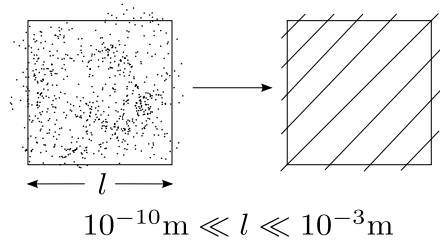
mit dem *elektrischen Feld* am Ort \vec{r} ,

$$\vec{E}(\vec{r}) := \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{(\Delta r_i)^2} \widehat{\Delta r}_i. \quad (2.11)$$

Das Feld \vec{E} ist also unabhängig von der Probeladung q und insbesondere unverändert für $q \rightarrow 0$. Dies legt nahe, dem Feld \vec{E} eine von Probeladungen unabhängige Existenz zuzuschreiben. Es wäre dann nicht nur eine Hilfsgröße bei der Berechnung von Kräften. Für die eigenständige Existenz von \vec{E} spricht, dass wir später nicht-triviale Bewegungsgleichungen für \vec{E} in Abwesenheit von Ladungen erhalten werden. Kurz: elektromagnetische Wellen breiten sich auch aus, wenn man sie nicht mit Hilfe von Probeladungen nachweist.

2.1.1 Kontinuierliche Ladungsdichte

Die fundamentalen Ladungsträger (Elektronen, Quarks, ...) sind nach heutiger Erkenntnis punktförmig. Es ist aber oft praktisch, von einer kontinuierlichen Ladungsverteilung auszugehen. Wenn wir nur an Effekten auf Längenskalen groß im Vergleich zu atomaren Abständen (ungefähr $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$) interessiert sind, können wir die Ladungsverteilung über Bereiche *groß gegen atomare Abstände aber klein gegen makroskopische Längen* mitteln:



Dadurch erhalten wir eine *kontinuierliche* Ladungsverteilung. Wir gehen von diskreten Punktladungen q_i zu infinitesimalen Ladungselementen dq über:

$$q_i \rightarrow dq = \begin{cases} \lambda dl & \text{in einer Dimension,} \\ \sigma ds & \text{in zwei Dimensionen,} \\ \rho dV & \text{in drei Dimensionen.} \end{cases} \quad (2.12)$$

Hier ist

- λ die *Linienladungsdichte* (Ladung pro Länge),
- σ die *Flächenladungsdichte* (Ladung pro Fläche) und
- ρ die *Volumenladungsdichte* oder einfach *Ladungsdichte* (Ladung pro Volumen).

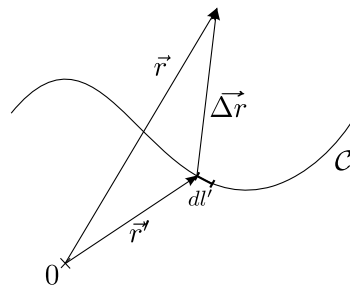
Im Coulomb-Gesetz für das elektrische Feld wird die Summe über die Punktladungen zu einem Integral, formal

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dq(\vec{r}') \frac{\widehat{\Delta r}}{(\Delta r)^2} \quad (2.13)$$

mit $\vec{\Delta r} = \vec{r} - \vec{r}'$ usw. und dem Ladungselement $dq(\vec{r}')$ am Ort \vec{r}' . Dies ergibt

- in 1D:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C dl' \lambda(\vec{r}') \frac{\widehat{\Delta r}}{(\Delta r)^2}, \quad (2.14)$$



- in 2D:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S ds' \sigma(\vec{r}') \frac{\widehat{\Delta r}}{(\Delta r)^2}, \quad (2.15)$$

- in 3D:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V dV' \rho(\vec{r}') \frac{\widehat{\Delta r}}{(\Delta r)^2}. \quad (2.16)$$

Wir können natürlich in allen Fällen

$$\frac{\widehat{\Delta r}}{(\Delta r)^2} = \frac{\vec{\Delta r}}{(\Delta r)^3} \quad (2.17)$$

ausnutzen, was die Rechnung oft erleichtert. Die dreidimensionale Version ist tatsächlich ganz allgemein. Wir erhalten die 0D (Punktladung), 1D und 2D Resultate durch Einsetzen von geeigneten δ -Funktionen für die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$. Zum Beispiel für

$$\rho(\vec{r}) = q_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (2.18)$$

erhalten wir

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} dV' q_0 \delta(\vec{r}' - \vec{r}_0) \frac{\widehat{\Delta r}}{(\Delta r)^2} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} dV' \delta(\vec{r}' - \vec{r}_0) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}, \quad (2.19)$$

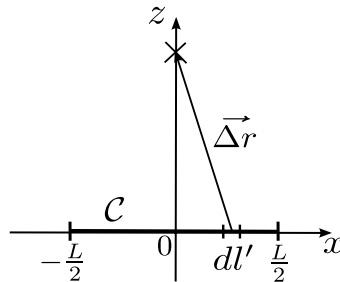
also das Feld einer Punktladung.

Es wird später nützlich sein, zu quantifizieren, wie viel elektrisches Feld durch eine gegebene Fläche \mathcal{S} hindurch tritt. Dies wird durch den *elektrischen Fluss* beschrieben. Dieser lautet

$$\Phi_E = \iint_{\mathcal{S}} d\vec{s} \cdot \vec{E}. \quad (2.20)$$

(Man sollte sich nicht vorstellen, dass hier etwas durch die Fläche hindurch strömt.) Offensichtlich ist $\Phi_E = 0$, wenn das Feld parallel zur Fläche \mathcal{S} liegt, und betragsmäßig maximal, wenn es senkrecht zu ihr steht.

■ Beispiel: Berechne das Feld \vec{E} im Abstand z über dem Mittelpunkt eines dünnen Drahtes der Länge L mit gleichförmiger Linienladungsdichte λ .



Aus Symmetriegründen ist $\vec{E} \parallel \hat{z}$. Es gilt

$$\begin{aligned} E_z(0, 0, z) &= \hat{z} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{C}} dl' \lambda \frac{\vec{\Delta r}}{(\Delta r)^3} = \hat{z} \cdot \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} dx' \frac{z\hat{z} - x'\hat{x}}{[z^2 + (x')^2]^{3/2}} \\ &= \frac{\lambda z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} dx' \frac{1}{[z^2 + (x')^2]^{3/2}} \stackrel{\text{Tafel}}{=} \frac{\lambda z}{4\pi\epsilon_0} \frac{x'}{z^2 \sqrt{z^2 + (x')^2}} \Big|_{-L/2}^{L/2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda L}{z \sqrt{z^2 + (L/2)^2}}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Es ist oft nützlich, Grenzfälle zu betrachten:

(a) $z \gg L$:

$$E_z \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda L}{z^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2}, \quad (2.22)$$

das ist das Feld einer Punktladung $Q = \lambda L$.

(b) $z \ll L$:

$$E_z \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{z}. \quad (2.23)$$

Damit haben wir das Ergebnis für einen unendlich langen Draht gefunden. Das Feld ist in diesem Fall natürlich unabhängig von x und hängt nur vom Abstand z vom Draht ab. Beachte, dass das Feld mit $1/z$, also schwächer als für eine Punktladung, abfällt.

Im Prinzip haben wir nun das Problem schon gelöst, die Kraft auf eine Punktladung aufgrund beliebiger Quellladungen zu bestimmen. Das ist aber aus zwei Gründen noch nicht ausreichend:

1. Die Auswertung des Integrals ist oft schwierig.
2. Bei Anwesenheit von Leitern kennen wir die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ gar nicht explizit, da sie vom Feld beeinflusst wird. Wir müssen Ladung und Feld zusammen ausrechnen.

Wir stellen jetzt einige Werkzeuge bereit, um diese Schwierigkeiten zu überwinden. Dies wird auch zu einem tieferen Verständnis des Zusammenhangs zwischen elektrischem Feld und Ladungen führen.

2.1.2 Feldlinien

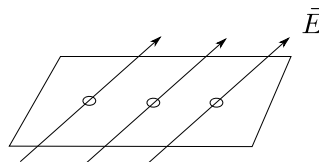
Eine Möglichkeit, ein Feld $\vec{E}(\vec{r})$ graphisch darzustellen, ist, an ausgewählten Punkten den Vektor $\vec{E}(\vec{r})$ durch einen Vektorpfeil wiederzugeben. Dies ist u. a. deshalb unpraktisch, weil \vec{E} mit zunehmender Entfernung von den Quellladungen schnell abnimmt. Besser ist die Darstellung durch Feldlinien. Die Feldlinien sind eine Schar von Raumkurven mit folgenden Eigenschaften:

1. $\vec{E}(\vec{r})$ ist überall tangential an den Feldlinien und zeigt in dieselbe Richtung.

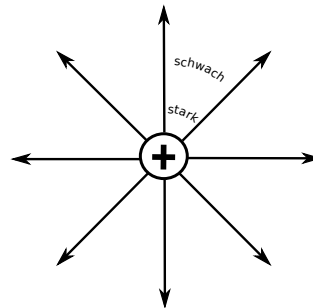


Dies impliziert, zusammen mit dem Coulomb-Gesetz, die folgenden Regeln:

2. Feldlinien beginnen (enden) nur an positiven (negativen) Ladungen. Die „Anzahl“ der an einer Ladung beginnenden (endenden) Feldlinien ist proportional zur Ladung (die Anzahl ist natürlich unendlich, aber wir zeichnen eine endliche Zahl von Linien, die proportional zur Ladung ist). Die Feldlinien gehen in alle Raumrichtungen gleichmäßig aus, da das Feld in der Nähe einer Punktladung *isotrop* ist.
3. Feldlinien schneiden sich nicht (außer an Orten mit singulärer Ladungsdichte, wo sie unstetig sind), denn sonst wäre $\vec{E}(\vec{r})$ am Schnittpunkt nicht eindeutig.
4. Die Dichte der Feldlinien ist proportional zur Feldstärke $|\vec{E}(\vec{r})|$. Damit ist der Fluss Φ_E des Vektorfeldes \vec{E} durch eine Fläche proportional zur Zahl der Feldlinien, die diese Fläche durchdringen.



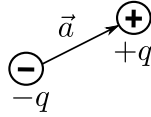
Aus dieser Regel kann man die korrekte Abstandsabhängigkeit des Feldes wieder gewinnen.



Dabei muss man aber aufpassen: Diese Skizze in zwei Dimensionen beschreibt ein Feld in zwei Dimensionen. Die Dichte der Feldlinien fällt wie $1/r$ ab, da ihre Anzahl konstant ist und der Umfang der Kreise proportional zu r anwächst. Dies legt nahe, dass $E(\vec{r}) \sim 1/r$, was in einem zweidimensionalen Universum tatsächlich stimmt, aber nicht in 3D. Es ist nützlich, sich die Feldlinien als in alle Raumrichtungen zeigend vorzustellen (Nadelkissen oder Seeigel). Dann ist die Oberfläche von Kugeln proportional zu r^2 und damit die Dichte der Feldlinien proportional zu $1/r^2 \sim E(\vec{r})$.

2.1.3 Elektrischer Dipol

Eine wichtige Ladungsanordnung, in gewissem Sinne die einfachste außer der Punktladung, ist der (elektrische) Dipol: Ein (*elektrischer*) *Dipol* wird durch zwei entgegengesetzt gleiche Punktladungen $\pm q$ mit dem Abstandsvektor \vec{a} , der von $-q$ nach $+q$ zeigt, realisiert.



Wir definieren das (elektrische) Dipolmoment

$$\vec{p} = q\vec{a}. \quad (2.24)$$

Die Spezifikation, dass es sich um einen *elektrischen* Dipol handelt, ist i. A. notwendig, da es auch *magnetische* Dipole gibt. Wir werden einfach von „Dipolen“ sprechen, wenn ihr Charakter aus dem Kontext klar ist.

Das Dipolmoment \vec{p} ändert sich offenbar nicht, wenn wir \vec{a} verringern und zugleich $\pm q$ um denselben Faktor vergrößern. Damit können wir den *Punktdipol* (oder *reinen Dipol*) definieren: Er entsteht durch den simultanen Grenzübergang $\vec{a} \rightarrow 0$ und $q \rightarrow \infty$ mit $\vec{p} = q\vec{a} = \text{const.}$

Ein Punktdipol erzeugt ein elektrostatisches Feld, das wir nun bestimmen wollen. Der Dipol befinde sich am Ort \vec{r}' . Dann sind die Orte der beiden Ladungen

$$\vec{r}_{\pm} = \vec{r}' \pm \frac{\vec{a}}{2} \quad (\text{wobei } \vec{a} \rightarrow 0) \quad (2.25)$$

Das elektrische Feld am Ort \vec{r} lautet dann

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}' - \frac{\vec{a}}{2}}{|\vec{r} - \vec{r}' - \frac{\vec{a}}{2}|^3} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}' + \frac{\vec{a}}{2}}{|\vec{r} - \vec{r}' + \frac{\vec{a}}{2}|^3} \quad (2.26)$$

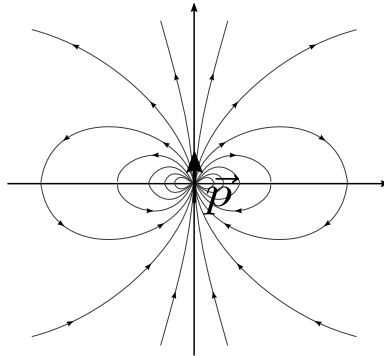
Hier ist die folgende Taylor-Reihe nützlich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{\Delta r} + \vec{b}|^3} &\cong \frac{1}{|\vec{\Delta r}|^3} + \left[\frac{\partial}{\partial \vec{b}} \frac{1}{|\vec{\Delta r} + \vec{b}|^3} \right]_{\vec{b}=0} \cdot \vec{b} \\ &= \frac{1}{|\vec{\Delta r}|^3} - \left[3 \frac{1}{|\vec{\Delta r} + \vec{b}|^4} \frac{\vec{\Delta r} + \vec{b}}{|\vec{\Delta r} + \vec{b}|} \right]_{\vec{b}=0} \cdot \vec{b} \\ &= \frac{1}{|\vec{\Delta r}|^3} - 3 \frac{\vec{\Delta r} \cdot \vec{b}}{|\vec{\Delta r}|^5}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

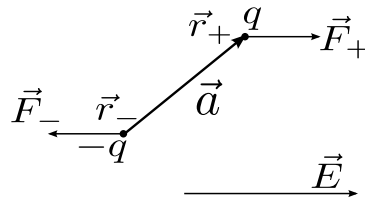
Damit wird für $\vec{a} \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{\Delta r} - \frac{\vec{a}}{2}}{|\vec{\Delta r}|^3} + 3 \frac{(\vec{\Delta r} - \frac{\vec{a}}{2}) \vec{\Delta r} \cdot \frac{\vec{a}}{2}}{|\vec{\Delta r}|^5} - \frac{\vec{\Delta r} + \frac{\vec{a}}{2}}{|\vec{\Delta r}|^3} + 3 \frac{(\vec{\Delta r} + \frac{\vec{a}}{2}) \vec{\Delta r} \cdot \frac{\vec{a}}{2}}{|\vec{\Delta r}|^5} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\vec{a}}{|\vec{\Delta r}|^3} + 3 \frac{(\vec{\Delta r} \cdot \vec{a}) \vec{\Delta r}}{|\vec{\Delta r}|^5} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(3 \frac{(\vec{\Delta r} \cdot \vec{p}) \vec{\Delta r}}{|\vec{\Delta r}|^5} - \frac{\vec{p}}{|\vec{\Delta r}|^3} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\widehat{\Delta r} \cdot \vec{p}) \widehat{\Delta r} - \vec{p}}{|\vec{\Delta r}|^3}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Dies ist das bekannte Dipolfeld, das hier für den Fall $\vec{r}' = 0$, $\vec{p} = p\hat{z}$ skizziert ist:



Wir betrachten abschließend einen Dipol in einem externen, homogenen \vec{E} -Feld:



Die Gesamtkraft auf den Dipol ist

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q\vec{E} - q\vec{E} = 0. \quad (2.29)$$

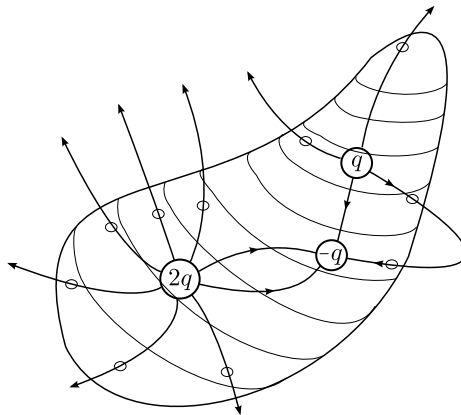
Aber es wirkt ein *Drehmoment*

$$\vec{M} = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- = \frac{\vec{a}}{2} \times q\vec{E} + \left(-\frac{\vec{a}}{2}\right) \times (-q)\vec{E} = q\vec{a} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}. \quad (2.30)$$

Dieses Drehmoment ist bestrebt, den Dipol parallel zu \vec{E} auszurichten.

2.2 Das Gaußsche Gesetz

Wir betrachten nun eine geschlossene Fläche. Der Fluss Φ_E durch diese Fläche ist proportional zur Zahl der Feldlinien durch die Fläche. Andererseits ist jede Ladung q innerhalb der Fläche Ursprung einer Anzahl von Feldlinien, die proportional zu q ist. Wir folgern, dass der Fluss durch die Fläche proportional zur eingeschlossenen Gesamtladung ist. Das ist der wesentliche Inhalt des *Gaußschen Gesetzes*.



Wir überprüfen die Vermutung für eine Punktladung q . Der Fluss durch eine Kugel mit der Ladung im Mittelpunkt ist

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \iint d\vec{s} \cdot \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint \hat{r} \cdot \hat{r} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \cdot \frac{1}{r^2} \hat{r} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\iint \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}_{\text{voller Raumwinkel}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Für dieses Beispiel ist der Fluss also tatsächlich proportional zur Ladung. Da Feldlinien nur an den Orten von Ladungen beginnen oder enden, finden wir denselben Fluss für jede noch so komplizierte Fläche, die q einschließt.

Wir können uns aber jede Ladungsverteilung als aus (evtl. unendlich vielen) Punktladungen q_1, q_2, \dots aufgebaut denken. Dafür gilt gemäß Superpositionsprinzip

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots \quad (2.32)$$

und wir folgern

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \oiint d\vec{s} \cdot \vec{E} = \oiint d\vec{s} \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots) \\ &= \oiint d\vec{s} \cdot \vec{E}_1 + \oiint d\vec{s} \cdot \vec{E}_2 + \dots = \frac{q_1}{\epsilon_0} + \frac{q_2}{\epsilon_0} + \dots = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0},\end{aligned}\quad (2.33)$$

wobei $Q_{\text{in}} = q_1 + q_2 + \dots$ die eingeschlossene Gesamtladung ist. Damit erhalten wir das *Gaußsche Gesetz* in Integralform:

$$\oiint d\vec{s} \cdot \vec{E} = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0}.\quad (2.34)$$

Beachte: Das Gaußsche *Gesetz* beschreibt eine Eigenschaft des elektromagnetischen Feldes. Der Gaußsche *Satz* ist eine exakte mathematische Aussage über Vektorfelder.

Wir können das Gaußsche Gesetz mit Hilfe des Gaußschen Satzes auch in *differentieller (lokaler) Form* schreiben: Wir betrachten ein Volumen \mathcal{V} mit der Oberfläche $\partial\mathcal{V}$. Der Gaußsche Satz zeigt, dass gilt

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \vec{E} = \iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{\nabla} \cdot \vec{E}.\quad (2.35)$$

Außerdem ist die Gesamtladung in \mathcal{V} , unter Ausnutzung des Gaußschen Gesetzes,

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV \rho(\vec{r}) = Q_{\text{in}} = \epsilon_0 \oiint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \vec{E},\quad (2.36)$$

also folgt

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \iiint_{\mathcal{V}} dV \frac{\rho}{\epsilon_0}.\quad (2.37)$$

Das gilt aber für *jedes* Volumen \mathcal{V} . Daher müssen die Integranden gleich sein:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.\quad (2.38)$$

Das ist das Gaußsche Gesetz in differentieller Form.

Wir überprüfen seine Konsistenz mit dem allgemeinen Coulomb-Gesetz:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{\Delta r}}{(\Delta r)^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\quad (2.39)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \rho(\vec{r}') \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}_{4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0},\quad (2.40)$$

siehe Gl. (A.218). Also folgt das Gaußsche Gesetz aus dem Coulombschen. Gilt auch die Umkehrung? Können wir das Coulomb-Gesetz aus dem Gaußschen herleiten? Die Antwort ist *ja*. Die Herleitung illustriert zugleich eine wichtige Lösungsmethode. Wir betrachten nur eine Punktladung q am Ursprung, da wir schon wissen, dass das \vec{E} -Feld für beliebige Ladungsverteilungen mittels des Superpositionsprinzips bestimmt werden kann.

Ein System mit einer einzigen Punktladung am Ursprung hat die volle *Rotationssymmetrie* einer Kugel. Daher muss das \vec{E} -Feld unter *beliebigen* Drehungen um den Ursprung invariant sein. Daraus folgt (für einen Raum mit mindestens drei Dimensionen), dass das Vektorfeld $\vec{E}(\vec{r})$ überall radial sein muss und im Betrag nur vom Abstand abhängen kann:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r) \hat{r}.\quad (2.41)$$

Sei \mathcal{V} ein zunächst beliebiges Volumen, das den Ursprung (nicht am Rand) einschließt. Dann gilt

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0}.\quad (2.42)$$

Die *zentrale Lösungsidee* ist nun, die Symmetrie des Systems durch Wahl eines geeigneten Volumens \mathcal{V} auszunutzen. Wir wählen \mathcal{V} so, dass es die volle (Kugel-) Symmetrie des Systems hat, d. h. \mathcal{V} soll eine Kugel des Radius r um den Ursprung sein. Dann ist

$$d\vec{s} = \hat{r} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi\quad (2.43)$$

und, wie gesehen,

$$\vec{E} = E_r(r) \hat{r}, \quad (2.44)$$

also

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \vec{E} = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \sin\theta E_r(r) \underbrace{\hat{r} \cdot \hat{r}}_1 = r^2 E_r(r) \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi. \quad (2.45)$$

Das Integral ist einfach der volle Raumwinkel 4π bzw. mit dem Faktor r^2 die Oberfläche der Kugel:

$$\dots = r^2 E_r(r) 4\pi \quad (2.46)$$

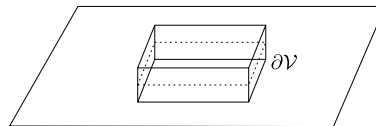
$$\Rightarrow E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (2.47)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}. \quad (2.48)$$

Also folgt das Coulombsche Gesetz tatsächlich aus dem Gaußschen.

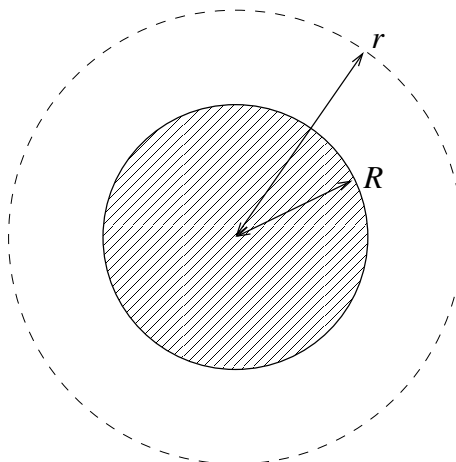
Wir haben ein Volumen \mathcal{V} bzw. eine „Gaußsche Fläche“ $\partial\mathcal{V}$ gewählt, die die Symmetrie so ausnutzen, dass das Flächenintegral trivial wird. Allgemein ist, wenn das elektrische Feld berechnet werden soll, die folgende Strategie nützlich:

1. Wenn möglich, zerlege eine komplizierte Anordnung von Ladungen in Beiträge höherer Symmetrie. In diesem Fall kann das Feld mittels des Superpositionsprinzips aus einfacheren Beiträgen zusammengesetzt werden.
2. Prüfe, ob die Symmetrie des Systems so hoch ist, dass ein Satz von Volumina \mathcal{V} existiert, so dass der Integrand $d\vec{s} \cdot \vec{E}$ im Gaußschen Gesetz auf deren Oberfläche (der Gaußschen Fläche) $\partial\mathcal{V}$ einfach ist, am besten konstant. Insbesondere für
 - (a) Kugelsymmetrie wähle Kugeln und Kugelkoordinaten,
 - (b) Zylindersymmetrie wähle Zylinder und Zylinderkoordinaten,
 - (c) zweidimensionale Translationssymmetrie wähle Prismen und kartesische Koordinaten.



3. Nur wenn dies nicht möglich ist, verwende das Coulomb-Gesetz.

■ Beispiel: Berechne das Feld innerhalb und außerhalb einer homogen geladenen Kugel mit dem Radius R und der Ladung Q . Wir wählen die Gaußsche Fläche $\partial\mathcal{V}$ als Kugel (konzentrisch mit der geladenen Kugel) mit dem Radius r .



1. Fall: $r > R$. Die gesamte Ladung ist in der Gaußschen Fläche eingeschlossen. Daher ist

$$\oiint_{\partial V} d\vec{s} \cdot \vec{E} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2.49)$$

und analog zum Fall der Punktladung folgt

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}. \quad (2.50)$$

2. Fall: $r < R$. Die Ladungsdichte innerhalb der Kugel ist

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3} R^3}. \quad (2.51)$$

Innerhalb der Gaußschen Fläche liegt die Ladung

$$Q_{\text{in}} = \iiint_V dV \rho = \rho \iiint_V dV = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3} R^3} \frac{4\pi}{3} r^3 = Q \frac{r^3}{R^3}. \quad (2.52)$$

Damit lautet das Gaußsche Gesetz

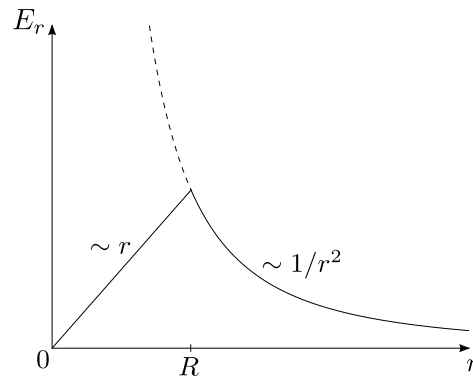
$$\oiint_{\partial V} d\vec{s} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3} \quad (2.53)$$

$$\Rightarrow 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3} \quad (2.54)$$

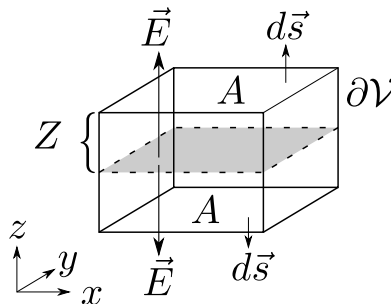
$$\Rightarrow E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{r}{R^3} \quad (2.55)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} \vec{r}. \quad (2.56)$$

Das Feld wächst also innerhalb der Kugel linear an. Eine analoge Rechnung liefert übrigens die Gravitationskraft innerhalb einer Kugel homogener Massendichte im Grenzfall eines schwachen Gravitationsfeldes (d. h. schwach gekrümmten Raumes, so dass eine Beschreibung im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie nicht erforderlich ist). Das Ergebnis zeigt, dass die Gravitationskraft im Erdmittelpunkt verschwindet.



■ Als zweites Beispiel bestimmen wir das elektrische Feld einer dünnen Schicht mit der Flächenladungsdichte $\sigma = \text{const}$. Dies ist der translationsinvariante Fall (c).



Aus Symmetriegründen ist $\vec{E} \parallel \hat{z}$ und unabhängig von x, y , also gilt

$$\vec{E}(\vec{r}) = \hat{z} E_z(z). \quad (2.57)$$

Das System ist nicht nur translationsinvariant in der xy -Ebene, sondern auch invariant unter Spiegelung an der xy -Ebene. Daher muss gelten

$$E_z(-z) = -E_z(z). \quad (2.58)$$

Wir schreiben das Gaußsche Gesetz für den skizzierten Quader (mit $z > 0$):

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} dV \rho(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} dV \sigma \delta(z) = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad (2.59)$$

mit der Grundfläche A des Quaders. Auf der linken Seite der Gleichung verschwinden die Beiträge der Seitenflächen, da hier $\vec{E} \perp d\vec{s}$ gilt, und wir erhalten

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \vec{E} = \underbrace{\hat{z} A \cdot \hat{z} E_z(z)}_{\text{Deckel}} + \underbrace{(-\hat{z} A) \cdot \hat{z} E_z(-z)}_{\text{Boden}} = \hat{z} A \cdot \hat{z} E_z(z) + (-\hat{z} A) \cdot (-\hat{z} E_z(z)) = 2A E_z(z). \quad (2.60)$$

Es folgt

$$E_z(z) = \frac{\sigma A}{2\epsilon_0 A} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{für } z > 0 \quad (2.61)$$

und damit

$$\vec{E}(\vec{r}) = \text{sgn}(z) \hat{z} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (2.62)$$

Beachte, dass das \vec{E} -Feld *unstetig* ist.

■ Ein letztes Beispiel: Berechne das \vec{E} -Feld innerhalb und außerhalb eines homogen geladenen Würfels mit der Ladung Q und der Kantenlänge a . Was machen wir in diesem Fall? Eine erste Idee wäre, würfelförmige Gaußsche Flächen zu betrachten. Natürlich gilt das Gaußsche Gesetz für diese Flächen. Aber aus der (diskreten Rotations- und Spiegel-) Symmetrie des Systems folgt *nicht*, dass $d\vec{s} \cdot \vec{E}$ auf diesen Flächen einfach oder gar konstant ist! Also können wir $\oiint d\vec{s} \cdot \vec{E}$ nicht ausrechnen. Wir müssen daher auf das Coulomb-Gesetz zurückgreifen: Ist \mathcal{V} der geladene Würfel, so ist

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} dV' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{\Delta r}}{(\Delta r)^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a/2}^{a/2} dx' \int_{-a/2}^{a/2} dy' \int_{-a/2}^{a/2} dz' \frac{Q}{a^3} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^3} \int_{-a/2}^{a/2} dx' \int_{-a/2}^{a/2} dy' \int_{-a/2}^{a/2} dz' \frac{(x - x', y - y', z - z')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \end{aligned} \quad (2.63)$$

Eines der Integrale, z. B. über z' , lässt sich noch elementar auswerten, danach wird es schwierig.

2.3 Rotation von \vec{E} und skalares Potential

Wir kennen nun die Divergenz des elektrischen Feldes, nämlich ρ/ϵ_0 . Wie sieht seine *Rotation* aus? Aus dem Coulomb-Gesetz folgt

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \rho(\vec{r}') \vec{\nabla} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (2.64)$$

Hierin ist

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|^3 \vec{\nabla} \times (\vec{r} - \vec{r}') + (\vec{r} - \vec{r}') \times \vec{\nabla} |\vec{r} - \vec{r}'|^3}{|\vec{r} - \vec{r}'|^6}. \quad (2.65)$$

Hier wurde ausgenutzt, dass \vec{r}' aus Sicht der Ableitung nach \vec{r} eine Konstante ist. Mit $\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0$ und

$$\vec{\nabla} |\vec{r} - \vec{r}'|^3 \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} 3|\vec{r} - \vec{r}'|^2 \vec{\nabla} |\vec{r} - \vec{r}'| \stackrel{\text{Gl. (A.83)}}{=} 3|\vec{r} - \vec{r}'|^2 \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 3|\vec{r} - \vec{r}'| (\vec{r} - \vec{r}') \quad (2.66)$$

folgt

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times 3|\vec{r} - \vec{r}'|(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^6} = 0. \quad (2.67)$$

Damit wird

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0; \quad (2.68)$$

das elektrische Feld für eine *statische* Ladungsverteilung ist also *wirbelfrei*. Daraus folgt ein Flächenintegral über eine Fläche \mathcal{S} :

$$0 = \iint_{\mathcal{S}} d\vec{s} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \quad (2.69)$$

und mit dem Stokesschen Satz

$$0 = \oint_{\partial\mathcal{S}} d\vec{l} \cdot \vec{E}. \quad (2.70)$$

Dies ist die Integralform des Gesetzes $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$.

2.3.1 Das skalare Potential

Aus $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ für ein Vektorfeld \vec{F} auf einem einfach zusammenhängenden Bereich folgt die Existenz eines Potentials V mit $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$, und umgekehrt. Also folgt insbesondere aus $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ in der Elektrostatik, dass ein Potential für das elektrische Feld existiert. Dieses nennen wir *skalares* (oder elektrisches) *Potential* und bezeichnen es mit $\phi(\vec{r})$. Es gilt also

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi. \quad (2.71)$$

Wir können $\phi(\vec{r})$ explizit bestimmen: Da $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, ist das Linienintegral

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{l} \cdot \vec{E} \quad (2.72)$$

wegunabhängig. Wir halten den Anfangspunkt \vec{r}_0 fest und definieren die *Funktion*

$$\phi(\vec{r}) := - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{l} \cdot \vec{E}(\vec{r}'). \quad (2.73)$$

(Dies ist tatsächlich eine Funktion von \vec{r} allein, weil es für gegebenes Feld und festes \vec{r}_0 nur von \vec{r} und nicht vom Weg abhängt.)

Es folgt

$$-\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \vec{\nabla} \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{l} \cdot \vec{E}(\vec{r}') = \vec{E}(\vec{r}) \quad (2.74)$$

nach dem Fundamentalsatz. Das so konstruierte skalare Feld $\phi(\vec{r})$ ist also tatsächlich das Potential zu $\vec{E}(\vec{r})$. Es ist klar, dass das Potential von der Wahl des Anfangspunktes \vec{r}_0 abhängt, $\phi(\vec{r})$ ist also nur bis auf eine additive Konstante festgelegt. Oft wählen wir entweder $\vec{r}_0 = 0$ oder \vec{r}_0 im Unendlichen. Da das Potential $\phi(\vec{r})$ ein *Integral* über $\vec{E}(\vec{r}')$ ist, ist es *stetig*, solange $\vec{E}(\vec{r}')$ *beschränkt* ist. Ein Sprung in \vec{E} führt bei der Integration nur zu einem Knick in ϕ .

Für eine homogen geladene Kugel hatten wir z. B. gefunden

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{Q}{R^3} \vec{r} & \text{für } r < R, \\ \frac{Q}{r^2} \hat{r} & \text{für } r > R. \end{cases} \quad (2.75)$$

Für die Berechnung von

$$\phi(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{l} \cdot \vec{E}(\vec{r}') \quad (2.76)$$

verwenden wir natürlich Kugelkoordinaten. Konventionell wählt man die Konstante in ϕ so, dass $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(\vec{r}) = 0$ gilt. Dazu muss \vec{r}_0 im Unendlichen liegen. Dann ist

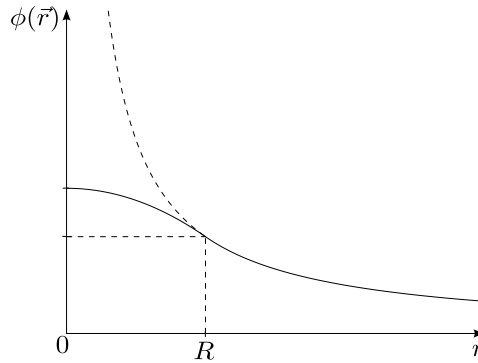
$$\phi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^r dr' \hat{r}' \cdot E_r(r') \hat{r}' = - \int_{\infty}^r dr' E_r(r'). \quad (2.77)$$

1. Fall: $r \geq R$. Wir erhalten

$$\phi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^r dr' \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(r')^2} = + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'} \Big|_{\infty}^r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}. \quad (2.78)$$

2. Fall: $r < R$. Hier teilen wir das Integrationsintervall in zwei Teile:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= - \int_{\infty}^R dr' \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(r')^2} - \int_R^r dr' \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{r'}{R^3} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'} \Big|_{\infty}^R - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(r')^2}{2R^3} \Big|_R^r \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{2R^3} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2}{2R^3} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2 - r^2}{2R^3}. \end{aligned} \quad (2.79)$$



Das Potential am Ursprung nimmt den folgenden Wert an:

$$\phi(0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2R} = \frac{3}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}. \quad (2.80)$$

Für eine geladene Ebene hatten wir

$$\vec{E}(\vec{r}) = \text{sgn}(z) \hat{z} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (2.81)$$

Daraus folgt für das Potential (wir wählen als Integrationswege Strecken senkrecht zur Ebene und legen \vec{r}_0 in die Ebene)

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{l}' \cdot \vec{E}(\vec{r}') = - \int_0^z dz' \hat{z} \cdot \text{sgn}(z') \hat{z} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^z dz' \text{sgn}(z') \\ &= - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \begin{cases} z & \text{für } z > 0 \\ -z & \text{für } z < 0 \end{cases} \\ &= - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} |z|. \end{aligned} \quad (2.82)$$

$\phi(\vec{r})$ hat also einen *Knick* auf der Ebene.

Offensichtlich können wir aus einem gegebenen Potential $\phi(\vec{r})$ das elektrostatische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ sofort berechnen. \vec{E} enthält daher nicht mehr Information als ϕ , obwohl es ein dreikomponentiges Vektorfeld ist. Die Komponenten von \vec{E} sind aber nicht unabhängig, sondern durch die Bedingung

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (2.83)$$

verknüpft.

Die Berechnung von $\phi(\vec{r})$ ist oft einfacher als die von $\vec{E}(\vec{r})$, da ϕ ein *skalares* Feld ist. Wir müssen uns daher nicht mit evtl. ortsabhängigen Koordinateneinheitsvektoren herumschlagen. Beachte, dass $\phi(\vec{r})$ dem Superpositionsprinzip gehorcht, da $\phi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{l}' \cdot \vec{E}(\vec{r}')$ gilt und \vec{E} dem Superpositionsprinzip gehorcht. Aber ϕ ist dann eine skalare und keine Vektorsumme.

Das Potential einer Punktladung q am Ursprung ist offenbar

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{l}' \cdot \vec{E}(\vec{r}') = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{l}' \cdot \frac{\hat{r}'}{(r')^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^r dr' \hat{r}' \cdot \frac{\hat{r}'}{(r')^2} \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{(r')^2} = +\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right).\end{aligned}\quad (2.84)$$

Mit der Wahl $r_0 = \infty$ erhalten wir

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.\quad (2.85)$$

Für eine beliebige Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ können wir jetzt das Superpositionsprinzip anwenden und sofort schreiben

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{\Delta r} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.\quad (2.86)$$

Dieses sogenannte *Poisson-Integral* ist (ein bisschen) einfacher als das allgemeine Coulomb-Gesetz für $\vec{E}(\vec{r})$.

■ Beispiel: Bestimme das skalare Potential und das elektrische Feld innerhalb und außerhalb einer dünnen Kugelschale des Radius R mit der Flächenladungsdichte $\sigma = \text{const.}$ Diese Aufgabe können wir leicht mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes lösen. Wir wählen konzentrische Kugeln als Gaußsche Flächen. Außerhalb der Kugelschale liegt die gesamte Ladung $Q = 4\pi R^2 \sigma$ innerhalb und wir erhalten wie oben

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{\hat{r}}{r^2}.\quad (2.87)$$

Im Inneren der Kugelschale liegt nun aber *gar keine* Ladung innerhalb der Gaußschen Fläche, daher lautet das Gaußsche Gesetz

$$4\pi r^2 E_r(r) = 0\quad (2.88)$$

$$\Rightarrow E_r(r) = 0,\quad (2.89)$$

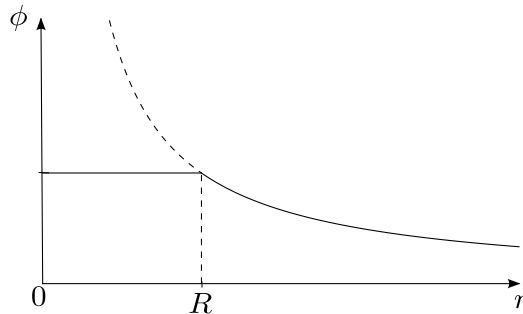
also ist $\vec{E} = 0$ innerhalb der Kugelschale. Für das analoge Problem des Gravitationsfeldes einer schweren Kugelschale bedeutet dies, dass man innerhalb einer solchen Schale schweben würde. Für das Potential erhalten wir außerhalb der Schale ohne neue Rechnung

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}.\quad (2.90)$$

Innerhalb der Schale müssen wir aber aufpassen: Wir haben, in Kugelkoordinaten,

$$\phi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{l}' \cdot \vec{E}(\vec{r}') = -\int_{r_0=\infty}^r dr' E_r(r') \stackrel{r' \leq R}{=} -\int_{\infty}^R dr' \underbrace{E_r(r')}_{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(r')^2}} - \int_r^R dr' \underbrace{E_r(r')}_0 = \phi(R).\quad (2.91)$$

Das Potential im Inneren ist also, für Anfangspunkt im Unendlichen, *konstant* und gleich dem Potential auf der Kugelschale. Es ist nicht Null, obwohl das \vec{E} -Feld im Inneren verschwindet! Beachte, dass wir $\phi(\vec{r})$ ausgehend vom Anfangspunkt (hier unendlich) bestimmen müssen.



2.3.2 Die Poisson- und die Laplace-Gleichung

Wir drücken nun die Beziehungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.92)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (2.93)$$

durch das Potential ϕ aus. Die zweite Gleichung wird zu

$$-\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi = 0. \quad (2.94)$$

Aber das ist nach Abschnitt A.2.2 automatisch erfüllt: Die Rotation eines Gradientenfeldes verschwindet. Wir haben $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ bereits ausgenutzt, um ϕ zu konstruieren; diese Gleichung ist damit erledigt. Andererseits wird das Gaußsche Gesetz zu

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi \equiv -\nabla^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.95)$$

also

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (2.96)$$

Dies ist die *Poisson-Gleichung* für das skalare Potential. Sie folgt also direkt aus dem Gaußschen Gesetz. Für den Spezialfall verschwindender Ladungsdichte erhalten wir die *Laplace-Gleichung*

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (2.97)$$

Sie sieht einfach aus, ihre Lösungen haben aber sehr interessante mathematische Eigenschaften. Funktionen, die $\nabla^2 \phi = 0$ erfüllen, heißen *harmonisch*.

Hat die Laplace-Gleichung eine eindeutige Lösung? Nein, denn

$$\phi(\vec{r}) = 0, \vec{a} \cdot \vec{r}, xy + yz + zx, xyz, x^2 - y^2, \sin kx \sinh ky, \dots \quad (2.98)$$

erfüllen alle die Gleichung. Welche ist also die physikalische Lösung? Das wird durch die *Randbedingungen* bestimmt. Lauten diese $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(\vec{r}) = 0$, so kann man zeigen, dass $\phi \equiv 0$ die *einzige* Lösung ist. Sind keine Randbedingungen spezifiziert, so kann man zu jeder Lösung der *Poisson-Gleichung* eine beliebige harmonische Funktion addieren. Die Randbedingungen legen wieder die physikalische Lösung fest.

Als Beispiel bestimmen wir das Potential einer Punktladung durch Lösen der Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(\vec{r}) \quad (2.99)$$

mit der Randbedingung $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(\vec{r}) = 0$. Wir verwenden die nützliche Methode der Fourier-Transformation. Die linke Seite ergibt Fourier-transformiert

$$\begin{aligned} \iiint d^3r e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \nabla^2 \phi(\vec{r}) &\stackrel{\text{partiell}}{=} - \iiint d^3r \left(\vec{\nabla} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right) \cdot \vec{\nabla} \phi(\vec{r}) \\ &\stackrel{\text{partiell}}{=} + \iiint d^3r \left(\nabla^2 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right) \phi(\vec{r}) = \iiint d^3r (-k^2) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \phi(\vec{r}) = -k^2 \phi(\vec{k}). \end{aligned} \quad (2.100)$$

Wir haben hier angenommen, dass $\phi(\vec{r})$ im Unendlichen schnell genug verschwindet (Randbedingung!) und die Oberflächenterme weggelassen. Wir unterscheiden eine Funktion und ihre Fourier-Transformierte hier nur durch ihre Argumente.

Die rechte Seite der Poisson-Gleichung hat die Fourier-Transformierte

$$-\frac{q}{\epsilon_0} \iiint d^3r e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \delta(\vec{r}) = -\frac{q}{\epsilon_0}. \quad (2.101)$$

Damit erhalten wir

$$-k^2 \phi(\vec{k}) = -\frac{q}{\epsilon_0}. \quad (2.102)$$

Dies ist eine *algebraische* Gleichung für $\phi(\vec{k})$, die sich trivial lösen lässt:

$$\phi(\vec{k}) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q}{k^2}. \quad (2.103)$$

Nun müssen wir $\phi(\vec{k})$ noch rücktransformieren, um $\phi(\vec{r})$ zu erhalten. Wir verwenden Kugelkoordinaten k, θ, φ im \vec{k} -Raum und wählen die k_z -Achse parallel zu \vec{r} . Dann ist

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \iiint \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q}{k^2} = \frac{q}{\epsilon_0} \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint dk d\theta d\varphi \cancel{k^2} \sin\theta e^{ikr \cos\theta} \frac{1}{\cancel{k^2}} \\ &= \frac{q}{\epsilon_0} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin\theta e^{ikr \cos\theta}}_{\frac{2 \sin kr}{kr}} = \frac{q}{\epsilon_0} \frac{1}{r} \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \underbrace{\frac{\sin kr}{k}}_{=\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.\end{aligned}\tag{2.104}$$

Das ist das schon bekannte Ergebnis.

2.3.3 Weitere Eigenschaften der Laplace-Gleichung

Die Laplace-Gleichung

$$\nabla^2\phi = 0\tag{2.105}$$

bestimmt das Potential in einem ladungsfreien Volumen \mathcal{V} für gegebene Randbedingungen auf dessen Oberfläche $\partial\mathcal{V}$. Diese beruhen auf Ladungen außerhalb von \mathcal{V} . In diesem Abschnitt diskutieren wir einige wichtige mathematische Eigenschaften der Laplace-Gleichung und ihrer Lösungen. Um ein Gefühl für die Lösungen zu bekommen, betrachten wir die Gleichung in $d = 1, 2, 3$ Dimensionen.

(a) $d = 1$: Die *gewöhnliche* Differentialgleichung

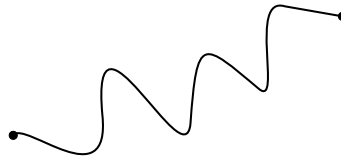
$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0\tag{2.106}$$

hat die allgemeine Lösung $\phi(x) = ax + b$ (eine allgemeine lineare Funktion). Die beiden Parameter a, b müssen aus den Randbedingungen bestimmt werden. Z. B. könnte $\phi(x)$ selbst an den Endpunkten eines Intervalls vorgegeben sein. Es folgt trivial:

- $\phi(x)$ hat die Mittelwerteneigenschaft

$$\phi(x) = \frac{\phi(x-c) + \phi(x+c)}{2} \quad \forall x, c,\tag{2.107}$$

der Funktionswert ist an jedem Punkt das arithmetische Mittel der Werte an den (beiden) äquidistanten Punkten $x \pm c$ für alle c . Die Lösungen der Laplace-Gleichung haben die geringstmögliche Struktur, die mit den Randbedingungen vereinbar ist, d. h. sie sehen nicht so aus:

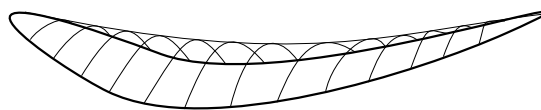


- $\phi(x)$ hat keine Extrema im Inneren eines beliebigen Intervalls, nur am Rand.

(b) $d = 2$: Zur Veranschaulichung der Laplace-Gleichung insbesondere in zwei Dimensionen ist es nützlich, sich einen *Seifenfilm* mit der mathematischen Darstellung $z = z(x, y)$ vorzustellen. Man kann zeigen, dass für kleine Variationen von z , d. h. fast konstantes $z(x, y)$, der Seifenfilm der Laplace-Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) z(x, y) = 0\tag{2.108}$$

gehört, wobei Randbedingungen für $z(x, y)$ z. B. durch die Form von Drähten gegeben sind, die den Seifenfilm aufspannen.



Die zweidimensionale Laplace-Gleichung lautet

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0. \quad (2.109)$$

Dies ist, anders als für $d = 1$, eine *partielle* Differentialgleichung. Die allgemeine Lösung enthält nun unendlich viele Parameter, die durch die Randbedingungen auf dem Rand einer *Fläche* bestimmt werden. Man kann folgende Eigenschaften beweisen, die direkt die in einer Dimension trivial gültigen Aussagen verallgemeinern:

- $\phi(x, y)$ ist das arithmetische Mittel von ϕ an allen äquidistanten Punkten, das sind hier alle Punkte auf einem Kreis:

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi R} \oint_{\mathcal{C}_R} dl' \phi(x', y'), \quad (2.110)$$

wobei \mathcal{C}_R der Kreis mit dem Radius R und dem Mittelpunkt (x, y) ist (Beweis siehe Fall $d = 3$). Das ist eine starke Aussage: $\phi(\vec{r})$ auf einer Kurve bestimmt $\phi(\vec{r})$ an einem fernen Punkt. Man kann sogar zeigen, dass $\phi(\vec{r})$ auf *jeder* geschlossenen Kurve $\phi(\vec{r})$ an *jedem* Punkt im Inneren eindeutig festlegt.

- $\phi(x, y)$ hat keine Extrema im Inneren einer Fläche, nur am Rand.

(c) $d = 3$: Die Laplace-Gleichung lautet

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.111)$$

Die Eigenschaften sind i. W. dieselben wie für $d = 2$:

- Mittelwerteigenschaft:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\mathcal{S}_R} ds' \phi(\vec{r}'), \quad (2.112)$$

\mathcal{S}_R ist die Kugel mit Radius R um den Punkt \vec{r} .

- $\phi(\vec{r})$ hat keine Extrema im Inneren eines Volumens, nur an der Oberfläche.

□ Beweis: Sei

$$\psi_R(\vec{r}) := \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\mathcal{S}_R} ds' \phi(\vec{r}'). \quad (2.113)$$

Verwende Kugelkoordinaten R, θ, φ für $\vec{r}' - \vec{r}$, dann ist

$$\psi_R(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi R^2 \phi(\vec{r}') \quad (2.114)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial \psi_R(\vec{r})}{\partial R} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial \phi(\vec{r}')}{\partial R} = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\mathcal{S}_R} ds' \frac{\partial \phi(\vec{r}')}{\partial R} \\ &= \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\mathcal{S}_R} ds' \left(\vec{\nabla}' \phi(\vec{r}') \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}'}{\partial R}. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Da nach Definition gilt

$$\vec{r}' - \vec{r} = R\hat{R}, \quad (2.116)$$

folgt

$$\frac{\partial \vec{r}'}{\partial R} = \hat{R} \quad (2.117)$$

und

$$\frac{\partial \psi_R(\vec{r})}{\partial R} = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\mathcal{S}_R} ds' \left(\vec{\nabla}' \phi(\vec{r}') \right) \cdot \hat{R} = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\mathcal{S}_R} d\vec{s}' \cdot \vec{\nabla}' \phi(\vec{r}') \stackrel{\text{Gauß}}{=} \frac{1}{4\pi R^2} \iiint_{\mathcal{V}_R} dV' \underbrace{\vec{\nabla}' \cdot \vec{\nabla}'}_{(\nabla')^2} \phi(\vec{r}'), \quad (2.118)$$

wobei $\mathcal{S}_R = \partial \mathcal{V}_R$. Da ϕ die Laplace-Gleichung erfüllt, folgt

$$\frac{\partial \psi_R(\vec{r})}{\partial R} = 0 \quad (2.119)$$

und damit, dass $\psi_R(\vec{r})$ unabhängig vom Radius R ist. Da die Funktion $\phi(\vec{r})$ stetig ist, sie ist ja sogar zweimal stetig differenzierbar, ist auch $\psi_R(\vec{r})$ stetig in R und

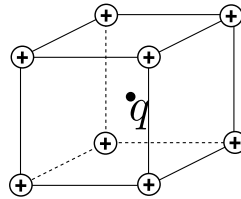
$$\lim_{R \rightarrow 0^+} \psi_R(\vec{r}) = \phi(\vec{r}). \quad (2.120)$$

Da $\psi_R(\vec{r})$ unabhängig von R ist, folgt

$$\psi_R(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) \quad \forall R \geq 0. \quad (2.121)$$

Die zweite Aussage (kein Extremum) folgt dann einfach per *reductio ad absurdum*: Angenommen, $\phi(\vec{r})$ habe ein lokales Maximum (Minimum) bei \vec{r}_0 . Dann existierte eine Kugel \mathcal{S}_R mit dem Mittelpunkt \vec{r}_0 , so dass $\phi(\vec{r})$ überall auf \mathcal{S}_R kleiner (größer) als $\phi(\vec{r}_0)$ wäre. Dann wäre der Mittelwert von $\phi(\vec{r})$ über \mathcal{S}_R aber auch kleiner (größer) als $\phi(\vec{r}_0)$, im Widerspruch zum ersten Teil.

Ein wichtiges Korollar ist *Earnshaws Theorem*: Eine Probeladung hat im elektrostatischen Feld einer beliebigen Ladungsanordnung keine *stabilen* Gleichgewichtspositionen. Denn dazu müsste die potentielle Energie $V(\vec{r}) = q\phi(\vec{r})$ ein lokales Minimum besitzen, was sie nicht tut, da sie die Laplace-Gleichung erfüllt.



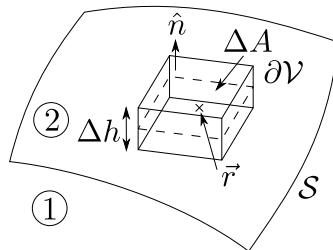
Die Probeladung hat i. A. *labile* Gleichgewichtspositionen, im Beispiel den Mittelpunkt des Würfels. Dort verschwindet die Kraft, aber für infinitesimale Auslenkungen in gewissen Richtungen tritt sofort ein *wegtreibende* Kraft auf. Aus Earnshaws Theorem folgt, dass man Ionen nicht elektrostatisch einfangen kann – Ionenfallen erfordern zeitabhängige Felder.

2.4 Elektrisches Feld an Grenzflächen

Kontinuierlich verteilte Ladungen oder Dipole auf Flächen stellen oft vernünftige Näherungen für reale Ladungsverteilungen dar. Z. B. sitzen Ladungen von Metallen im statischen Fall in sehr guter Näherung auf ihrer Oberfläche. Mit den bisher besprochenen Methoden können wir das Verhalten des Feldes und der Potentiale an solchen Flächen beschreiben.

2.4.1 Geladene Fläche

Wir betrachten eine beliebig geformte Fläche \mathcal{S} mit der Flächenladungsdichte $\sigma(\vec{r})$. Um einen Punkt $\vec{r} \in \mathcal{S}$ herum konstruieren wir eine *Gaußsche Fläche* $\partial\mathcal{V}$ mit infinitesimalen Abmessungen. Da $\partial\mathcal{V}$ infinitesimal ist, können wir die Fläche \mathcal{S} in der Umgebung von \vec{r} als *eben* und die Flächenladungsdichte $\sigma(\vec{r})$ als *homogen* betrachten.



Wir wählen die beiden Deckflächen von $\partial\mathcal{V}$ parallel zu \mathcal{S} in \vec{r} , auf den beiden Seiten von \mathcal{S} (d. h. in den Bereichen 1 und 2, siehe Skizze). Die Seitenflächen wählen wir senkrecht auf \mathcal{S} ; ihre konkrete Form ist unwichtig. Der Flächeninhalt der Deckflächen sei jeweils ΔA , die Höhe der Gaußschen Fläche sei Δh . Das Gaußsche Gesetz sagt aus

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\Delta A} ds \sigma(\vec{r}). \quad (2.122)$$

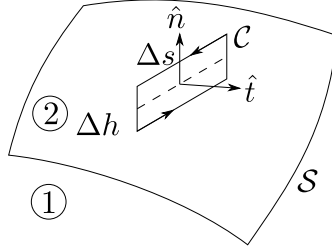
Das Integral auf der rechten Seite ist die in \mathcal{V} enthaltene Ladung. Wir lassen nun $\Delta h \rightarrow 0$ gehen, dadurch verschwindet der elektrische Fluss durch die Seitenflächen. Da auch ΔA infinitesimal ist, erhalten wir

$$\Delta A(\hat{n} \cdot \vec{E}_2 - \hat{n} \cdot \vec{E}_1) = \frac{1}{\epsilon_0} \Delta A \sigma \quad (2.123)$$

$$\Rightarrow \hat{n} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.124)$$

$$\Rightarrow E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.125)$$

Die *Normalkomponente* von \vec{E} macht also einen Sprung von σ/ϵ_0 . Zur Untersuchung der *Tangentialkomponenten* konstruieren wir eine infinitesimale *Stokessche Schleife* \mathcal{C} um \vec{r} in einer Ebene, die senkrecht zu einer tangentialen Richtung $\hat{t} \perp \hat{n}$ steht:



Es gilt, für elektrostatische Felder,

$$\oint_{\mathcal{C}} d\vec{l} \cdot \vec{E} = 0 \quad | \Delta h \rightarrow 0 \quad (2.126)$$

$$\Rightarrow \Delta s (\hat{t} \times \hat{n}) \cdot \vec{E}_2 - \Delta s (\hat{t} \times \hat{n}) \cdot \vec{E}_1 = 0 \quad (2.127)$$

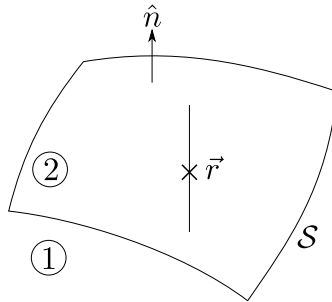
$$\Rightarrow (\hat{t} \times \hat{n}) \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0. \quad (2.128)$$

Da alles für alle $\hat{t} \perp \hat{n}$ und damit alle $\hat{t} \times \hat{n} \perp \hat{n}$ gilt, folgt für alle (zweidimensionalen) *tangentialen* Komponenten von \vec{E} :

$$\vec{E}_{2t} - \vec{E}_{1t} = 0, \quad (2.129)$$

sie sind also *stetig* an einer geladenen Fläche.

Das *skalare Potential* in der Nähe der geladenen Fläche erhalten wir durch Integration des Feldes \vec{E} . Wir wählen als Integrationsweg eine infinitesimale Strecke senkrecht zur Fläche \mathcal{S} :



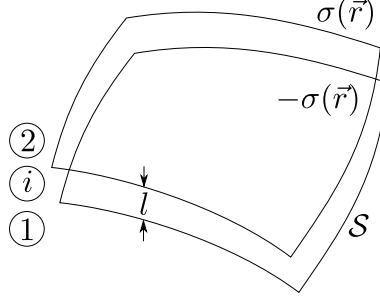
Dann ist

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r} + \Delta r \hat{n}) &= \phi(\vec{r}) - \int_{\vec{r}}^{\vec{r} + \Delta r \hat{n}} d\vec{l}' \cdot \vec{E}(\vec{r}') = \phi(\vec{r}) - \Delta r \hat{n} \cdot \vec{E}(\vec{r} + \Delta r \hat{n}) \\ &= \phi(\vec{r}) - \Delta r \begin{cases} E_{2n} & \text{für } \Delta r > 0, \\ E_{1n} & \text{für } \Delta r < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.130)$$

Der Limes $\Delta r \rightarrow 0$ zeigt, dass das Potential an der Fläche *stetig* ist. Nur sein Gradient, genauer dessen Normalkomponente $-E_n$, ist unstetig. Wir werden auf die Ergebnisse bei der Diskussion von Kondensatoren zurückkommen.

2.4.2 Dipolschicht

Eine *Dipolschicht* oder *Doppelschicht* ist eine beliebige Fläche \mathcal{S} , deren Flächenelemente jeweils infinitesimale Dipolmomente $d\vec{p}(\vec{r})$ tragen, wobei diese senkrecht zur Fläche stehen sollen, $d\vec{p}(\vec{r}) = dp(\vec{r}) \hat{n}(\vec{r})$. Wir können uns eine Dipolschicht als aus zwei Flächen aufgebaut denken, wobei ihr Abstand l gegen Null und ihre Flächenladungsdichte $\pm\sigma$ gegen $\pm\infty$ gehen, so dass das Produkt konstant bleibt.



Die Tangentialkomponenten von \vec{E} sind stetig, während für die Normalkomponente gilt

$$E_{in} = E_{1n} - \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (2.131)$$

$$E_{2n} = E_{in} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} = E_{1n} - \frac{\sigma}{\epsilon_0} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} = E_{1n}. \quad (2.132)$$

Die Normalkomponente von \vec{E} und damit \vec{E} insgesamt sind also ebenfalls stetig.

Zur Bestimmung des skalaren Potentials betrachten wir einen Integrationsweg, der am Ort \vec{r}_0 im Bereich 1, direkt an der unteren geladenen Fläche beginnt und am Ort \vec{r} im Bereich 2, direkt an der oberen geladenen Fläche endet. Der Weg stehe senkrecht auf der Dipolschicht. Dann gilt

$$\phi_2(\vec{r}) = \phi_1(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{l} \cdot \vec{E} = \phi_1(\vec{r}_0) - l \hat{n} \cdot \vec{E}_i = \phi_1(\vec{r}_0) - l E_{in} = \phi_1(\vec{r}_0) - l E_{1n} + \frac{l\sigma}{\epsilon_0}. \quad (2.133)$$

Das Dipolmoment eines Flächenelements ds ist

$$d\vec{p} = \underbrace{\sigma ds}_{dq} l \hat{n} \equiv dp \hat{n}. \quad (2.134)$$

Es liegt nahe, die *Dipolflächendichte*

$$\vec{D} := \frac{d\vec{p}}{ds} \quad \text{bzw.} \quad D = \frac{dp}{ds} \quad (2.135)$$

zu definieren. Damit ist

$$dp = \sigma l ds = D ds \quad (2.136)$$

$$\Rightarrow D = \sigma l \quad (2.137)$$

und es folgt

$$\phi_2(\vec{r}) = \phi_1(\vec{r}_0) - l E_{1n} + \frac{D}{\epsilon_0}. \quad (2.138)$$

Im Limes $l \rightarrow 0$, $\sigma \rightarrow \infty$, $D = \text{const}$ erhalten wir

$$\phi_2(\vec{r}) = \phi_1(\vec{r}) + \frac{D}{\epsilon_0}. \quad (2.139)$$

Das skalare Potential zeigt an einer Dipolschicht also einen *Sprung* um D/ϵ_0 . Das elektrische Feld ist, als Ableitung von ϕ , dort nicht definiert, kann aber durch die Schicht stetig fortgesetzt werden.

2.5 Arbeit und Energie in der Elektrostatik

Wieviel Energie kostet es, eine Probeladung q vom Ort \vec{a} (in Ruhe) zum Ort \vec{b} (in Ruhe) zu bewegen? Aus der Mechanik wissen wir, dass die Probeladung im Kraftfeld \vec{F}_{el} die Arbeit

$$W_{\text{el}} = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} d\vec{l} \cdot \vec{F}_{\text{el}}(\vec{r}) \quad (2.140)$$

leistet. Die elektrische Kraft ist, wie oben besprochen, $\vec{F}_{\text{el}} = q\vec{E}$. Aus $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ folgt $\vec{\nabla} \times \vec{F}_{\text{el}} = 0$, also ist das Kraftfeld konservativ und das Linienintegral ist unabhängig vom Weg.

Üblicherweise fragen wir nach der Arbeit W , die *wir* an der Ladung verrichten müssen, um sie von \vec{a} nach \vec{b} zu bringen. Diese ist

$$W = -W_{\text{el}} = - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} d\vec{l} \cdot \vec{F}_{\text{el}}. \quad (2.141)$$

(Überprüfen Sie bei Rechnungen die Plausibilität des Vorzeichens!) Damit ist

$$W = -q \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} d\vec{l} \cdot \vec{E} = q[\phi(\vec{b}) - \phi(\vec{a})]. \quad (2.142)$$

Bis auf den Faktor q ist die Differenz der skalaren Potentiale also die benötigte Arbeit. Liegt der Anfangspunkt \vec{a} im Unendlichen und vereinbaren wir die Randbedingung $\phi(\infty) = 0$, so folgt (mit $\vec{r} = \vec{b}$)

$$W = q\phi(\vec{r}). \quad (2.143)$$

Dieser Zusammenhang ist gewissermaßen das Integral von

$$\vec{F}_{\text{el}} = q\vec{E}. \quad (2.144)$$

Die Arbeit W , die erforderlich ist, um die Probeladung aus dem Unendlichen zum Ort \vec{r} (in Ruhe) zu bringen, ist die *potentielle Energie* im elektrischen Feld.

Wir bestimmen nun die potentielle Energie eines Systems von N Punktladungen q_1, q_2, \dots . Wir stellen uns vor, die Ladungen alle eine nach der anderen aus dem Unendlichen heranzubringen. Die *erste* Ladung kostet keine Energie, da noch kein \vec{E} -Feld aufgrund anderer Ladungen vorhanden ist ($W_1 = 0$). Die *zweite* kostet die Energie

$$W_2 = q_2 \phi_1(\vec{r}_2) = q_2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}. \quad (2.145)$$

Die *dritte* kostet

$$W_3 = q_3 \phi_{1 \text{ und } 2}(\vec{r}_3) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}, \quad (2.146)$$

die *vierte*

$$W_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_4}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_4}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_2|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3 q_4}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_3|} \quad (2.147)$$

usw. Insgesamt erhalten wir

$$W = \underbrace{W_1}_0 + W_2 + W_3 + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}. \quad (2.148)$$

Der Faktor $1/2$ korrigiert die Doppelzählung der Paare von Ladungen in der Summe. Dieser Ausdruck ist offensichtlich unabhängig davon, in welcher Reihenfolge wir die Ladungen heranführen.

Wir wollen die Energie durch das *Feld* ausdrücken. Als ersten Schritt schreiben wir die Energie um als

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j, j \neq i} \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}}. \quad (2.149)$$

Der unterklammerte Term ist das *skalare Potential* am Ort \vec{r}_i der Ladung q_i aufgrund aller anderen Ladungen. Wir können daher schreiben

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \phi_{\text{ohne } q_i}(\vec{r}_i). \quad (2.150)$$

Wir hatten oben gesehen, dass die Energie einer Ladung q in einem gegebenen Potential $q\phi(\vec{r})$ beträgt. Daher ist die Energie mehrerer Ladungen

$$W = \sum_i q_i \phi(\vec{r}_i). \quad (2.151)$$

Hier tritt kein Faktor $1/2$ auf. Der Faktor $1/2$ in Gl. (2.150) beruht darauf, dass dort $\phi(\vec{r})$ nicht extern vorgegeben ist, sondern von *denselben* Ladungen erzeugt wird. Die Summe enthält daher die Coulomb-Wechselwirkung zwischen zwei Ladungen q_i und q_j zweimal und der Faktor $1/2$ korrigiert diese Doppelzählung. Soll die Energie einer Ladungsverteilung bestimmt werden, muss man die beiden Fälle sorgfältig unterscheiden.

Nun gehen wir zum Kontinuumslimit über. Dazu teilen wir den Raum in Zellen am Ort \vec{r} mit der Ladung $\rho(\vec{r}) \Delta V$ ein und bilden am Ende den Grenzwert für $\Delta V \rightarrow 0$. Die Energie lautet

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\vec{r}} \rho(\vec{r}) \Delta V \phi_{\text{ohne } \vec{r}}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \sum_{\vec{r}} \rho(\vec{r}) \Delta V [\phi(\vec{r}) - \phi_{\vec{r}}(\vec{r})]. \quad (2.152)$$

Hier ist $\phi(\vec{r})$ das gesamte Potential und $\phi_{\vec{r}}(\vec{r})$ das Potential der am Ort \vec{r} zentrierten Zelle. Da die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ *beschränkt* ist, ist $\phi_{\vec{r}}(\vec{r})$ endlich. Im Limes $\Delta V \rightarrow 0$ geht die Ladung $\rho \Delta V$ der Zelle gegen Null und damit auch $\phi_{\vec{r}}(\vec{r})$. Daher können wir den Korrekturterm („Selbstwechselwirkung“) für $\Delta V \rightarrow 0$ vernachlässigen. Wir erhalten

$$W = \frac{1}{2} \iiint dV \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}). \quad (2.153)$$

Dies ist plausibel, da $\rho dV \phi$ die Energie der Ladung ρdV im Potential ϕ ist. Die Energie einer Ladungsverteilung in einem *externen* Feld wäre also

$$W_{\text{ext}} = \iiint dV \rho(\vec{r}) \phi_{\text{ext}}(\vec{r}). \quad (2.154)$$

Das ist die Arbeit, die erforderlich ist, um eine schon im Unendlichen zusammengesetzte Ladungsverteilung in ein schon vorhandenes Potential zu holen. Der Faktor $1/2$ in Gl. (2.153) kommt wieder daher, dass ϕ nicht extern vorgegeben ist, sondern von denselben Ladungen ρ erzeugt wird.

Nun drücken wir ρ und ϕ durch das elektrische Feld \vec{E} aus:

$$\begin{aligned} \rho &= \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \\ \Rightarrow W &= \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\mathcal{V}} dV (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \phi \end{aligned} \quad (2.155)$$

$$\stackrel{\text{partiell}}{=} \frac{\epsilon_0}{2} \iint_{\partial \mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \vec{E} \phi - \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \phi. \quad (2.156)$$

Wir nehmen nun an, dass die Ladungen auf einen endlichen Bereich beschränkt sind. Dann fällt \vec{E} weit weg von allen Ladungen wie $1/r^2$ ab, sowie ϕ wie $1/r$. Die Oberfläche $\partial \mathcal{V}$ wächst dagegen nur wie r^2 an und der Oberflächenterm verschwindet daher für $\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Dann folgt

$$W = -\frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{E} \cdot (-\vec{E}) = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\mathcal{V}} dV E^2(\vec{r}). \quad (2.157)$$

Die Energiedichte ist also

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} E^2(\vec{r}). \quad (2.158)$$

Es ist bemerkenswert, dass sich die Energie *allein* durch das Feld ausdrücken lässt. Dies legt erneut nahe, dass das \vec{E} -Feld ein eigenständiges physikalisches Objekt, und nicht nur eine Hilfsgröße für die Berechnung von Kräften, ist. Insbesondere kann das \vec{E} -Feld Energie speichern.

Die Energiedichte $w(\vec{r})$ ist offensichtlich ein skalares Feld – das Quadrat eines Vektors ist ein Skalar. Da aber w quadratisch vom Feld \vec{E} abhängt, gilt das Superpositionsprinzip für w *nicht*.

■ **Beispiel:** Wir berechnen die Energie einer Kugelschale mit dem Radius R und der gleichförmigen Flächenladungsdichte σ auf zwei Wegen:

(a) Es ist

$$W = \frac{1}{2} \iiint dV \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}). \quad (2.159)$$

Mit $\rho(\vec{r}) = \sigma \delta(r - R)$ und

$$\phi(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \quad (2.160)$$

mit der Gesamtladung $Q = 4\pi R^2 \sigma$ (s. o.) erhalten wir

$$W = \frac{\sigma}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \underbrace{\iiint dV \delta(r - R)}_{= \int ds = 4\pi R^2} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}. \quad (2.161)$$

(b) Andererseits gilt

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint dV E^2(\vec{r}). \quad (2.162)$$

Mit (s. o.)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{für } r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} & \text{für } r > R \end{cases} \quad (2.163)$$

erhalten wir in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} W &= \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{r>R} dV \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{Q^2}{r^4} = \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0} Q^2 \int_R^\infty dr r^2 \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi}_{4\pi} \frac{1}{r^4} \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} Q^2 \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_R^\infty = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}. \end{aligned} \quad (2.164)$$

Die beiden Wege führen zu demselben Ergebnis, wie erwartet.

Wenn wir auf demselben Weg die Feldenergie einer Punktladung q berechnen, stoßen wir auf ein Paradoxon: Die Energie ist

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint dV \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{q^2}{r^4} = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0} \iiint dr d\theta d\varphi r^2 \sin\theta \frac{1}{r^4} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{dr}{r^2} = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_0^\infty = \infty. \quad (2.165)$$

Sie divergiert, während der ursprüngliche Ausdruck

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \phi_{\text{ohne } i}(\vec{r}_i) \quad (2.166)$$

endlich ist, nämlich Null, da $\phi_{\text{ohne } i}$ das elektrostatische Potential ohne Ladungen ist. Das Problem beruht darauf, dass die Verallgemeinerung auf

$$W = \frac{1}{2} \iiint dV \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) \quad (2.167)$$

das *volle* Potential aufgrund *aller* Ladungen enthält. Für kontinuierliche und beschränkte Ladungsverteilungen macht das keinen Unterschied, wie wir gesehen haben. Bei einer Punktladung enthält aber ein infinitesimales Volumen eine endliche Ladung. Die beiden Ausdrücke für die Energie W unterscheiden sich durch die *Selbstwechselwirkung* der Punktladung, das ist die Energie, die erforderlich ist, um die Punktladung aus infinitesimalen Ladungen zusammenzusetzen. Diese Energie ist tatsächlich divergent. Die im \vec{E} -Feld gespeicherte Energie ist demnach ebenfalls divergent – wenn wir die Punktladung zerlegen würden, könnten wir diese Energie extrahieren. Eine mögliche Deutung ist folgende: Die divergente Selbstwechselwirkung der Elementarteilchen interessiert uns nicht, da wir diese *aus Prinzip* nicht zerlegen und daher diese Energie nie extrahieren können.

2.6 Leiter

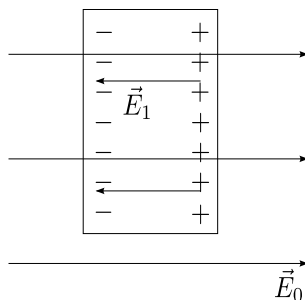
Ein Leiter ist ein Material mit beweglichen Ladungsträgern. Beispiele sind

- Metalle,
- Halbleiter, insbesondere dotierte,
- Elektrolyte (ionische Lösungen) und flüssige Salze (ionische Flüssigkeiten),
- Plasmen.

Außerdem gehören auch Supraleiter dazu, die aber über ihre (ideale) Leitfähigkeit hinaus noch weitere besondere elektromagnetische Eigenschaften aufweisen. Wir beschäftigen uns weiterhin mit der *Elektrostatik*, d.h. wir betrachten den *stationären* Zustand der Ladungsträger. Wir stellen uns vor, dass wir lange genug warten, so dass sich die Ladungsträger als Antwort auf ein angelegtes Feld reorganisieren können. Daher ist es für den stationären Zustand gleichgültig, ob das Material gut oder schlecht leitet (wir werden dies später quantifizieren, Stichwort „Ohmsches Gesetz“) – es dauert nur kürzer oder länger, bis der stationäre Zustand erreicht ist. Insbesondere müssen wir keinen *idealen* Leiter annehmen, der der Bewegung der Ladungsträger keinen Widerstand entgegen setzen würde.

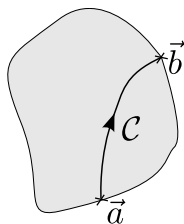
Wir besprechen nun die wesentlichen Eigenschaften von Leitern in elektrostatischen Feldern:

1. $\vec{E} = 0$ im Inneren eines Leiters:



Wir legen ein elektrisches Feld \vec{E}_0 , gemessen weit entfernt von einem leitenden Körper, an, z. B. durch einen großen Plattenkondensator. Auf die Ladungsträger im Leiter wirkt dann eine Kraft und sie bewegen sich in Richtung dieser Kraft. Sie sammeln sich an der *Oberfläche* des Leiters an, da sie ihn nicht verlassen können (Vakuum oder Luft ist ein Isolator). Die angesammelten Ladungen erzeugen ein zusätzliches Feld \vec{E}_1 , das \vec{E}_0 entgegengerichtet ist. Die weitere Verschiebung von Ladungen hört erst auf, wenn das Gesamtfeld $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1$ und damit die Gesamtkraft im Inneren verschwindet. Dann hat der Leiter einen stationären Zustand erreicht. Also findet man im stationären Zustand $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 = 0$.

2. $\rho = 0$ im Inneren eines Leiters: Dies folgt sofort aus dem Gaußschen Gesetz $\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$.
3. Daraus folgt, dass die eventuell vorhandene *Überschussladung* des Körpers an seiner Oberfläche sitzt. Dasselbe Ergebnis erhält man, indem man die Feldenergie minimiert.
4. Jeder Punkt im Inneren oder an der Oberfläche eines zusammenhängenden Leiters liegt auf demselben Potential ϕ . Also ist insbesondere die Oberfläche eines Leiters eine Äquipotentialfläche.



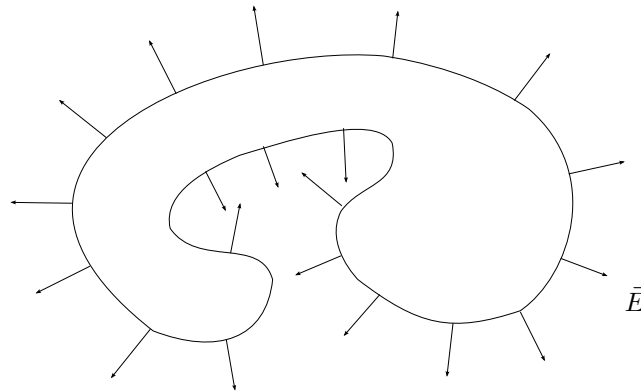
Die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten im Leiter ist nämlich

$$\phi(\vec{b}) - \phi(\vec{a}) = - \int_{\vec{a}, \mathcal{C}}^{\vec{b}} d\vec{s} \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.168)$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{b}) = \phi(\vec{a}). \quad (2.169)$$

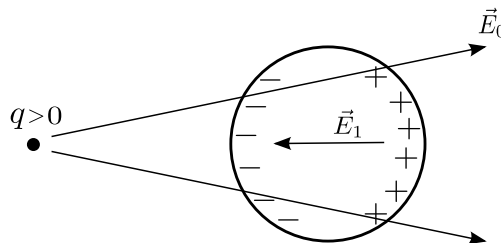
Der Integrationsweg \mathcal{C} kann *vollständig innerhalb* des Leiters gewählt werden. Offensichtlich können wir nicht folgern, dass zwei *nicht zusammenhängende* Leiter auf demselben Potential liegen müssen.

5. Das \vec{E} -Feld steht überall senkrecht auf der Oberfläche eines Leiters: Die physikalische Begründung ist, dass eine Feldkomponente parallel zur Oberfläche einen Strom parallel zur Oberfläche hervorrufen würde. Dieser würde fließen, bis sich die Ladungen so umverteilt haben, dass \vec{E} senkrecht steht. Mathematisch folgt die Aussage sofort aus den Eigenschaften des Gradienten: Die Oberfläche ist nach Punkt 4. eine Äquipotentialfläche. Daher steht dessen Gradient $\vec{\nabla}\phi = -\vec{E}$ überall senkrecht auf dieser Fläche. Beachte, dass die Aussage für beliebig geformte Körper gilt.



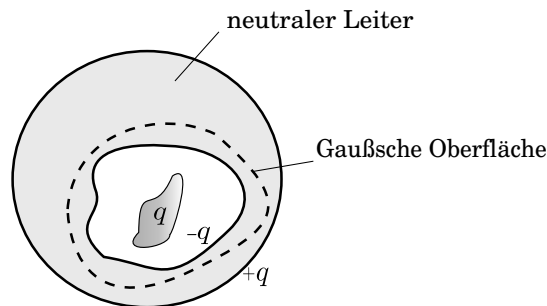
Folgerungen:

- (a) Eine Punktladung q und ein *ungeladener* Leiter ziehen einander an.



Das Coulombfeld \vec{E}_0 aufgrund von q (o. B. d. A. sei $q > 0$) *polarisiert* den Leiter; es *influenziert* Oberflächenladungen. Die negativen Oberflächenladungen befinden sich näher an q als die positiven. Da die Coulomb-Kraft mit dem Abstand abfällt, ist die Gesamtkraft attraktiv.

- (b) Betrachte einen ungeladenen *kugelförmigen* Leiter mit einem unregelmäßigen Hohlraum im Inneren. Dieser soll eine unregelmäßig verteilte Ladung q enthalten. Was ist das elektrische Feld außerhalb der Kugel?



Für eine Gaußsche Oberfläche $\partial\mathcal{V}$, die ganz im Inneren des Leiters liegt, gilt

$$\frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0} = \oiint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \underbrace{\vec{E}}_0 = 0. \quad (2.170)$$

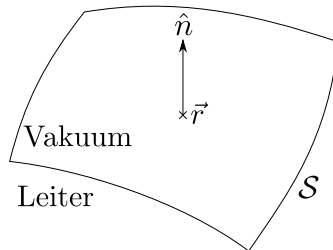
Daher muss die auf der *inneren* Oberfläche des Leiters influenzierte Ladung $-q$ betragen. (Die räumliche Verteilung dieser Oberflächenladung zu finden, kann schwierig sein!) Da der Leiter insgesamt neutral ist, muss auf der *äußeren* Oberfläche die Ladung $+q$ influenziert werden. *Diese* Ladung muss gleichmäßig verteilt sein, denn sonst würde ein Strom entlang der Oberfläche fließen, um sie auszugleichen. (Beachte, dass diese Oberflächenladung von der Ladungsverteilung im Inneren nicht beeinflusst wird, da deren elektrisches Feld im Leiter und damit an der äußeren Oberfläche verschwindet.) Damit ist das Feld im Außenraum das einer homogen geladenen Kugelschale, also

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}. \quad (2.171)$$

Nur die Gesamtladung q ist von außen sichtbar, die Information über ihre Verteilung ist nicht zugänglich. Elektrostatische Felder können daher nicht verwendet werden, um das Innere von Leitern zu untersuchen (elektrodynamische Felder hingegen schon, z. B. Röntgenstrahlen).

2.6.1 Oberflächenladung und elektrisches Feld

Da die Ladung in einem Leiter an der Oberfläche sitzt, können wir die Eigenschaften aus 2.4 zum elektrischen Feld an Grenzflächen verwenden. Wir betrachten einen beliebig geformten leitenden Körper mit der Oberfläche \mathcal{S} . \hat{n} sei der nach außen (vom Leiter weg) gerichtete Normaleneinheitsvektor bei $\vec{r} \in \mathcal{S}$.



Im Inneren des Leiters ist $\vec{E} = 0$. Nach 2.4 sind die Tangentialkomponenten \vec{E}_t stetig an der Oberfläche, so dass $\vec{E}_t = 0$ im Außenraum gilt. Dies wussten wir bereits: \vec{E} steht senkrecht auf der Oberfläche. Für die Normalkomponente gilt

$$E_{\text{Vakuum},n} - \underbrace{E_{\text{Metall},n}}_{=0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.172)$$

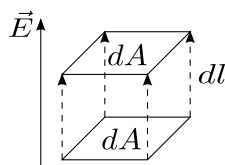
$$\Rightarrow E_{\text{Vakuum},n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (2.173)$$

Da die Tangentialkomponenten verschwinden, folgt daraus

$$\vec{E}_{\text{Vakuum}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}. \quad (2.174)$$

Dies ist ein bemerkenswert einfacher Zusammenhang zwischen dem elektrischen Feld und der lokalen Ladungsdichte an der Oberfläche eines *beliebigen* Leiters.

Wir berechnen noch die *Kraft*, die das Feld \vec{E} auf die Oberflächenladungen ausübt. Die Kraft wirkt senkrecht zur Oberfläche, da $\vec{E} \parallel \hat{n}$ ist. Wir bestimmen zunächst die bei einer Verschiebung der infinitesimalen Oberflächenladung σdA um eine Strecke dl senkrecht zur Oberfläche geleistete Arbeit dW .



Diese Arbeit ist die Änderung der Feldenergie. Im Außenraum ist die Energiedichte $\epsilon_0 E^2/2$, im Innenraum ist sie Null. Die Energieänderung ist also

$$dW = -\frac{\epsilon_0}{2} dA dl E^2. \quad (2.175)$$

Die Kraft erhalten wir einfach aus $dW = -dF dl$ zu

$$dF = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 dA = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma^2 dA. \quad (2.176)$$

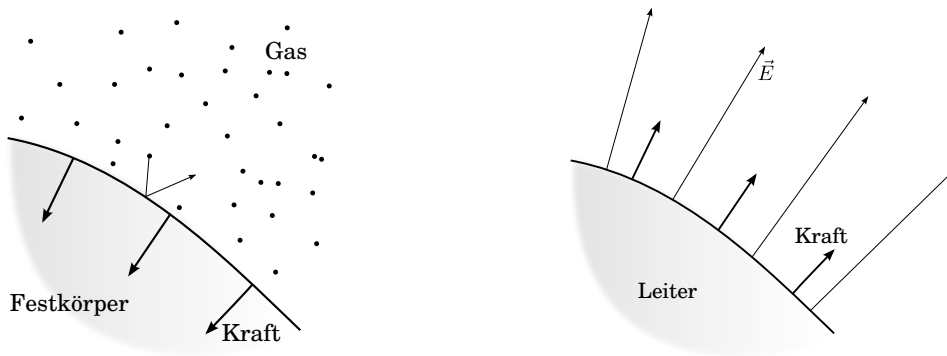
Die Kraft pro Fläche ist also

$$\vec{f} := \frac{d\vec{F}}{dA} = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma^2 \hat{n}. \quad (2.177)$$

Eine Normalkraft pro Fläche ist ein *Druck*

$$p = |\vec{f}| = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2. \quad (2.178)$$

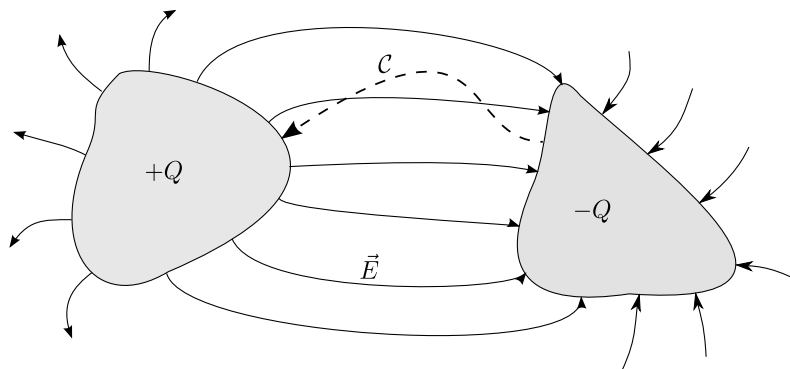
Man kann sagen, dass ein elektrisches Feld einen Druck auf einen Leiter ausübt. Zwar gibt man diesen Druck mit einer positiven Maßzahl an, er ist aber tatsächlich *negativ*, nämlich entgegengesetzt zum Druck aufgrund eines Gases.



Die Kraft bzw. der Druck *zieht* den Leiter *in das elektrische Feld hinein*. Dies vermindert die Feldenergie, da Vakuum (mit Energiedichte $\epsilon_0 E^2/2 > 0$) durch Leiter (mit Energiedichte Null) verdrängt wird.

2.7 Kondensatoren

Zwei leitende Körper beliebiger Form mögen die Gesamtladungen $Q > 0$ und $-Q < 0$ tragen. Sie bilden einen *Kondensator*.



Ein zusammenhängender Leiter hat ein gleichförmiges Potential ϕ im Inneren und an der Oberfläche. Daher ist die *Potentialdifferenz (Spannung)* zwischen den beiden Leitern eindeutig definiert:

$$U = \phi_+ - \phi_- = - \int_c d\vec{l} \cdot \vec{E} \quad (2.179)$$

mit einem *beliebigen* Integrationsweg \mathcal{C} , der die beiden Leiter verbindet. $\vec{E}(\vec{r})$ ist i. A. kompliziert, jedoch *proportional zur Ladung* Q . Dies folgt aus der *Linearität* der Gleichungen der Elektrostatik (tatsächlich auch der gesamten Elektrodynamik): Wenn

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad Q = \iiint_{\mathcal{V}_1} dV \rho(\vec{r}), \quad -Q = \iiint_{\mathcal{V}_2} dV \rho(\vec{r}), \quad (2.180)$$

dann gilt mit einer beliebigen Konstanten α auch

$$\vec{\nabla} \cdot \alpha \vec{E} = \frac{\alpha \rho}{\epsilon_0}, \quad \alpha Q = \iiint_{\mathcal{V}_1} dV \alpha \rho(\vec{r}), \quad -\alpha Q = \iiint_{\mathcal{V}_2} dV \alpha \rho(\vec{r}). \quad (2.181)$$

Unter der Voraussetzung, dass die Lösung eindeutig ist, folgt aus einer Änderung der Ladung Q um den Faktor α also nur eine Änderung von $\rho(\vec{r})$ und $\vec{E}(\vec{r})$ um denselben Faktor α . Dann ändert sich auch die Spannung U nur um den Faktor α . Damit folgt, dass U proportional zu Q ist, wobei die Proportionalitätskonstante

$$C := \frac{Q}{U} \quad (2.182)$$

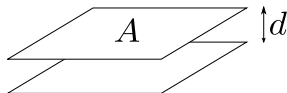
Kapazität genannt wird. Sie ist eine *geometrische* Eigenschaft der leitenden Körper und für komplizierte Formen nicht leicht zu berechnen. Beachte, dass Q die (konventionell positive) Ladung auf *einem* der beiden Leiter ist. Die Gesamtladung der Anordnung ist Null.

Liegt nur *ein* leitender Körper auf dem Potential ϕ vor und verschwindet das Potential im Unendlichen, so ist ϕ proportional zur Ladung Q des Körpers. Wir definieren die *Selbstkapazität*

$$C := \frac{Q}{\phi}. \quad (2.183)$$

Sie stimmt mit der zuvor definierten Kapazität überein, wenn eine der Kondensatorplatten eine Hohlkugel mit dem Radius $R \rightarrow \infty$ ist.

■ Beispiel: Plattenkondensator.



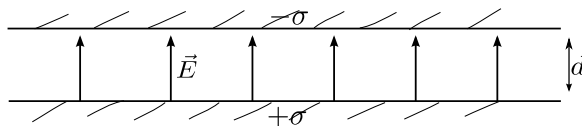
Für große Platten, d.h. für $A \gg d^2$, können wir den Kondensator als unendlich groß ansehen, falls wir uns nicht speziell für das Feld in der Nähe des Randes der Platten interessieren. Dann ist das System translationsinvariant in den Richtungen parallel zu den Platten und rotationsinvariant um jede Achse senkrecht zu den Platten. Daher muss die Oberflächenladungsdichte auf den Platten homogen sein. Da außerdem keine Ladungen zwischen den Platten vorhanden sind, ist das \vec{E} -Feld dort gleichförmig und, gemäß Abschnitt 2.6, senkrecht zu den Platten.

Die Oberflächenladungsdichte auf der positiv geladenen Platte ist

$$\sigma = \frac{Q}{A} \quad (2.184)$$

und das \vec{E} -Feld im Inneren ist dann

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A}. \quad (2.185)$$



Die Spannung ist

$$U = Ed = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A} d. \quad (2.186)$$

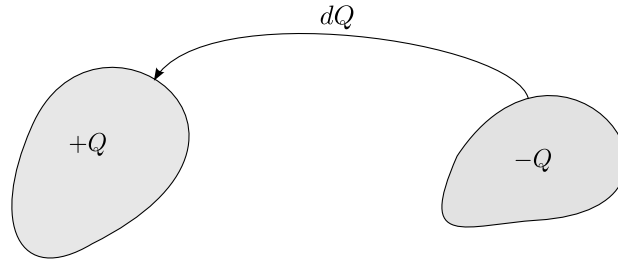
Daraus folgt für die Kapazität

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 A}{d}. \quad (2.187)$$

Wir erkennen, dass C/ϵ_0 nur von geometrischen Eigenschaften abhängt – es ist eine charakteristische Länge des Systems.

2.7.1 Energie in Kondensatoren

Das Aufladen eines Kondensators erfordert, Ladungen entgegen der elektrischen Kraft, also „bergauf“, zu verschieben. Dazu muss Arbeit verrichtet werden, die als Energie im Feld des Kondensators gespeichert wird.



Die Verschiebung von dQ erfordert die Arbeit

$$dW = U dQ = \frac{Q}{C} dQ. \quad (2.188)$$

Die Gesamtarbeit ist damit

$$W = \int_0^Q dQ' \frac{Q'}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (2.189)$$

für die Gesamtladung Q . W ist die im Kondensator gespeicherte Energie. Wir können auch schreiben

$$W = \frac{1}{2} C U^2 \quad (2.190)$$

mit der Spannung $U = Q/C$. Die Abhängigkeit der Energie von der Kapazität C ist also ganz unterschiedlich, wenn wir Kondensatoren bei konstanter Ladung oder konstanter Spannung vergleichen.

■ Beispiel: Die in einem geladenen, isolierten Plattenkondensator gespeicherte Energie hängt gemäß

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q^2 s}{A} \sim s \quad (2.191)$$

vom Plattenabstand, hier s , ab. Die Energie *verdoppelt* sich, wenn wir s verdoppeln. Das ist plausibel: Wir müssen Arbeit verrichten, um die Platten auseinander zu ziehen. Wir können leicht die Kraft ausrechnen, die die Platten aufeinander ausüben:

$$F = -\frac{dW}{ds} = -\frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q^2}{A}. \quad (2.192)$$

Die Kraft ist natürlich anziehend. Wie hängt andererseits die Energie von s ab, wenn der Kondensator an eine Spannungsquelle mit der Spannung U angeschlossen ist? Für $U = \text{const}$ schreiben wir

$$W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{A U^2}{s} \sim \frac{1}{s}. \quad (2.193)$$

Die Energie *halbiert* sich, wenn wir s verdoppeln. Dieses Ergebnis erscheint paradox, denn die resultierende Kraft

$$F \stackrel{?}{=} -\frac{dW}{ds} = +\frac{\epsilon_0}{2} \frac{A U^2}{s^2} \quad (2.194)$$

scheint abstoßend zu sein, d. h. die Platten auseinander zu treiben. Das widerspricht der Erwartung, dass sich entgegengesetzt geladene Körper anziehen. Die Auflösung liegt darin, dass sich bei $U = \text{const}$ die Energie der Spannungsquelle ändert, da Ladungen durch sie hindurch fließen. Bei einer Änderung des Plattenabstandes von ds ändert sich die Ladung um

$$dQ = dC U = d \left(\frac{\epsilon_0 A}{s} \right) U = -\frac{\epsilon_0 A}{s^2} U ds. \quad (2.195)$$

dQ fließt durch die Spannungsquelle bei der Spannung U . Dies ändert die Energie der Spannungsquelle um

$$dW_{\text{Quelle}} = -dQ U. \quad (2.196)$$

Für $ds > 0$ ist $dQ < 0$, die Ladung fließt „bergab“, Arbeit wird damit an der Spannungsquelle geleistet und ihre Energie nimmt zu, $dW_{\text{Quelle}} > 0$. Die gesamte Energieänderung des Stromkreises ist also

$$dW = dW_C + dW_{\text{Quelle}} = d\left(\frac{\epsilon_0}{2} \frac{AU^2}{s}\right) - dQU = -\frac{\epsilon_0}{2} \frac{AU^2}{s^2} ds + \epsilon_0 \frac{AU^2}{s^2} ds = +\frac{\epsilon_0}{2} \frac{AU^2}{s^2} ds > 0 \quad (2.197)$$

und die Kraft ist

$$F = -\frac{dW}{ds} = -\frac{\epsilon_0}{2} \frac{AU^2}{s^2} = -\frac{\epsilon_0}{2} \frac{AQ^2}{C^2 s^2} = -\frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q^2}{A}, \quad (2.198)$$

also dasselbe Ergebnis wie für $Q = \text{const.}$ Dies war zu erwarten, da die Kraft nur von den Ladungen und dem \vec{E} -Feld abhängt, die in beiden Situationen gleich sind.

2.8 Orthogonale Funktionensysteme

Als Vorbereitung für die in den folgenden Abschnitten zu besprechenden Methoden betrachten wir in diesem mathematischen Einschub Systeme orthogonaler Funktionen. Wir führen zunächst einige Begriffe auf einem sehr allgemeinen Niveau ein. Es seien $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, komplex- (oder speziell reell-) wertige, bezüglich einer reellen Gewichtsfunktion $w(x)$ auf einem Bereich \mathcal{B} quadratintegrale Funktionen, d. h.

$$\int_{\mathcal{B}} dx w(x) |\varphi_n(x)|^2 \quad (2.199)$$

existiert. \mathcal{B} muss nicht eindimensional sein. Man nennt das Funktionensystem bzgl. $w(x)$ *orthogonal*, wenn gilt

$$\int_{\mathcal{B}} dx w(x) \varphi_m^*(x) \varphi_n(x) = s_m \delta_{mn} \quad (2.200)$$

mit $s_m \neq 0$. Die linke Seite definiert ein *Skalarprodukt* zwischen bzgl. $w(x)$ quadratintegralen Funktionen. Man nennt das Funktionensystem *orthonormal*, wenn zusätzlich $s_m = 1 \forall m$ gilt.

Der Nutzen orthogonaler Funktionensysteme besteht darin, beliebige (quadratintegrale) Funktionen nach ihnen zu entwickeln, d. h. sie als Linearkombination der orthogonalen Funktionen darzustellen:

$$f(x) = \sum_n a_n \varphi_n(x). \quad (2.201)$$

Dafür benötigen wir i. A. unendlich viele $\varphi_n(x)$. Wir brechen aber die Reihe zunächst ab und untersuchen, wann $f(x)$ „möglichst gut“ approximiert wird. Dazu fordern wir, dass die mittlere quadratische Abweichung (bzgl. der Gewichtsfunktion $w(x)$) minimal wird:

$$\int_{\mathcal{B}} dx w(x) |f(x) - \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(x)|^2 \rightarrow \text{Min!} \quad (2.202)$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten a_m bilden wir die Ableitung nach a_m^* . Beachte dabei, dass a_m und a_m^* linear unabhängig sind, da $\text{Re } a_m$ und $\text{Im } a_m$ linear unabhängig sind; wir könnten ebenso gut nach $\text{Re } a_m$ und $\text{Im } a_m$ ableiten, mit demselben Ergebnis. Wir finden

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial a_m^*} \int_{\mathcal{B}} dx w(x) |f(x) - \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(x)|^2 = \int_{\mathcal{B}} dx w(x) [-\varphi_m^*(x)] [f(x) - \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(x)] \\ &= - \int_{\mathcal{B}} dx w(x) \varphi_m^*(x) f(x) + \sum_{n=1}^N a_n \underbrace{\int_{\mathcal{B}} dx w(x) \varphi_m^*(x) \varphi_n(x)}_{=s_m \delta_{mn}} = - \int_{\mathcal{B}} dx w(x) \varphi_m^*(x) f(x) + s_m a_m \\ \Rightarrow a_m &= \frac{1}{s_m} \int_{\mathcal{B}} dx w(x) \varphi_m^* f(x). \end{aligned} \quad (2.203)$$

Man nennt das Funktionensystem *vollständig*, wenn die mittlere quadratische Abweichung (bzgl. $w(x)$) für $N \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert:

$$\int_{\mathcal{B}} dx w(x) |f(x) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)|^2 = 0. \quad (2.204)$$

Vollständigkeit ist nicht einfach zu zeigen, aber alle hier verwendeten Funktionensysteme sind vollständig. Setzen wir die explizite Form (2.203) in die Entwicklung nach $\varphi_n(x)$ ein, so erhalten wir

$$f(x) = \sum_n \frac{1}{s_n} \int_{\mathcal{B}} dx' w(x') \varphi_n^*(x') f(x') \varphi_n(x) = \int_{\mathcal{B}} dx' w(x') \left[\sum_n \frac{1}{s_n} \varphi_n^*(x') \varphi_n(x) \right] f(x'). \quad (2.205)$$

Wir können auch trivialerweise schreiben

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\mathcal{B}} dx' \delta(x' - x) f(x') \\ &\Rightarrow \int_{\mathcal{B}} dx' w(x') \left[\sum_n \frac{1}{s_n} \varphi_n^*(x') \varphi_n(x) \right] f(x') = \int_{\mathcal{B}} dx' \delta(x' - x) f(x'). \end{aligned} \quad (2.206)$$

Da dies für alle Funktionen f gelten muss (zumindest solche, für die das erste Integral existiert), folgt

$$\begin{aligned} w(x') \sum_n \frac{1}{s_n} \varphi_n^*(x') \varphi_n(x) &= \delta(x' - x) \\ \Rightarrow \sum_n \frac{1}{s_n} \varphi_n^*(x') \varphi_n(x) &= \frac{\delta(x' - x)}{w(x)}. \end{aligned} \quad (2.207)$$

Dies ist die allgemeine *Vollständigkeitsrelation* (bzgl. $w(x)$). Ist die Gewichtsfunktion speziell $w(x) \equiv 1$ und ist das Funktionensystem orthonormal, so lautet die Vollständigkeitsrelation einfacher

$$\sum_n \varphi_n^*(x') \varphi_n(x) = \delta(x' - x). \quad (2.208)$$

■ Beispiel 1: Ein orthonormales Funktionensystem auf dem Intervall $[-L, L]$ mit der trivialen Gewichtsfunktion $w(x) \equiv 1$ ist gegeben durch

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \exp\left(i \frac{n\pi x}{L}\right), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.209)$$

Wir zeigen die Orthonormalität:

$$\int_{-L}^L dx \varphi_m^*(x) \varphi_n(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx \exp\left(-i \frac{m\pi x}{L} + i \frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx \exp\left(i \frac{(n-m)\pi x}{L}\right). \quad (2.210)$$

Für $n = m$ erhalten wir

$$\dots = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx 1 = \frac{2L}{2L} = 1. \quad (2.211)$$

Für $n \neq m$ erhalten wir dagegen

$$\dots = \frac{1}{2L} \frac{L}{i(n-m)\pi} \left[\exp(i(n-m)\pi) - \exp(-i(n-m)\pi) \right] = \frac{1}{2i(n-m)\pi} \underbrace{2i \sin(n-m)\pi}_{=0} = 0. \quad (2.212)$$

Jede Funktion $f(x)$ auf $[-L, L]$ kann nun entwickelt werden:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{\sqrt{2L}} \exp\left(i \frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.213)$$

mit

$$a_n = \int_{-L}^L dx \frac{1}{\sqrt{2L}} \exp\left(-i \frac{n\pi x}{L}\right) f(x). \quad (2.214)$$

Die Darstellung von $f(x)$ ist die *Fourier-Exponentialreihe*.

■ Beispiel 2: Die Exponentialfunktionen aus Beispiel 1 können zu einem orthonormalen Funktionensystem aus *reellen* Funktionen

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}}; \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{n\pi x}{L}, n = 1, 2, \dots; \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}, n = 1, 2, \dots \right\} \quad (2.215)$$

zusammengefasst werden. Dies führt zur üblichen, trigonometrischen Form der *Fourier-Reihe*:

$$f(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2L}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{\sqrt{L}} \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{b_n}{\sqrt{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (2.216)$$

mit

$$a_0 = \int_{-L}^L dx \frac{f(x)}{\sqrt{2L}}, \quad a_n \stackrel{n \geq 1}{=} \int_{-L}^L dx \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{n\pi x}{L} f(x), \quad b_n = \int_{-L}^L dx \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} f(x). \quad (2.217)$$

Üblicherweise werden die Normierungsfaktoren in die Koeffizienten absorbiert:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi x}{L} + B_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (2.218)$$

mit

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx \cos \frac{n\pi x}{L} f(x), \quad B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx \sin \frac{n\pi x}{L} f(x). \quad (2.219)$$

■ **Beispiel 3:** Es existieren zahlreiche Funktionensysteme aus *Polynomen*, die bzgl. bestimmter Gewichtsfunktionen orthogonal sind. Man spricht dann von *orthogonalen Polynomen*. Ein einfaches Beispiel sind die *Legendre-Polynome* $P_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Sie sind bzgl. $w(x) = 1$ auf $[-1, 1]$ orthogonal:

$$\int_{-1}^1 dx P_m(x) P_n(x) = \frac{2}{2m+1} \delta_{mn}. \quad (2.220)$$

Sie erfüllen offensichtlich nicht die Standardnormierung. Stattdessen gilt

$$P_m(1) = 1 \quad \forall m. \quad (2.221)$$

Die Legendre-Polynome lassen sich explizit mittels der *Rodrigues-Formel*

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} \left(\frac{d}{dx} \right)^m (x^2 - 1)^m \quad (2.222)$$

berechnen. Die ersten paar Polynome lauten

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}, \quad P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2}, \quad \dots \quad (2.223)$$

■ **Beispiel 4:** Ein wichtiges orthonormales Funktionensystem auf einem zweidimensionalen Bereich betrifft die Einheitskugel. Das Flächenelement auf der Einheitskugel lautet bekanntlich in Kugelkoordinaten $d\phi d\theta \sin \theta$, daher ist $\sin \theta$ eine natürliche Gewichtsfunktion. Bezüglich $w(\theta, \phi) = \sin \theta$ bilden die *Kugelflächenfunktionen* $Y_{lm}(\theta, \phi)$, $l = 0, 1, 2, \dots$, $m = -l, -l+1, \dots, l$ ein orthonormales Funktionensystem:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta_{l'l} \delta_{m'm}. \quad (2.224)$$

Diese Funktionen lauten explizit

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.225)$$

mit den *zugeordneten Legendre-Polynomen*

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \quad \text{für } m \geq 0, \quad (2.226)$$

speziell $P_l^0(x) = P_l(x)$ und

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \quad \text{für } m \geq 0. \quad (2.227)$$

Diese erfüllen die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^1 dx P_l^m(x) P_l^m(x) = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{l'l}. \quad (2.228)$$

Man kann nun zeigen, dass gilt

$$Y_{l,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \phi). \quad (2.229)$$

Die ersten paar Kugelflächenfunktionen mit $m \geq 0$ lauten

$$Y_{00}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad (2.230)$$

$$Y_{11}(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}, \quad (2.231)$$

$$Y_{10}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad (2.232)$$

$$Y_{22}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}, \quad (2.233)$$

$$Y_{21}(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}, \quad (2.234)$$

$$Y_{20}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1). \quad (2.235)$$

Wir können jetzt jede quadratintegrale Funktion $f(\theta, \phi)$ nach den $Y_{lm}(\theta, \phi)$ entwickeln:

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l R_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (2.236)$$

mit

$$R_{lm} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta Y_{lm}^*(\theta, \phi) f(\theta, \phi). \quad (2.237)$$

Es sei darauf hingewiesen, dass die Angabe von \mathcal{B} und $w(x)$ die orthogonalen Funktionen nicht eindeutig bestimmt. Es existieren immer beliebig viele orthogonale Systeme. Im Fall der Einheitskugel wurden die Funktionen $Y_{lm}(\theta, \phi)$ gewählt, da sie eine einfache Differentialgleichung erfüllen, nämlich

$$\Delta_{\theta,\phi} Y_{lm}(\theta, \phi) = -l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (2.238)$$

wobei

$$\Delta_{\theta,\phi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (2.239)$$

im Wesentlichen der Winkelanteil des Laplace-Operators ist. Genauer gilt

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta,\phi}. \quad (2.240)$$

2.8.1 Sturm-Liouville-Probleme

Wir werden jetzt eine Aussage zur Existenz vollständiger, orthogonaler Funktionensysteme besprechen, die im Zusammenhang mit Randwertaufgaben in der Elektrostatik wichtig ist. Den Beweis übergehen wir. Ein *Sturm-Liouville-Problem* besteht aus einer gewöhnlichen Differentialgleichung für eine Funktion $y(x)$, der Form

$$(py')' + (q + \lambda r)y = 0 \quad (2.241)$$

für $a < x < b$ mit linearen, homogenen Randbedingungen

$$c_1 y(a) + c_2 y'(a) = 0, \quad c_3 y(b) + c_4 y'(b) = 0. \quad (2.242)$$

Hier sind p, q, r Funktionen von x auf demselben Intervall und λ sowie c_1, \dots, c_4 sind Konstanten. Differentialgleichungen dieser Form ergeben sich oft durch *Separation der Variablen* in partiellen Differentialgleichungen, siehe 3.4. Man kann zeigen:

- Lösungen existieren nur für bestimmte Werte von λ . Diese nennt man *Eigenwerte* λ_i , die zugehörigen Lösungsfunktionen y_i *Eigenfunktionen*.
- Die Eigenfunktionen erfüllen die *Orthogonalitätsbeziehung*

$$\int_a^b dx r(x) y_i(x) y_j(x) = 0 \text{ für } \lambda_i \neq \lambda_j. \quad (2.243)$$

Man kann die y_i so wählen, dass dies für alle $i \neq j$ gilt.

- Die y_i bilden ein vollständiges Funktionensystem auf $[a, b]$.

Also lässt sich jede hinreichend gutartige Funktion h auf $[a, b]$ als Linearkombination

$$h(x) = \sum_i k_i y_i(x) \quad (2.244)$$

schreiben. Unter Ausnutzung der Orthogonalität folgt

$$\begin{aligned} \int_a^b dx r(x) y_j(x) h(x) &= \sum_i k_i \int_a^b dx r(x) y_j(x) y_i(x) = k_j \int_a^b dx r(x) y_j^2(x) \\ \Rightarrow k_i &= \frac{\int_a^b dx r(x) y_i(x) h(x)}{\int_a^b dx r(x) y_i^2(x)}. \end{aligned} \quad (2.245)$$

2.8.2 Fourier-Transformation

Bisher haben wir beschränkte Bereiche \mathcal{B} betrachtet. Die Theorie kann auf unbeschränkte Bereiche erweitert werden, insbesondere auf \mathbb{R}^d . Für $d = 1$ gehen wir von der Fourier-Exponentialreihe aus dem ersten Beispiel aus. Hier ist

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \exp\left(i \frac{n\pi x}{L}\right), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.246)$$

Wir definieren die Wellenzahl

$$k := \frac{n\pi}{L}. \quad (2.247)$$

Der Abstand zweier zugelassener Wellenzahlen ist dann $\Delta k = \pi/L = 2\pi/2L$ ($2L$ ist die Länge des Intervalls $[-L, L]$). Weiter ändern wir die Normierung, so dass

$$\varphi_k(x) = e^{ikx}, \quad \frac{k}{\Delta k} \in \mathbb{Z}. \quad (2.248)$$

Dann gilt

$$\int_{-L}^L dx \varphi_{k'}^*(x) \varphi_k(x) = \int_{-L}^L dx e^{-ik'x} e^{ikx} = 2L \delta_{k'k} = \frac{2\pi}{\Delta k} \delta_{k'k}. \quad (2.249)$$

Im Limes $L \rightarrow \infty$ geht $\Delta k \rightarrow 0$, die k -Punkte liegen also dicht. Der obige Ausdruck ist Null für $k' \neq k$ und divergent für $k' = k$. Daher ist er für $L \rightarrow \infty$ proportional zur δ -Funktion $\delta(k' - k)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ik'x} e^{ikx} = \eta \delta(k' - k). \quad (2.250)$$

Den Vorfaktor η erhalten wir aus

$$\sum_{k'} \Delta k \frac{2\pi}{\Delta k} \delta_{k'k} = 2\pi \sum_{k'} \delta_{k'k} = 2\pi. \quad (2.251)$$

Im Limes $L \rightarrow \infty$ wird $\sum_{k'} \Delta k \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dk'$ und, wie eben diskutiert, $\frac{2\pi}{\Delta k} \delta_{k'k} \rightarrow \eta \delta(k' - k)$, also

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \eta \delta(k' - k) &= 2\pi \\ \Rightarrow \eta &= 2\pi. \end{aligned} \quad (2.252)$$

Daher lautet die Orthogonalitätsbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ik'x} e^{ikx} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i(k'-k)x} = 2\pi\delta(k'-k). \quad (2.253)$$

Die Entwicklung einer Funktion $f(x)$ wird zu

$$f(x) = \sum_k a_k e^{ikx} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\Delta k} a_k e^{ikx}. \quad (2.254)$$

Wir definieren, wie in der Physik üblich, die *Fourier-Transformierte* von $f(x)$ durch

$$\tilde{f}(k) := \frac{2\pi}{\Delta k} a_k, \quad (2.255)$$

dann ist

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}(k) e^{ikx} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \tilde{f}(k) \quad (2.256)$$

(das ist die bekannte *Fourier-Transformation*) mit

$$\tilde{f}(k) = \frac{2\pi}{\Delta k} \underbrace{\frac{\Delta k}{2\pi}}_{1/s_k} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) \quad (2.257)$$

(dies ist die *Fourier-Rücktransformation*). Die Fourier-Transformation in d Dimensionen ergibt sich einfach durch konsekutive Fourier-Transformation in jeder kartesischen Koordinate:

$$\begin{aligned} f(\vec{r}) &= \int \dots \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \tilde{f}(\vec{k}), \\ \tilde{f}(\vec{k}) &= \int \dots \int d^d r e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} f(\vec{r}). \end{aligned} \quad (2.258)$$

2.9 Multipolentwicklung

Für räumlich begrenzte Ladungsverteilungen $\rho(\vec{r}')$ interessiert man sich manchmal nicht für das exakte Potential, sondern für eine gute Näherung für große r , weit entfernt von den Ladungen. Wir nehmen hier die freie Randbedingung $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(\vec{r}) = 0$ im Unendlichen an. Auch wenn wir von räumlich begrenzten Ladungsverteilungen sprechen, gelten die Ergebnisse ebenso für Ladungsdichten $\rho(\vec{r}')$, die für $r \rightarrow \infty$ schneller als jede Potenz abfallen. Mathematisch werden wir eine Taylor-Entwicklung in einem geeigneten kleinen Parameter durchführen.

2.9.1 Multipolentwicklung in kartesischen Koordinaten

Das Potential einer gegebenen Ladungsverteilung lautet

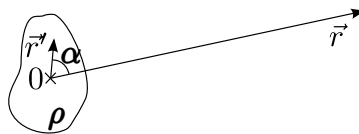
$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.259)$$

Hier ist

$$\Delta r = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \alpha}, \quad (2.260)$$

wobei α der von \vec{r} und \vec{r}' eingeschlossene Winkel ist (Kosinussatz). Wir schreiben

$$\Delta r = r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r} \cos \alpha}. \quad (2.261)$$



Ist $\rho(\vec{r})$ auf die Umgebung des Koordinatenursprungs beschränkt (Koordinatenursprung entsprechend wählen!), so kommen für große Abstände r nur $r' \ll r$ vor. Daher ist r'/r ein geeigneter kleiner Parameter und wir entwickeln den Faktor $1/\Delta r$ in eine Taylor-Reihe in r'/r . Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta r} &= \frac{1}{r} \left[1 - 2 \frac{r'}{r} \cos \alpha + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \right]^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r} \left[1 + \frac{r'}{r} \cos \alpha + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \frac{3 \cos^2 \alpha - 1}{2} + \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \frac{5 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha}{2} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (2.262)$$

Man kann zeigen, dass sich die Taylor-Reihe schreiben lässt als

$$\frac{1}{\Delta r} = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^k P_k(\cos \alpha) \quad (2.263)$$

mit den Legendre-Polynomen $P_k(x)$. Die ersten Polynome lauten, wie in Abschnitt 2.8 gesehen,

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}, \quad P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2}, \quad \dots \quad (2.264)$$

Damit erhalten wir für das Potential

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r^{k+1}} \iiint dV' (r')^k P_k(\cos \alpha) \rho(\vec{r}'). \quad (2.265)$$

Dies ist die *Multipolentwicklung* für das skalare Potential. Die Terme fallen offensichtlich mit $1/r^{k+1}$ ab, also schneller für höhere Ordnungen k . Sinnvolle Näherungen für größere Abstände bestehen also darin, nur die ersten paar nicht verschwindenden Terme mitzunehmen. Den Term k -ter Ordnung nennt man 2^k -Polterm, wobei 2^k aber durch Wortbestandteile griechischer oder lateinischer Herkunft ausgedrückt wird:

k	2^k	Term
0	1	Monopol
1	2	Dipol
2	4	Quadrupol
3	8	Oktupol
4	16	Hexadekupol
...		

Der Monopolterm lautet demnach

$$\phi_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \iiint dV' \underbrace{P_0(\cos \alpha)}_1 \rho(\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (2.266)$$

mit der Gesamtladung Q . Für eine Punktladung (einen „Monopol“) existiert nur dieser Term. Der Dipolterm ist

$$\phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \iiint dV' r' \underbrace{P_1(\cos \alpha)}_{=\cos \alpha} \rho(\vec{r}'). \quad (2.267)$$

Mit $\cos \alpha = \hat{r} \cdot \hat{r}'$ erhalten wir

$$\phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot \iiint dV' \vec{r}' \rho(\vec{r}'). \quad (2.268)$$

Wir definieren nun das (elektrische) *Dipolmoment*

$$\vec{p} := \iiint dV' \vec{r}' \rho(\vec{r}') \quad (2.269)$$

der Ladungsverteilung. Speziell für eine Punktladung q am Ort $\vec{R} + \vec{a}/2$ und eine Punktladung $-q$ am Ort $\vec{R} - \vec{a}/2$ erhalten wir

$$\vec{p} = \iiint dV' \vec{r}' \left[q\delta\left(\vec{r}' - \vec{R} - \frac{\vec{a}}{2}\right) - q\delta\left(\vec{r}' - \vec{R} + \frac{\vec{a}}{2}\right) \right] = q \left(\vec{R} + \frac{\vec{a}}{2} - \vec{R} + \frac{\vec{a}}{2} \right) = q\vec{a}. \quad (2.270)$$

Wir gewinnen also wieder das Ergebnis aus 2.1.3.

Ganz allgemein ist der Dipolbeitrag zum Potential also

$$\phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r} \cdot \vec{p}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3}. \quad (2.271)$$

Der Dipolbeitrag zum elektrischen Feld ist daher

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi_1(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{\nabla}(\vec{r} \cdot \vec{p})}{r^3} + (\vec{r} \cdot \vec{p}) \vec{\nabla} \frac{1}{r^3} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{p}}{r^3} - (\vec{r} \cdot \vec{p}) 3 \frac{\hat{r}}{r^4} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{p}) - \vec{p}}{r^3}, \quad (2.272)$$

wie für den Punktdipol schon bekannt.

Der Quadrupolterm lautet

$$\begin{aligned} \phi_2(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \iiint dV' (r')^2 P_2(\cos \alpha) \rho(\vec{r}') = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \iiint dV' (r')^2 (3 \cos^2 \alpha - 1) \rho(\vec{r}') \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \iiint dV' (r')^2 [3(\hat{r} \cdot \hat{r}')^2 - 1] \rho(\vec{r}') = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \iiint dV' [3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - r^2(r')^2] \rho(\vec{r}'). \end{aligned} \quad (2.273)$$

Dies schreiben wir nun in kartesischen Komponenten $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$:

$$\begin{aligned} \phi_2(\vec{r}) &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \iiint dx'_1 dx'_2 dx'_3 \left[3 \sum_{i,j} x_i x'_i x_j x'_j - \sum_i x_i x_i (r')^2 \right] \rho(\vec{r}') \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \sum_{i,j} x_i x_j \iiint dx'_1 dx'_2 dx'_3 [3x'_i x'_j - \delta_{ij} (r')^2] \rho(\vec{r}') \\ &=: \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \sum_{i,j} x_i x_j Q_{ij} \end{aligned} \quad (2.274)$$

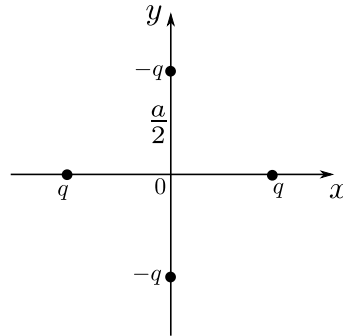
mit den Komponenten des *Quadrupoltensors*,

$$Q_{ij} = \iiint dx'_1 dx'_2 dx'_3 [3x'_i x'_j - \delta_{ij} (r')^2] \rho(\vec{r}'). \quad (2.275)$$

Beachte, dass die Spur des Quadrupoltensors immer verschwindet:

$$\text{Sp } \vec{Q} = \sum_i Q_{ii} = \iiint dx'_1 dx'_2 dx'_3 [3(r')^2 - 3(r')^2] \rho(\vec{r}') = 0. \quad (2.276)$$

■ Beispiel: Berechne den Quadrupoltensor für vier Punktladungen in folgender Anordnung:



$$\begin{aligned} Q_{ij} &= \iiint dV' [3x'_i x'_j - \delta_{ij} (r')^2] \left[q \delta \left(\vec{r}' - \frac{a}{2} \hat{x} \right) - q \delta \left(\vec{r}' - \frac{a}{2} \hat{y} \right) + q \delta \left(\vec{r}' + \frac{a}{2} \hat{x} \right) - q \delta \left(\vec{r}' + \frac{a}{2} \hat{y} \right) \right] \\ &= q \left[3 \left(\frac{a}{2} \hat{x} \right)_i \left(\frac{a}{2} \hat{x} \right)_j - \delta_{ij} \left(\frac{a}{2} \right)^2 - 3 \left(\frac{a}{2} \hat{y} \right)_i \left(\frac{a}{2} \hat{y} \right)_j + \delta_{ij} \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 3 \left(-\frac{a}{2} \hat{x} \right)_i \left(-\frac{a}{2} \hat{x} \right)_j - \delta_{ij} \left(\frac{a}{2} \right)^2 - 3 \left(-\frac{a}{2} \hat{y} \right)_i \left(-\frac{a}{2} \hat{y} \right)_j + \delta_{ij} \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{3}{2} q a^2 (\delta_{i1} \delta_{j1} - \delta_{i2} \delta_{j2}), \end{aligned} \quad (2.277)$$

oder als Matrix:

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}qa^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2}qa^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.278)$$

Das Dipolmoment ist ein Vektor, also ein Tensor erster Stufe. Das Quadrupolmoment ist ein Tensor zweiter Stufe. Das Oktupolmoment ist bereits ein Tensor dritter Stufe mit $3 \times 3 \times 3 = 27$ kartesischen Komponenten O_{ijk} . Die Berechnung dieser Komponenten wird wegen der Legendre-Polynome auch immer komplizierter. Es stellt sich die Frage, ob eine übersichtlichere Form der Multipolentwicklung möglich ist. Eine solche existiert tatsächlich. Sie beruht auf der Verwendung von Kugelkoordinaten.

2.9.2 Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten

Die Entwicklung

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^k P_k(\cos \alpha) \quad (2.279)$$

für kleine r'/r kann noch etwas verallgemeinert werden: Die linke Seite ist offensichtlich symmetrisch in \vec{r} und \vec{r}' , daher können wir sofort die analoge Entwicklung für kleine r/r' angeben (einfach r und r' vertauschen!). Zusammengefasst erhalten wir

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_{<}^k}{r_{>}^{k+1}} P_k(\cos \alpha) \quad (2.280)$$

mit $r_{<} = \min(r, r')$, $r_{>} = \max(r, r')$. Man kann zeigen, dass die Reihe für alle r, r' konvergiert, außer am singulären Punkt $\vec{r} = \vec{r}'$ (also $r = r'$ und $\alpha = 0$).

Als nächstes wollen wir $P_k(\cos \alpha)$ durch Kugelkoordinaten ausdrücken. Es existiert ein Additionstheorem für Kugelflächenfunktionen:

$$\sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \alpha). \quad (2.281)$$

Hier sind θ, ϕ (θ', ϕ') die Polarwinkel von \vec{r} (\vec{r}') und α ist weiterhin der von \vec{r} und \vec{r}' eingeschlossene Winkel. Einsetzen in Gl. (2.280) ergibt

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (2.282)$$

Der Vorteil dieser Reihenentwicklung ist, dass jeder Term in ein Produkt zweier Faktoren zerfällt, die jeweils nur von \vec{r} oder von \vec{r}' abhängen.

Einsetzen in die allgemeine Form von $\phi(\vec{r})$ ergibt, für $r_{>} = r$ und $r_{<} = r'$,

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \left[\iiint d^3r' (r')^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') \rho(\vec{r}') \right] \frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \phi) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} q_{lm} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (2.283)$$

mit den *sphärischen Multipolmomenten*

$$q_{lm} := \iiint d^3r' (r')^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') \rho(\vec{r}'). \quad (2.284)$$

Wir haben damit eine Entwicklung von $\phi(\vec{r})$ in Kugelflächenfunktionen gefunden. Die sphärischen Multipolmomente sind, im Gegensatz zu den kartesischen, i. A. komplex. Man kann leicht herleiten, dass gilt

$$q_{l,-m} = \iiint d^3r' (r')^l Y_{l,-m}^*(\theta', \phi') \rho(\vec{r}') = \iiint d^3r' (r')^l (-1)^m Y_{lm}(\theta', \phi') \rho(\vec{r}') = (-1)^m q_{lm}^*. \quad (2.285)$$

Insbesondere ist $q_{l0} = q_{l0}^*$ reell. Für festes l existieren also ein reelles Moment q_{l0} und l unabhängige komplexe Momente q_{l1}, \dots, q_{ll} . Für $l = 0, 1, 2$ können wir diese leicht mit den kartesischen Momenten aus dem letzten Abschnitt in Beziehung bringen:

$$q_{00} = \iiint d^3r' \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \rho(\vec{r}') = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}}, \quad (2.286)$$

$$\begin{aligned} q_{11} &= \iiint d^3r' r' \left(-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta' \underbrace{e^{-i\phi'}}_{=\cos \phi' - i \sin \phi'} \right) \rho(\vec{r}') = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \iiint d^3r' (x' - iy') \rho(\vec{r}') \\ &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x - ip_y), \end{aligned} \quad (2.287)$$

$$q_{10} = \iiint d^3r' r' \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta' \rho(\vec{r}') = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \iiint d^3r' z' \rho(\vec{r}') = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z, \quad (2.288)$$

$$q_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x + ip_y), \quad (2.289)$$

$$\begin{aligned} q_{22} &= \iiint d^3r' (r')^2 \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta' \underbrace{e^{-2i\phi'}}_{=(\cos \phi' - i \sin \phi')^2} \rho(\vec{r}') = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \iiint d^3r' (x' - iy')^2 \rho(\vec{r}') \\ &= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \iiint d^3r' (3x'x' - 6ix'y' - 3y'y') \rho(\vec{r}') \\ &= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \iiint d^3r' (3x'x' - (r')^2 - 6ix'y' - 3y'y' + (r')^2) \rho(\vec{r}') = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (Q_{11} - 2iQ_{12} - Q_{22}), \end{aligned} \quad (2.290)$$

$$\begin{aligned} q_{21} &= \iiint d^3r' (r')^2 \left(-\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \theta' \sin \theta' e^{-i\phi'} \right) \rho(\vec{r}') = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \iiint d^3r' z' (x' - iy') \rho(\vec{r}') \\ &= -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (Q_{13} - iQ_{23}), \end{aligned} \quad (2.291)$$

$$q_{20} = \iiint d^3r' (r')^2 \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (3 \cos^2 \theta' - 1) \rho(\vec{r}') = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \iiint d^3r' (3z'z' - (r')^2) \rho(\vec{r}') = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} Q_{33}, \quad (2.292)$$

$$q_{2,-1} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (Q_{13} + iQ_{23}), \quad (2.293)$$

$$q_{2,-2} = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (Q_{11} + 2iQ_{12} - Q_{22}). \quad (2.294)$$

Die sphärischen Multipolmomente zeigen, dass für die Beschreibung des 2^l -Pols nur ein reeller und l komplexe oder äquivalent $2l + 1$ reelle Parameter erforderlich sind. Zur Erinnerung, der kartesische 2^l -Pol-Tensor hat 3^l Komponenten, die offenbar für $l \geq 2$ nicht unabhängig sind. Die sphärische Form gestattet auch ohne weitere Schwierigkeiten die Bestimmung beliebig hoher Multipolterme. Sehr hohe Multipole werden z. B. bei der Analyse der kosmischen Mikrowellenhintergrundstrahlung ermittelt.

2.9.3 Energie von Ladungsverteilungen

Die Energie einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ im externen Potential $\phi(\vec{r})$ lautet

$$W = \iiint dV \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}). \quad (2.295)$$

Wenn $\phi(\vec{r})$ in dem Bereich, wo $\rho(\vec{r})$ wesentlich von Null verschieden ist, nicht zu stark von \vec{r} abhängt, können wir $\phi(\vec{r})$ in eine Taylor-Reihe entwickeln. Wir wählen den Koordinatenursprung geeignet im Inneren der Ladungsverteilung. Die Taylor-Entwicklung lautet

$$\phi(\vec{r}) = \phi(0) + \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \phi \Big|_{\vec{r}=0} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\vec{r}=0} + \dots = \phi(0) - \vec{r} \cdot \vec{E}(0) - \frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial E_j}{\partial x_i} \Big|_{\vec{r}=0} + \dots \quad (2.296)$$

Das externe Feld \vec{E} ist quellenfrei – „extern“ bedeutet, dass die Quellen von \vec{E} außerhalb von $\rho(\vec{r})$ liegen. Wir addieren eine Null zur letzten Gleichung:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \phi(0) - \vec{r} \cdot \vec{E}(0) - \frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i x_j \left. \frac{\partial E_j}{\partial x_i} \right|_{\vec{r}=0} + \underbrace{\frac{1}{6} r^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}}_{=0} \Big|_{\vec{r}=0} + \dots \\ &= \phi(0) - \vec{r} \cdot \vec{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j} (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \left. \frac{\partial E_j}{\partial x_i} \right|_{\vec{r}=0} + \dots\end{aligned}\quad (2.297)$$

Einsetzen in Gleichung (2.295) ergibt

$$\begin{aligned}W &= \iiint dV \rho(\vec{r}) \phi(0) - \iiint dV \vec{r} \rho(\vec{r}) \cdot \vec{E}(0) - \frac{1}{6} \iiint dV \sum_{i,j} (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{r}) \left. \frac{\partial E_j}{\partial x_i} \right|_{\vec{r}=0} + \dots \\ &= Q\phi(0) - \vec{p} \cdot \vec{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j} Q_{ij} \left. \frac{\partial E_j}{\partial x_i} \right|_{\vec{r}=0} + \dots\end{aligned}\quad (2.298)$$

Damit haben wir die Beiträge der Gesamtladung Q , des Dipolmoments \vec{p} und des Quadrupoltensors $\overleftrightarrow{Q} = (Q_{ij})$ zur Energie bestimmt. Beachte, dass \vec{p} an das Feld und \overleftrightarrow{Q} an den Feldgradienten koppelt. Entwickeln wir das Potential ϕ bzw. das Feld \vec{E} ihrerseits in Multipolbeiträge, so erhalten wir eine doppelte Multipolentwicklung für die Wechselwirkungsenergie zweier Ladungsverteilungen. Besonders wichtig ist die Wechselwirkung zweier Dipole. Mit

$$\vec{E}_1(\vec{\Delta r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\widehat{\Delta r}(\widehat{\Delta r} \cdot \vec{p}_1) - \vec{p}_1}{(\Delta r)^3} \quad (2.299)$$

erhalten wir

$$W_{\text{Dipol-Dipol}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 3(\widehat{\Delta r} \cdot \vec{p}_1)(\widehat{\Delta r} \cdot \vec{p}_2)}{(\Delta r)^3}. \quad (2.300)$$

Kapitel 3

Randwertprobleme in der Elektrostatik

Ist die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ gegeben und besteht die einzige Randbedingung in der Forderung, dass das Potential im Unendlichen verschwindet (hier ist eine Änderung erforderlich, wenn $\rho(\vec{r})$ für $r \rightarrow \infty$ nicht schnell genug oder gar nicht abfällt), so reicht das Poisson-Integral

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3.1)$$

im Prinzip aus, um das Potential im gesamten Raum zu bestimmen. Dies ist aber nicht die typische Aufgabenstellung. Vielmehr ist meistens $\phi(\vec{r})$ und damit das Feld $\vec{E}(\vec{r})$ in einem – evtl. unendlichen – Volumen V gesucht, wenn Folgendes gegeben ist:

- die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ in Nicht-Leitern in V ,
- die Form und Ladungen von leitenden Körpern in V ,
- eine geeignete Randbedingung für $\phi(\vec{r})$ an jedem Punkt des Randes ∂V , wobei hier ggf. auch der „Rand“ im Unendlichen eingeschlossen ist.

Wir werden gleich diskutieren, was mit „geeigneten Randbedingungen“ gemeint ist. Dann werden wir verschiedene Methoden zur Lösung solcher Probleme besprechen. Es ist wichtig, dass die Lösung unter schwachen Bedingungen *eindeutig* ist. Hat man also *eine* Lösung gefunden, so ist das Problem vollständig gelöst.

3.1 Greensche Sätze

Zur Vorbereitung leiten wir kurz die wichtigen Greenschen Sätze her. Seien $\phi(\vec{r})$ und $\psi(\vec{r})$ mindestens zweimal stetig differenzierbare skalare Felder auf einem endlichen Volumen \mathcal{V} . (Die Aussagen lassen sich durch geeignete Grenzübergänge auf unendliche Bereiche ausdehnen, was wir hier nicht zeigen.) Die *nach außen* (vom interessierenden Volumen weg) weisende Flächennormale am Ort \vec{r} auf der Oberfläche $\partial\mathcal{V}$ sei $\hat{n}(\vec{r})$. Damit definieren wir die *Normalenableitung* von ψ in $\vec{r} \in \partial\mathcal{V}$ durch

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} := \hat{n}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\psi(\vec{r}). \quad (3.2)$$

Wir definieren nun das Vektorfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) := \phi(\vec{r})\vec{\nabla}\psi(\vec{r}) \quad (3.3)$$

und wenden den Gaußschen Satz an:

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \iint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \vec{F}. \quad (3.4)$$

Die linke Seite ist

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{\nabla} \cdot (\phi\vec{\nabla}\psi) = \iiint_{\mathcal{V}} dV (\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\psi + \phi\nabla^2\psi) \quad (3.5)$$

und die rechte Seite

$$\iint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \vec{F} = \iint_{\partial\mathcal{V}} ds \hat{n} \cdot \phi \vec{\nabla} \psi = \iint_{\partial\mathcal{V}} ds \phi \frac{\partial \psi}{\partial n}. \quad (3.6)$$

Es folgt der 1. Greensche Satz

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV (\phi \nabla^2 \psi + \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi) = \iint_{\partial\mathcal{V}} ds \phi \frac{\partial \psi}{\partial n}. \quad (3.7)$$

Vertauschung der Bezeichnungen ϕ und ψ ergibt offensichtlich

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV (\psi \nabla^2 \phi + \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \phi) = \iint_{\partial\mathcal{V}} ds \psi \frac{\partial \phi}{\partial n}. \quad (3.8)$$

Subtraktion der beiden Gleichungen liefert den 2. Greenschen Satz

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) = \iint_{\partial\mathcal{V}} ds \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right). \quad (3.9)$$

3.2 Eindeutigkeitsätze

Wir zeigen jetzt, dass die Vorgabe von $\rho(\vec{r})$ in \mathcal{V} und bestimmten Randbedingungen an das Potential $\phi(\vec{r})$ auf $\partial\mathcal{V}$ die Lösung $\phi(\vec{r})$ der Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.10)$$

eindeutig (evtl. bis auf eine additive Konstante) festlegt. Man unterscheidet die folgenden Typen von Randbedingungen:

- *Dirichlet-Randbedingungen*: ϕ auf $\partial\mathcal{V}$ gegeben.
- *Neumann-Randbedingungen*:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} \equiv \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \phi \equiv -\hat{n} \cdot \vec{E} \quad (3.11)$$

auf $\partial\mathcal{V}$ gegeben. Hier definiert man \hat{n} meist als nach *innen* [in Richtung $\rho(\vec{r})$] weisende Flächennormale.

- *Gemischte Randbedingungen* liegen vor, wenn auf einem Teil $\mathcal{S}_D \subset \partial\mathcal{V}$ der Oberfläche Dirichlet- und auf dem Komplement $\mathcal{S}_N = \partial\mathcal{V} \setminus \mathcal{S}_D \subset \partial\mathcal{V}$ Neumann-Randbedingungen vorliegen.

Beweis der Eindeutigkeit: Seien $\phi_1(\vec{r})$, $\phi_2(\vec{r})$ Lösungen der Poisson-Gleichung, die dieselben, evtl. gemischten, Randbedingungen erfüllen:

$$\phi_1 = \phi_2 \quad \text{auf } \mathcal{S}_D, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \quad \text{auf } \mathcal{S}_N. \quad (3.13)$$

Wir definieren $\psi(\vec{r}) := \phi_1(\vec{r}) - \phi_2(\vec{r})$. Dann gilt

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (3.14)$$

(Laplace-Gleichung!) und

$$\psi = 0 \quad \text{auf } \mathcal{S}_D, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \mathcal{S}_N. \quad (3.16)$$

Der erste Greensche Satz lautet für $\phi = \psi$:

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV (\underbrace{\psi \nabla^2 \psi}_{=0} + \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \psi) = \iint_{\partial\mathcal{V}} ds \psi \frac{\partial \psi}{\partial n}. \quad (3.17)$$

Die rechte Seite verschwindet, da $\psi \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ auf $\mathcal{S}_D \cup \mathcal{S}_N = \partial \mathcal{V}$. Es folgt

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \psi = 0. \quad (3.18)$$

Da der Integrand nichtnegativ ist, folgt

$$\vec{\nabla} \psi \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \psi = \text{const.} \quad (3.19)$$

Liegen *irgendwo* auf $\partial \mathcal{V}$ Dirichlet-Randbedingungen vor, ist also \mathcal{S}_D nicht leer, so ist dort, und daher überall in \mathcal{V} , $\psi = 0$ und damit $\phi_2(\vec{r}) = \phi_1(\vec{r})$. Liegen dagegen reine Neumann-Randbedingungen vor, so folgt nur $\phi_2(\vec{r}) = \phi_1(\vec{r}) + \text{const.}$ Die Konstante ist aber physikalisch bedeutungslos, da das beobachtbare elektrische Feld $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$ nicht von ihr abhängt.

Die physikalische Bedeutung der Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen ergibt sich aus den Betrachtungen in den Abschnitten 2.4 und 2.6:

- An geladenen Flächen gilt

$$\frac{\partial \phi_a}{\partial n} - \frac{\partial \phi_i}{\partial n} = -E_{a,n} + E_{i,n} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (3.20)$$

wobei „a“ und „i“ für „außen“ und „innen“ stehen.

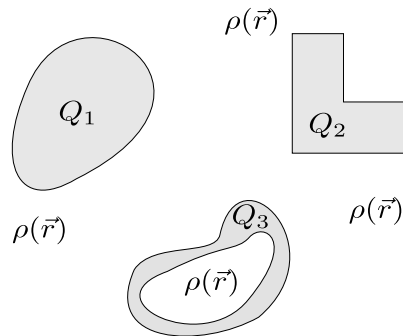
- An Dipolschichten gilt

$$\phi_a - \phi_i = \frac{D}{\epsilon_0} \quad (3.21)$$

(D ist die Dipolflächendichte).

- Leiteroberflächen sind Äquipotentialflächen, also gilt $\phi = \text{const.}$ Ist speziell $\phi = 0$ auf der Oberfläche, so sagen wir, der Leiter ist *geerdet*.

Es gilt auch folgendes Theorem: Gegeben seien leitende Körper bekannter Geometrie mit Ladungen Q_i , eingebettet in ein isolierendes Medium mit der Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$.



Das gesamte System sei von *einem* Leiter umgeben, der jedoch im Unendlichen liegen kann, dann ist das Unendliche eine Äquipotentialfläche, d. h. $\lim_{\vec{r} \rightarrow \infty} \phi(\vec{r}) = \text{const}$ in allen Raumrichtungen. Dann ist das Feld $\vec{E}(\vec{r})$ eindeutig bestimmt.

Beweis: Seien $\vec{E}_1(\vec{r})$ und $\vec{E}_2(\vec{r})$ Lösungen des Problems für \vec{r} im isolierenden Bereich (in den Leitern gilt ohnehin $\vec{E} \equiv 0$). Dann gilt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1 = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_2 = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (3.22)$$

Außerdem gilt für geschlossene Flächen \mathcal{S}_i , die jeweils nur den Leiter mit der Ladung Q_i einschließen,

$$\oiint_{\mathcal{S}_i} d\vec{s} \cdot \vec{E}_1 = \oiint_{\mathcal{S}_i} d\vec{s} \cdot \vec{E}_2 = \frac{Q_i}{\epsilon_0}, \quad (3.23)$$

und für eine Fläche \mathcal{S} , die unmittelbar innerhalb der umgebenden Leiteroberfläche liegt (evtl. im Unendlichen)

$$\oiint_{\mathcal{S}} d\vec{s} \cdot \vec{E}_1 = \oiint_{\mathcal{S}} d\vec{s} \cdot \vec{E}_2 = \frac{Q_{\text{tot}}}{\epsilon_0} \quad (3.24)$$

mit der eingeschlossenen Gesamtladung Q_{tot} . Sei $\Delta\vec{E} := \vec{E}_1 - \vec{E}_2$. Dann gilt

$$\vec{\nabla} \cdot \Delta\vec{E} = 0, \quad (3.25)$$

$$\oiint_{S_i \text{ oder } S} d\vec{s} \cdot \Delta\vec{E} = 0. \quad (3.26)$$

Sei $\Delta\vec{E} = -\vec{\nabla}\psi$ (ψ existiert, da $\vec{\nabla} \times \Delta\vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E}_1 - \vec{\nabla} \times \vec{E}_2 = 0$). Wir verwenden den 1. Greenschen Satz mit $\phi = \psi$, wobei \mathcal{V} der gesamte isolierende Bereich ist,

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV (\psi \nabla^2 \psi + \vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\psi) = \oiint_{S \cup S_1 \cup S_2 \cup \dots} ds \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} \quad (3.27)$$

$$\Rightarrow \iiint_{\mathcal{V}} dV (-\psi \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \Delta\vec{E}}_{=0} + (\Delta E)^2) = - \oiint_S d\vec{s} \cdot \psi \Delta\vec{E} - \oiint_{S_1} d\vec{s} \cdot \psi \Delta\vec{E} - \dots \quad (3.28)$$

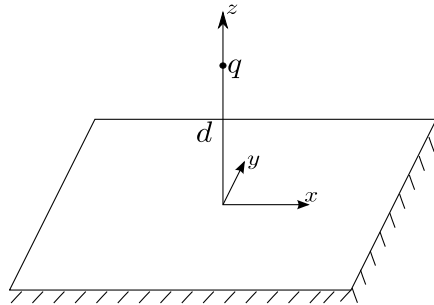
Nun ist ψ auf jeder der Flächen S und S_i konstant (Äquipotentialflächen) und kann daher aus den Flächenintegralen herausgezogen werden. (ψ ist i. A. für verschiedene Leiter nicht gleich.) Wir erhalten

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV (\Delta E)^2 = -\psi_{\text{Rand}} \underbrace{\oiint_S d\vec{s} \cdot \Delta\vec{E}}_{=0} - \psi_1 \underbrace{\oiint_{S_1} d\vec{s} \cdot \Delta\vec{E}}_{=0} - \dots = 0. \quad (3.29)$$

Da $(\Delta E)^2$ nichtnegativ ist, folgt $\Delta\vec{E} \equiv 0$, also $\vec{E}_2 = \vec{E}_1$.

3.3 Bildladungsmethode

Diese Methode ist nützlich, um das Feld für leitende Körper *hoher Symmetrie* und zusätzliche, explizit gegebene Ladungen zu bestimmen. Wir illustrieren die Methode anhand einer Punktladung q im Abstand d von einer Ebene. Diese sei geerdet, d. h. sie liegt auf dem Potential $\phi = 0$.



Wir haben also die Poisson-Gleichung

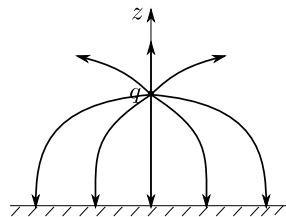
$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - d\hat{z}) \quad \text{für } z > 0 \quad (3.30)$$

mit den Randbedingungen

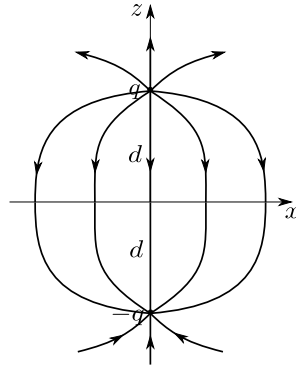
$$\phi(x, y, 0) = 0, \quad (3.31)$$

$$\lim_{\substack{\vec{r} \rightarrow \infty \\ z > 0}} \phi(\vec{r}) = 0 \quad (3.32)$$

zu lösen. Wir wissen, dass \vec{E} senkrecht auf der Leiteroberfläche steht und können daher die Feldlinien ohne Rechnung skizzieren:



Die zu diskutierende Lösungsmethode basiert auf der folgenden Erkenntnis: Wenn wir ein Potential $\phi(\vec{r})$ gefunden haben, das die Gleichung und die Randbedingungen erfüllt, dann ist die Aufgabe wegen der Eindeutigkeitsätze gelöst, unabhängig davon, wie wir uns $\phi(\vec{r})$ beschafft haben. Das \vec{E} -Feld sieht aber im oberen Halbraum dem Feld eines Paares von Punktladungen $\pm q$ in Abwesenheit der leitenden Ebene ähnlich.



Für dieses Ersatzsystem ist

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\vec{r} - d\hat{z}|} - \frac{q}{|\vec{r} + d\hat{z}|} \right). \quad (3.33)$$

Dieses Potential erfüllt

$$\nabla^2 \phi = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - d\hat{z}) \quad \text{im oberen Halbraum,} \quad (3.34)$$

$$\phi(x, y, 0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + d^2}} \right) = 0, \quad (3.35)$$

$$\lim_{\substack{\vec{r} \rightarrow \infty \\ z > 0}} \phi(\vec{r}) = 0, \quad (3.36)$$

ist also für $z \geq 0$ eine – und damit die einzige – Lösung des ursprünglichen Problems. Im unteren Halbraum ist dies *keine* korrekte Lösung; befinden sich hier keine Ladungen, so gilt hier $\phi \equiv 0$. Aber der Bereich $z < 0$ war auch nicht der Gegenstand der Aufgabe.

Die wesentliche Idee ist, im „verbotenen“ Bereich *fiktive Bildladungen* (Spiegelbildungen) einzuführen, die, zusammen mit den physikalischen Ladungen, ein Potential erzeugen, das die Randbedingungen erfüllt. Sie heißen Bildladungen, weil sie in gewissem Sinn Spiegelbilder der physikalischen Ladungen sind. Bevor wir weitere Beispiele ansehen, können wir für das System mit einer Punktladung oberhalb einer leitenden Ebene weitere Schlüsse aus dem Ergebnis ziehen: Das elektrische Feld für $z \geq 0$ ist

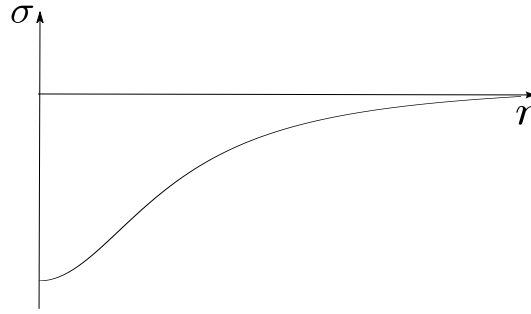
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r} - d\hat{z}}{|\vec{r} - d\hat{z}|^3} - \frac{\vec{r} + d\hat{z}}{|\vec{r} + d\hat{z}|^3} \right). \quad (3.37)$$

Auf der leitenden Ebene lautet es

$$\vec{E}(x, y, 0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x, y, -d) - (x, y, d)}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{d}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} \hat{z}. \quad (3.38)$$

Das Feld steht also, wie erwartet, senkrecht auf der leitenden Oberfläche. Aus dem \vec{E} -Feld erhalten wir gemäß Abschnitt 2.6.1 sofort die *influenzierte Ladungsdichte*

$$\sigma(x, y) = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{n} = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{z} = -\frac{q}{2\pi} \frac{d}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} = -\frac{q}{2\pi} \frac{d}{(r^2 + d^2)^{3/2}}. \quad (3.39)$$



Damit ist die insgesamt auf der Oberfläche induzierte Ladung

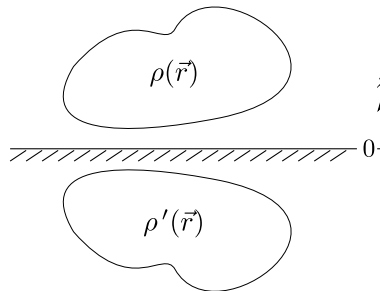
$$q_{\text{ind}} = \iint dx dy \sigma(x, y) = \int_0^\infty dr r \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \sigma(r) = -q d \underbrace{\int_0^\infty dr \frac{r}{(r^2 + d^2)^{3/2}}}_{=1/d} = -q. \quad (3.40)$$

Dieses Ergebnis war zu erwarten, da das Potential für $z \geq 0$ dasselbe ist wie für ein $\pm q$ Paar, das auch eine verschwindende Gesamtladung hat. Da die Kraft auf die Ladung q nur vom lokalen \vec{E} -Feld abhängt, können wir sie ebenfalls sofort berechnen. Wichtig ist dabei aber, dass nur das Feld aufgrund der induzierten Oberflächenladung (oder äquivalent der Bildladung) berücksichtigt werden darf. Das von q selbst erzeugte Feld übt keine Kraft auf q aus (Selbstwechselwirkung). Also ist die Kraft

$$\vec{F} = q \vec{E}_{\text{ohne } q}(d\hat{z}) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\hat{z} + d\hat{z}}{|d\hat{z} + d\hat{z}|^3} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2d}{|2d|^3} \hat{z} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|2d|^2} \hat{z}. \quad (3.41)$$

Dies ist natürlich einfach die Coulomb-Kraft für ein Paar von Punktladungen $q, -q$ im Abstand $2d$.

Die Bildladungsmethode funktioniert auch für beliebige Ladungsdichten $\rho(\vec{r})$ außerhalb der Leiter – in diesem Fall wenden wir einfach das Superpositionsprinzip an. Z. B. für eine leitende Ebene:



Die Bildladungen sind einfach

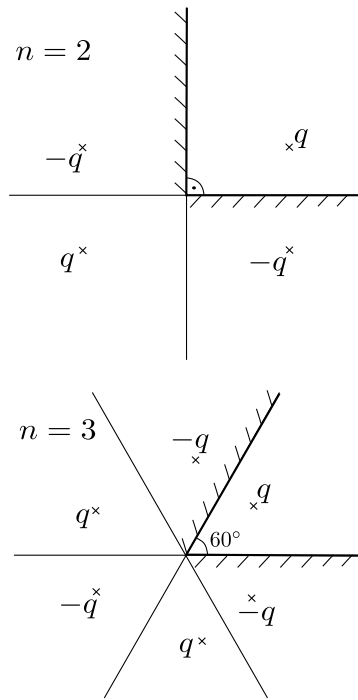
$$\rho'(x, y, z) = -\rho(x, y, -z) \quad \text{für } z < 0 \quad (3.42)$$

und das Potential lautet, für $z > 0$,

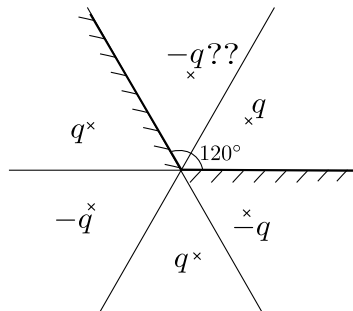
$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \frac{\rho(\vec{r}') + \rho'(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dx dy dz \frac{\rho(x', y', z') - \rho(x', y', -z')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}. \quad (3.43)$$

Die Methode ist auch für bestimmte andere Geometrien von Leitern anwendbar; diese müssen aber so beschaffen sein, dass alle Bildladungen *außerhalb* des physikalischen Bereichs liegen, d. h. *hinter* der leitenden Oberfläche. Folgende Geometrien sind z. B. so behandelbar:

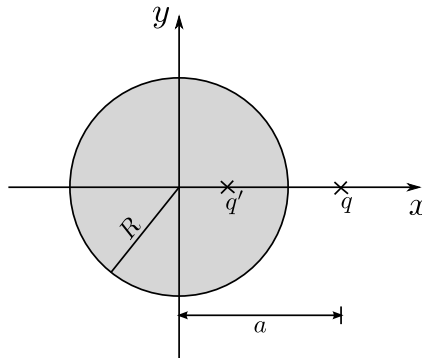
1. Zwei geerdete leitende Ebenen, die sich unter einem Winkel π/n (also $180^\circ/n$) mit $n = 1, 2, 3, \dots$ treffen. $n = 1$ entspricht der leitenden Ebene.



Bei einem Winkel von 120° funktioniert die Methode nicht, da eine der Bildladungen, die erforderlich ist, um $\phi = 0$ auf den Leiteroberflächen zu gewährleisten, im physikalischen Bereich liegen müsste. Dann hätten ϕ und \vec{E} einen Pol und die Poisson-Gleichung $\rho = -\epsilon_0 \nabla^2 \phi$ würde dort eine reale Ladung ergeben, die gar nicht vorhanden ist.



2. Drei leitende Ebenen, die sich unter bestimmten Winkeln treffen, z. B. jeweils 90° .
3. Überraschenderweise eine leitende Kugel. Hier ist die Bildladung nicht $q' = -q$, sondern reduziert zu $q' = -Rq/a$, was wir hier aber nicht nachrechnen.



Für einen unendlich langen Zylinder (einen dicken Draht) findet man dagegen keine geeigneten Bildladungen.

3.4 Separationsmethode

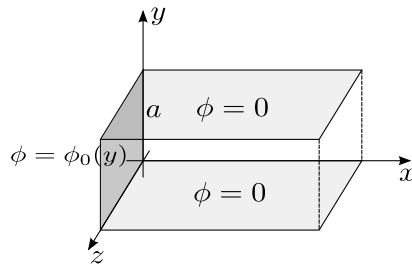
Für die Lösung der Laplace-Gleichung $\nabla^2\phi = 0$, für die ϕ oder $\vec{E} \cdot \hat{n} = -\partial\phi/\partial n$ auf einer Fläche \mathcal{S} vorgegeben ist, ist die Separation der Variablen eine nützliche Methode. Sie ist auch in der Quantenmechanik wichtig. Die Idee ist, für $\phi(\vec{r})$ einen Ansatz als *Produkt* von Funktionen zu schreiben, die jeweils nur von einer Koordinaten abhängen (*Separationsansatz*). Die *Wahl* der Koordinaten ist entscheidend dafür, ob dieser Ansatz Erfolg hat. Haben die Ränder keine besonders hohe Symmetrie, lässt sich i. A. keine Lösung in Produktform finden. Wir illustrieren die Methode wieder anhand eines Beispiels: Löse die Laplace-Gleichung $\nabla^2\phi = 0$ mit den Randbedingungen

$$\phi(x, 0, z) = 0, \tag{3.44}$$

$$\phi(x, a, z) = 0, \tag{3.45}$$

$$\phi(0, y, z) = \phi_0(y) \quad (\text{vorgegeben}), \tag{3.46}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x, y, z) = 0. \tag{3.47}$$



Das Problem ist translationsinvariant in der z -Richtung, also erwarten wir, dass die Lösung ϕ nicht von z abhängt. Nun machen wir den Separationsansatz

$$\phi(x, y) = X(x)Y(y) \tag{3.48}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2X}{dx^2}Y + X\frac{d^2Y}{dy^2} = 0 \quad \Big| : XY \tag{3.49}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = 0 \tag{3.50}$$

(wir müssen im Prinzip am Ende prüfen, was bei Nullstellen von $X(x)$ und $Y(y)$ passiert). Es folgt

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} \quad \forall x, y. \tag{3.51}$$

Aber jetzt hängt die linke Seite der Gleichung gar nicht von y ab und die rechte nicht von x . Sie sind aber für alle x, y *gleich*. Wir bezeichnen diese Größe mit C . C ist also einerseits gleich einer von y unabhängigen Größe und andererseits gleich einer von x unabhängigen Größe. Damit ist C unabhängig von x und von y und damit eine Konstante. Sie wird *Separationskonstante* genannt.

Wir können die Separationskonstante natürlich nennen, wie wir wollen, und bezeichnen sie hier mit k^2 , weil das später nützlich ist. Also haben wir

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = k^2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -k^2 \tag{3.52}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2X}{dx^2} = k^2 X \quad \text{und} \quad \frac{d^2Y}{dy^2} = -k^2 Y. \tag{3.53}$$

Dies sind zwei *gewöhnliche* Differentialgleichungen. Die allgemeinen Lösungen sind bekannt:

$$X(x) = A e^{kx} + B e^{-kx}, \tag{3.54}$$

$$Y(y) = C \sin ky + D \cos ky. \tag{3.55}$$

Es folgt

$$\phi(\vec{r}) = (A e^{kx} + B e^{-kx})(C \sin ky + D \cos ky). \tag{3.56}$$

Nun müssen wir versuchen, die Konstanten k , A , B , C und D aus den Randbedingungen zu bestimmen. Es kann passieren, dass der Separationsansatz hier scheitert. Aus

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x, y, z) = 0 \quad (3.57)$$

folgt $A = 0$. Dann können wir den Faktor B in C und D absorbieren: $BC \rightarrow C$, $BD \rightarrow D$. Aus

$$0 = \phi(x, y = 0, z) = e^{-kx} D \quad (3.58)$$

folgt $D = 0$. Aus

$$0 = \phi(x, y = a, z) = e^{-kx} C \sin ka \quad (3.59)$$

folgt dann $\sin ka = 0$, also

$$k = n \frac{\pi}{a}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.60)$$

(negative n ergeben keine neuen Lösungen). Die Lösung mit $n = 0$ ist $\phi \equiv 0$, die wir auch für $C = 0$ und $n > 0$ erhalten. Der Fall $n = 0$ ist also redundant und kann also ausgeschlossen werden. Die Lösung $\phi \equiv 0$ trifft natürlich nur zu, wenn die noch übrig gebliebene Randbedingung $\phi(x = 0, y, z) = \phi_0(y) = 0$ lautet. Schließlich erhalten wir

$$\phi(\vec{r}) = C e^{-kx} \sin ky \quad \text{mit } k = n \frac{\pi}{a}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.61)$$

Aber wir müssen noch die Randbedingung

$$\phi_0(y) = \phi(x = 0, y, z) = C \sin ky \quad (3.62)$$

erfüllen. Das wird *nicht* möglich sein, es sei denn, $\phi_0(y)$ ist von der speziellen Form $\phi_0(y) = \alpha \sin(n\pi y/a)$, $n \in \mathbb{N}$. Für allgemeines $\phi_0(y)$ scheint die Methode gescheitert zu sein. Es gibt aber einen Ausweg: Wir haben einen unendlichen Satz von unabhängigen Lösungen (abgezählt durch $n \in \mathbb{N}$) einer *linearen* Differentialgleichung gefunden. Daher können wir nach einer *Superposition* dieser Lösungen suchen, die die Randbedingungen erfüllt. Die *allgemeine* Lösung ist

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left(-\frac{n\pi x}{a}\right) \sin \frac{n\pi y}{a} \quad (3.63)$$

mit beliebigen Koeffizienten C_n . Die Randbedingung bei $x = 0$ lautet dann

$$\phi_0(y) = \phi(x = 0, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi y}{a}. \quad (3.64)$$

Dies ist eine Fourier-Sinus-Reihe. Wir können die C_n daher durch Fourier-Rücktransformation ermitteln. Konkret: Für $n' \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \int_0^a dy \sin \frac{n'\pi y}{a} \phi_0(y) &= \int_0^a dy \sin \frac{n'\pi y}{a} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi y}{a} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \underbrace{\int_0^a dy \sin \frac{n'\pi y}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}}_{= \begin{cases} 0 & \text{für } n' \neq n \\ a/2 & \text{für } n' = n \end{cases} = \delta_{n'n} \frac{a}{2}} \\ &= \frac{a}{2} C_{n'} \end{aligned} \quad (3.65)$$

(hier haben wir die Orthogonalität der Sinus-Funktionen auf dem Intervall $[0, a]$ ausgenutzt). Es folgt

$$C_n = \frac{2}{a} \int_0^a dy \sin \left(\frac{n\pi y}{a}\right) \phi_0(y). \quad (3.66)$$

Damit ist das Problem vollständig gelöst.

Als Beispiel betrachten wir den besonders ungünstigen Fall $\phi_0(y) = \phi_0 = \text{const} \neq 0$, d. h. die Fläche bei $x = 0$ liegt auf einem anderen Potential als die Flächen bei $y = 0$ und $y = a$. Dann ist

$$C_n = \frac{2}{a} \int_0^a dy \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \phi_0 = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ \frac{4\phi_0}{n\pi} & \text{für } n \text{ ungerade,} \end{cases} \quad (3.67)$$

also

$$\phi(\vec{r}) = \frac{4\phi_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{n\pi x}{a}\right) \sin \frac{n\pi y}{a}. \quad (3.68)$$

Diese Reihe konvergiert für $x < a$ sehr langsam; wir brauchen viele Terme, um eine gute Näherung zu erhalten. Die Ursache ist, dass ϕ an den Linien, an denen die Seitenflächen zusammenstoßen, unstetig ist.

3.4.1 Separation in Kugelkoordinaten

Als weitere Anwendung betrachten wir die Lösung der Laplace-Gleichung

$$\nabla^2 \phi(r, \theta, \phi) = 0 \quad (3.69)$$

in Kugelkoordinaten. Diese sind nützlich, wenn Randbedingungen auf (im Nullpunkt zentrierten) Kugeloberflächen oder im Unendlichen gegeben sind.

Wir separieren zunächst die radiale Abhängigkeit von der Winkelabhängigkeit,

$$\phi(r, \theta, \phi) = R(r) Y(\theta, \phi). \quad (3.70)$$

Es folgt

$$Y \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{R}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} = 0 \quad (3.71)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Y} \underbrace{\left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)}_{= \Delta_{\theta, \phi}} Y = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial R}{\partial r} = \text{const.} \quad (3.72)$$

Nun sind die Eigenfunktionen des Winkelanteils nach 2.8 die Kugelflächenfunktionen, wobei gilt

$$\Delta_{\theta, \phi} Y_{lm}(\theta, \phi) = -l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (3.73)$$

Es ist also sinnvoll, die Separationskonstante mit $-l(l+1)$ zu bezeichnen. Dann folgt die *Radialgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial R}{\partial r} = l(l+1) R. \quad (3.74)$$

Diese Gleichung ist skaleninvariant: Sie verändert sich nicht, wenn wir $r \rightarrow \eta r$ mit einer Zahl $\eta \neq 0$ ersetzen. Daher dürfen die fundamentalen Lösungen auch keine (Längen-)Skala enthalten. Sie müssen also reine Potenzen von r sein und wir machen den Ansatz

$$R(r) = r^\alpha. \quad (3.75)$$

Einsetzen ergibt

$$\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} r^\alpha = \frac{\partial}{\partial r} \alpha r^{\alpha+1} = \alpha(\alpha+1) r^\alpha \stackrel{!}{=} l(l+1) r^\alpha \quad (3.76)$$

$$\Rightarrow \alpha(\alpha+1) = l(l+1) \quad (3.77)$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \alpha - l(l+1) = 0 \quad (3.78)$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + l(l+1)} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{l^2 + l + \frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2} \pm \underbrace{\left(l + \frac{1}{2}\right)}_{>0} = \begin{cases} l \\ -l-1. \end{cases} \quad (3.79)$$

Die allgemeine Lösung ist also

$$R(r) = Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}}. \quad (3.80)$$

Die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung lautet daher

$$\phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (3.81)$$

Vergleich mit der sphärischen Multipolentwicklung aus 2.9 zeigt, dass die Koeffizienten B_{lm} der *abfallenden* Terme mit den sphärischen Multipolmomenten zusammenhängen:

$$B_{lm} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q_{lm}}{2l+1}. \quad (3.82)$$

In der Multipolentwicklung traten die *anwachsenden* Terme mit $A_{lm} r^l$ nicht auf, da $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(\vec{r}) = 0$ vorausgesetzt wurde. Hier können wir jetzt auch nichttriviale Randbedingungen im Unendlichen oder allgemein an einer äußeren Oberfläche behandeln.

■ Beispiel: Gesucht ist die Lösung von $\nabla^2 \phi = 0$ im Inneren einer Hohlkugel des Radius R mit $\phi(R, \theta, \phi) = \phi_0 \cos \theta$ auf der Oberfläche. Auf der Oberfläche gilt

$$\phi(R, \theta, \phi) = \sum_{l,m} \left(A_{lm} R^l + \frac{B_{lm}}{R^{l+1}} \right) Y_{lm}(\theta, \phi) = \phi_0 \cos \theta. \quad (3.83)$$

Nun ist $Y_{10}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$, also

$$\sum_{l,m} \left(A_{lm} R^l + \frac{B_{lm}}{R^{l+1}} \right) Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \phi_0 Y_{10}(\theta, \phi). \quad (3.84)$$

Aus der Orthogonalität der Y_{lm} folgt sofort

$$A_{10} R + \frac{B_{10}}{R^2} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \phi_0, \quad (3.85)$$

$$A_{lm} R^l + \frac{B_{lm}}{R^{l+1}} = 0 \quad \forall (l, m) \neq (1, 0). \quad (3.86)$$

Da keine Ladung im Ursprung sitzt ($\nabla^2 \phi = 0$ bei $\vec{r} = 0$), muss $B_{lm} = 0$ sein. Damit haben wir schon die Lösung:

$$A_{10} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{\phi_0}{R}, \quad A_{lm} = 0 \quad \forall (l, m) \neq (1, 0) \quad (3.87)$$

und

$$\phi(r, \theta, \phi) = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \phi_0 \frac{r}{R} Y_{10}(\theta, \phi) = \phi_0 \frac{r \cos \theta}{R} = \phi_0 \frac{z}{R}. \quad (3.88)$$

Das resultierende elektrische Feld ist

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi = -\frac{\phi_0}{R} \hat{z}, \quad (3.89)$$

es ist also *homogen*.

3.5 Komplexifizierung

Ist ein System translationsinvariant in einer Richtung oder lässt sich allgemeiner eine Richtung per Separationsansatz abtrennen, so erhalten wir ein effektiv zweidimensionales Randwertproblem. In zwei Dimensionen kann man die Bijektion $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto x + iy$ ausnutzen. Das resultierende komplexe Problem kann oft mit den sehr starken Methoden der Funktionentheorie (d. h. der komplexen Analysis) gelöst werden. Dies beruht

auf folgendem Resultat: Sei $z = x + iy$ und sei $u(z)$ eine *holomorphe* Funktion auf $G \subseteq \mathbb{C}$. Holomorph oder komplex differenzierbar bedeutet, dass

$$\left. \frac{du}{dz} \right|_{z_0} := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{u(z) - u(z_0)}{z - z_0} \quad (3.90)$$

für alle $z_0 \in G$ existiert. Insbesondere muss der Grenzwert unabhängig von der Richtung in der komplexen Ebene sein, in der sich z an z_0 annähert. Es folgt, mit $\Delta x, \Delta y \in \mathbb{R}$,

$$\left. \frac{du}{dz} \right|_{z_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(z_0 + \Delta x) - u(z_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(z_0 + i\Delta y) - u(z_0)}{i\Delta y} \quad (3.91)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3.92)$$

Nun schreiben wir $u = \phi + i\psi$ und schließen

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = -i \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (3.93)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (3.94)$$

dies sind die *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*. Wenn man zusätzlich fordert, dass ϕ, ψ zweimal stetig differenzierbar sind (das ist eigentlich gar keine zusätzliche Forderung, sondern folgt schon daraus, dass u holomorph ist), folgt

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0 \quad (3.95)$$

und analog $\nabla^2 \psi = 0$. Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion sind also harmonische Funktionen.

Besonders nützlich für Rechnungen ist nun die *Cauchysche Integralformel*: Sei $u(z)$ auf \mathcal{G}' holomorph und sei $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}'$ offen mit dem Rand $\partial \mathcal{G}$. Dann gilt

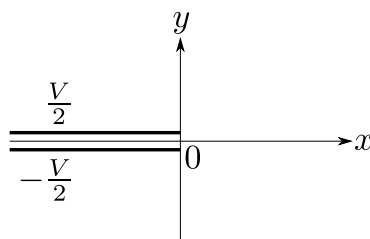
$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial \mathcal{G}} d\xi \frac{u(\xi)}{\xi - z} \quad \forall z \in \mathcal{G}. \quad (3.96)$$

Kenntnis von u auf dem Rand gestattet also schon die Berechnung an jedem Punkt im Inneren. Das sollte nach der Diskussion der Eindeutigkeit der Lösung der Laplace-Gleichung in 3.2 nicht überraschen.

Eine andere Art der Anwendung der Methode besteht darin, einfache holomorphe Funktionen zu analysieren und so Lösungen „auf Vorrat“ zu erzeugen. Man kann auch manchmal holomorphe Funktionen raten, die zu gegebenen Randbedingungen passen.

■ **Beispiel:** Rand eines dünnen Plattenkondensators. In der Halbebene $y = 0, x < 0$ befindet sich ein dünner Plattenkondensator mit Potentialen

$$\lim_{y \rightarrow 0^\pm} \phi(x, y) = \pm \frac{V}{2} \quad \text{für } x < 0. \quad (3.97)$$



Wir suchen also eine auf \mathbb{C} ohne die negative reelle Achse holomorphe Funktion, deren Realteil die gegebene Randbedingung erfüllt. Nun wissen wir, dass für den komplexen Logarithmus gilt

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z \quad (3.98)$$

mit $z = |z|e^{i \arg z}$. Der Hauptwert des Logarithmus hat (per Definition) einen Schnitt entlang der negativen reellen Achse:

$$\text{Ln } z = \ln |z| + i \text{Arg } z \quad (3.99)$$

mit dem Hauptwert des Arguments, $\text{Arg } z \in]-\pi, \pi]$. Damit hat

$$u(z) := -i \frac{V}{2\pi} \text{Ln} \frac{z}{a} \quad (3.100)$$

mit $a > 0$ ebenfalls einen Schnitt entlang der negativen reellen Achse und der Realteil erfüllt

$$\phi(x, y) := \text{Re } u(x + iy) = \frac{V}{2\pi} \text{Re} \left(-i \ln \frac{|x + iy|}{a} + \text{Arg} \frac{x + iy}{a} \right) = \frac{V}{2\pi} \text{Arg}(x + iy) \equiv \frac{V}{2\pi} \varphi \quad (3.101)$$

mit dem Polarwinkel φ in der xy -Ebene, beschränkt auf $]-\pi, \pi]$. $\phi(x, y)$ erfüllt die geforderten Randbedingungen:

$$\lim_{y \rightarrow 0^\pm} \phi(x, y) \stackrel{x \leq 0}{=} \lim_{\varphi \rightarrow \pm\pi} \phi(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \pm \frac{V}{2}. \quad (3.102)$$

Damit ist die Lösung im gesamten Raum gefunden: $\phi = \frac{V}{2\pi} \varphi$.

3.6 Green-Funktionen

Eine in der gesamten Physik sehr wichtige Methode beruht auf Green-Funktionen. Die allgemeine Idee ist, ein einfacheres Ersatzproblem nur *einmal* zu lösen und daraus eine Lösungsformel für *alle* Probleme mit derselben Geometrie und derselben Art von Randbedingungen herzuleiten.

In der Elektrostatik ist eine Green-Funktion eine Lösung der Gleichung

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (3.103)$$

mit der Nebenbedingung, dass G symmetrisch unter Vertauschung der Argumente sein soll:

$$G(\vec{r}', \vec{r}) = G(\vec{r}, \vec{r}'). \quad (3.104)$$

Daraus folgt, dass auch $(\nabla')^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ gilt. Gleichung (3.103) ist offensichtlich die Poisson-Gleichung einer Punktladung $q = 1$. Also ist $G(\vec{r}, \vec{r}')$ das Potential am Ort \vec{r} einer Punktladung $q = 1$ bei \vec{r}' (G hat nicht die korrekte Einheit eines Potentials, da $q = 1$ nicht die Einheit einer Ladung hat). Beachte, dass wir noch keine Randbedingungen für G spezifiziert haben. Daher ist G noch nicht eindeutig bestimmt. Diese Freiheit werden wir uns zu Nutze machen.

Wir wissen aber, dass die allgemeine Lösung die Form („allgemeine Lösung der homogenen Gleichung plus spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung“) hat

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = F(\vec{r}, \vec{r}') + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3.105)$$

hat, wobei F eine symmetrische Lösung der Laplace-Gleichung

$$\nabla^2 F(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad (3.106)$$

ist. Es sei $\phi(\vec{r})$ das gesuchte Potential für eine Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$. Nun setzen wir ϕ und G als Funktionen von \vec{r}' in den 2. Greenschen Satz ein:

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV' [\phi(\vec{r}') (\nabla')^2 G(\vec{r}, \vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}') (\nabla')^2 \phi(\vec{r}')] = \iint_{\partial\mathcal{V}} ds' \left[\phi(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial n'} - G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \phi}{\partial n'} \right]. \quad (3.107)$$

Zur Erinnerung: Die Oberflächennormale $\hat{n}(\vec{r}')$ zeigt vom interessierenden Volumen weg. Die linke Seite können wir mit Hilfe der Poisson-Gleichungen für G und ϕ vereinfachen:

$$\dots = -\frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} dV' [\phi(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}')] = -\frac{1}{\epsilon_0} \phi(\vec{r}) + \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} dV' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}'). \quad (3.108)$$

Es folgt

$$\phi(\vec{r}) = \iiint_{\mathcal{V}} dV' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') - \epsilon_0 \iint_{\partial\mathcal{V}} ds' \left[\phi(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial n'} - G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \phi}{\partial n'} \right]. \quad (3.109)$$

Der Oberflächenterm enthält sowohl $\phi(\vec{r})$ als auch die Normalenableitung $\partial\phi/\partial n$, was die Lösung überbestimmt, siehe 3.2. Daher ist in realen Aufgaben an jedem $\vec{r} \in \partial\mathcal{V}$ nur eine der beiden Randbedingungen vorgegeben. Wir betrachten hier den Fall reiner Dirichlet- oder Neumann-Randbedingungen. Die Verallgemeinerung auf gemischte Randbedingungen ist nicht schwierig. Die Idee ist nun, die Freiheit bei der Wahl von F bzw. G in der Art auszunutzen, dass die unerwünschte Abhängigkeit am Rand verschwindet.

1. Dirichlet-Randbedingungen: ϕ ist auf $\partial\mathcal{V}$ vorgegeben. Wir wählen F so, dass

$$\iint_{\partial\mathcal{V}} ds' G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial\phi}{\partial n'} = 0. \quad (3.110)$$

Das kann, muss aber nicht, dadurch geschehen, dass $G(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \forall \vec{r}' \in \partial\mathcal{V}$ gefordert wird. Es folgt

$$\phi(\vec{r}) = \iiint_{\mathcal{V}} dV' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') - \epsilon_0 \iint_{\partial\mathcal{V}} ds' \phi(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial n'}. \quad (3.111)$$

Für das gegebene Volumen \mathcal{V} und den Fall von Dirichlet-Randbedingungen müssen wir nur einmalig $G(\vec{r}, \vec{r}')$ bestimmen (was für „natürliche“ Geometrien schon gemacht wurde) und können dann für *beliebige* $\rho(\vec{r})$ in \mathcal{V} und *beliebige* $\phi(\vec{r})$ auf $\partial\mathcal{V}$ die Lösung $\phi(\vec{r})$ für $\vec{r} \in \mathcal{V}$ sofort als Integral hinschreiben. Die analytische Bestimmung der Integrale kann natürlich schwierig oder unmöglich sein, aber das ist kein physikalisches Problem mehr. Besonders einfach ist die Situation, wenn Oberflächen geerdet sind – dann verschwindet $\phi(\vec{r})$ und damit der zweite Term in Gl. (3.111) für diese Oberflächen. Hierzu gehört auch der Fall, dass $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(\vec{r}) = 0$ („geerdete Oberflächen im Unendlichen“). Ist $\rho(\vec{r})$ auf \mathbb{R}^3 gegeben, so ist der homogene Anteil einfach $F \equiv 0$ und damit

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (3.112)$$

Mit der Randbedingung $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(\vec{r}) = 0$ folgt dann

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (3.113)$$

Das ist das schon aus 2.3 bekannte Poisson-Integral.

2. Neumann-Randbedingungen: $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ ist auf $\partial\mathcal{V}$ vorgegeben. Es scheint naheliegend, F so zu wählen, dass gilt

$$\iint_{\partial\mathcal{V}} ds' \phi(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial n'} = 0. \quad (3.114)$$

Das ist aber unmöglich: Die Gleichung müsste für alle ϕ erfüllbar sein, also auch für $\phi(\vec{r}') = 1 \forall \vec{r}' \in \partial\mathcal{V}$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{\partial\mathcal{V}} ds' \frac{\partial G}{\partial n'} = \iint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s}' \cdot \vec{\nabla}' G(\vec{r}, \vec{r}') \stackrel{\text{Gauß}}{=} \iiint_{\mathcal{V}} dV' \vec{\nabla}' \cdot \vec{\nabla}' G(\vec{r}, \vec{r}') = \iiint_{\mathcal{V}} dV' (\nabla')^2 G(\vec{r}, \vec{r}') \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} dV' \delta(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \quad \text{falls } \vec{r} \in \mathcal{V}. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Das ist offensichtlich ein Widerspruch. Wir können aber F so wählen, dass gilt

$$\frac{\partial G}{\partial n'} = -\frac{1}{\epsilon_0 A} = \text{const} \quad \forall \vec{r}' \in \partial\mathcal{V}, \quad (3.116)$$

wobei A der Flächeninhalt von $\partial\mathcal{V}$ ist. Dann folgt

$$-\epsilon_0 \iint_{\partial\mathcal{V}} ds' \phi(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial n'} = \frac{1}{A} \iint_{\partial\mathcal{V}} ds' \phi(\vec{r}') =: \langle \phi \rangle_{\partial\mathcal{V}}, \quad (3.117)$$

der störende Term in Gl. (3.109) ist also das über den Rand von $\partial\mathcal{V}$ gemittelte Potential. Es folgt

$$\phi(\vec{r}) = \langle \phi \rangle_{\partial\mathcal{V}} + \iiint_{\mathcal{V}} dV' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') + \epsilon_0 \iint_{\partial\mathcal{V}} ds' G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial\phi}{\partial n'}. \quad (3.118)$$

Beachte, dass die additive Konstante $\langle \phi \rangle_{\partial V}$ physikalisch bedeutungslos ist. Wir haben wieder die Bestimmung von $\phi(\vec{r})$ bei bekannter Green-Funktion auf die Auswertung von Integralen zurückgeführt.

■ Beispiel: Die xy -Ebene bestehe aus einer geerdeten Platte. Im Halbraum $z > 0$ befinde sich eine komplizierte Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$. Bestimme $\phi(\vec{r})$ für $z \geq 0$.

Es handelt sich um ein Dirichlet-Problem. Die Green-Funktion soll

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (3.119)$$

und

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad \text{für } z = 0 \vee z' = 0 \quad (3.120)$$

erfüllen. Dieses Ersatzproblem haben wir aber schon mittels der Bildladungsmethode gelöst: G ist gerade das Potential einer Punktladung $+1$ bei $\vec{r}' = (x', y', z')$ und einer Spiegelladung -1 bei $(x', y', -z')$, also

$$\begin{aligned} G(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - (x', y', -z')|} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right]. \end{aligned} \quad (3.121)$$

Die Lösungsformel lautet dann

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_0^{\infty} dz' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') - \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \underbrace{\phi(x', y', 0)}_{=0} \frac{\partial G}{\partial n'} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_0^{\infty} dz' \rho(\vec{r}') \\ &\quad \times \left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right]. \end{aligned} \quad (3.122)$$

Kapitel 4

Makroskopische Elektrostatik

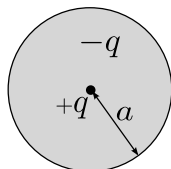
Die bisher entwickelte Beschreibung der Elektrostatik ist im Prinzip vollständig. Sie ist aber nicht besonders nützlich, wenn wir das elektrische Feld in einem nicht leitenden Medium bestimmen wollen. Das ist z. B. für Kondensatoren wichtig, die mit einem Dielektrikum gefüllt sind. Dies trifft für alle technisch eingesetzten Kondensatoren zu. Ihre Kapazität ist gegenüber einem luftgefüllten Kondensator deutlich erhöht.

In einem Leiter ist zumindest ein Teil der Ladungsträger beweglich. *Isolatoren (Dielektrika)* enthalten dagegen keine frei beweglichen Ladungsträger, jedenfalls nicht bei niedrigen Energien. In normaler Materie bedeutet dies, dass alle Elektronen in Atomen, Ionen oder Molekülen gebunden sind. Daher können sie sich als Reaktion auf ein nicht zu starkes äußeres elektrisches Feld nur wenig bewegen, typischerweise über Entfernungen, die kleiner als die Größe der Atome, Ionen oder Moleküle sind. Es ist daher klar, dass sich Isolatoren im \vec{E} -Feld ganz anders verhalten als Leiter.

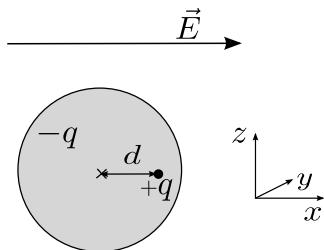
4.1 Polarisation von Atomen und Molekülen

4.1.1 Induzierte Dipole

Wir betrachten zunächst ein einzelnes Atom im äußeren Feld; Ionen und Moleküle lassen sich analog verstehen. Ein sehr einfaches Atommodell besteht aus einem Kern der Ladung $+q$ und einer Elektronenhülle mit der Gesamtladung $-q$ und homogener Ladungsdichte innerhalb einer Vollkugel.



In einem elektrischen Feld \vec{E} werden Kern und Hülle gegeneinander verschoben (in der Skizze ist diese Verschiebung stark übertrieben):



Im Gleichgewicht ist die Gesamtkraft auf den Kern (oder die Hülle) Null, d. h. das elektrische Feld am Kernort verschwindet. Es lautet

$$\vec{E}_{\text{ges}} = \vec{E} + \vec{E}_{\text{el}} \quad (4.1)$$

mit dem Beitrag der Elektronenhülle, vgl. Abschnitt 2.2,

$$\vec{E}_{\text{el}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^3} d \hat{x} \quad (4.2)$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{ges}} = E \hat{x} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^3} d \hat{x} \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.3)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{a^3} = E. \quad (4.4)$$

Der Ort des Kerns sei \vec{r}_K , der Mittelpunkt der Hülle sei \vec{r}_H . Dann ist $\vec{r}_K - \vec{r}_H = d \hat{x}$. Das Dipolmoment des Atoms ist dann

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \iiint dV \vec{r} \rho(\vec{r}) = q\vec{r}_K + \rho \iiint dV \vec{r} \theta(a - |\vec{r} - \vec{r}_H|) = q\vec{r}_K + \rho \iiint dV \underbrace{(\vec{r} - \vec{r}_H + \vec{r}_H)}_{=: \vec{u}} \theta(a - |\vec{r} - \vec{r}_H|) \\ &= q\vec{r}_K + \rho \underbrace{\iiint d^3u \vec{u} \theta(a - u)}_0 + \rho\vec{r}_H \underbrace{\iiint d^3u \theta(a - u)}_{\frac{4\pi}{3} a^3}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

wobei

$$\rho = \frac{-q}{\frac{4\pi}{3} a^3} \quad (4.6)$$

die Ladungsdichte der Hülle ist. Es folgt

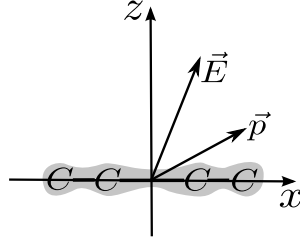
$$\vec{p} = q(\vec{r}_K - \vec{r}_H) = q d \hat{x} = 4\pi\epsilon_0 a^3 E \hat{x} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \vec{E}. \quad (4.7)$$

Das Dipolmoment ist also proportional zum angelegten Feld. Die Proportionalitätskonstante nennen wir *atomare Polarisierbarkeit* α , also ist

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}. \quad (4.8)$$

Dieser lineare Zusammenhang gilt nur für schwache Felder. Man findet ihn auch bei einer genaueren, insbesondere quantenmechanischen, Betrachtung. Es bleibt auch richtig, dass große Atome eine größere Polarisierbarkeit haben als kleine. Das Dipolmoment \vec{p} ist *induziert*, da es für $\vec{E} = 0$ nicht vorhanden ist. Man sagt, das Atom, und auch die gesamte Probe, sei (elektrisch) *polarisiert*.

Bei einem *Molekül* ist die Polarisierbarkeit i. A. nicht isotrop. Ein Benzolmolekül ist z. B. in der Molekülebene viel leichter polarisierbar als senkrecht dazu. Daher ist i. A. \vec{p} nicht parallel zu \vec{E} .



Für schwache Felder ist \vec{p} aber immer noch linear in \vec{E} . Der allgemeinste lineare Zusammenhang lautet

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \equiv \overleftrightarrow{\alpha} \vec{E} \quad (4.9)$$

mit dem *Polarisierbarkeitstensor* $\overleftrightarrow{\alpha}$. Die Energie des induzierten Dipols im elektrischen Feld erhalten wir durch folgende Überlegung: Die Änderung der Energie bei Änderung des Feldes um $d\vec{E}$ ist

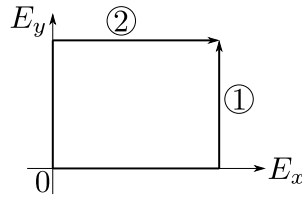
$$dW = -\vec{p} \cdot d\vec{E} = -(\overleftrightarrow{\alpha} \vec{E}) \cdot d\vec{E} = -\vec{E}^\top \overleftrightarrow{\alpha} d\vec{E} \quad (4.10)$$

(\top : transponierter Vektor). Damit folgt

$$W = -\frac{1}{2} \vec{E}^\top \overleftrightarrow{\alpha} \vec{E}. \quad (4.11)$$

(Der Faktor 1/2 lässt sich wieder als Doppelzählungskorrektur interpretieren.)

Eine etwas sorgfältigere Betrachtung der Energie zeigt, dass $\overleftrightarrow{\alpha}$ ein *symmetrischer* Tensor sein muss. Wir betrachten zwei verschiedene Prozesse, wie das \vec{E} -Feld eingeschaltet wird:



Da der Endzustand derselbe ist, muss für beide Prozesse dieselbe Energie herauskommen. Es ist

$$W_1 = - \int_0^{E_x} dE'_x \alpha_{xx} E'_x - \int_0^{E_y} dE'_y (\alpha_{yx} E_x + \alpha_{yy} E'_y) = -\frac{1}{2} \alpha_{xx} E_x^2 - \alpha_{yx} E_y E_x - \frac{1}{2} \alpha_{yy} E_y^2, \quad (4.12)$$

$$W_2 = - \int_0^{E_y} dE'_y \alpha_{yy} E'_y - \int_0^{E_x} dE'_x (\alpha_{xx} E'_x + \alpha_{xy} E_y) = -\frac{1}{2} \alpha_{yy} E_y^2 - \frac{1}{2} \alpha_{xx} E_x^2 - \alpha_{xy} E_x E_y. \quad (4.13)$$

Die Differenz ist

$$W_1 - W_2 = (\alpha_{xy} - \alpha_{yx}) E_x E_y. \quad (4.14)$$

Damit dies verschwindet, muss offensichtlich $\alpha_{xy} = \alpha_{yx}$ gelten. Analog erhält man die Symmetrie der übrigen Außerdiagonalkomponenten.

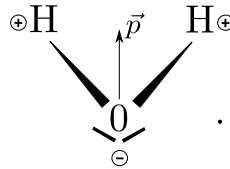
Da die Matrix $\overleftrightarrow{\alpha}$ symmetrisch ist, können wir sie diagonalisieren. Es existiert also ein Koordinatensystem (das *Hauptachsensystem*), in dem $\overleftrightarrow{\alpha}$ diagonal ist,

$$\overleftrightarrow{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{zz} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

(vgl. auch den Trägheitstensor).

4.1.2 Polare Moleküle

Manche Moleküle haben auch ohne angelegtes \vec{E} -Feld ein elektrisches Dipolmoment. Ein Beispiel ist das Wassermolekül:



Wir hatten gesehen, dass die Energie eines Dipols im \vec{E} -Feld lautet

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E}, \quad (4.16)$$

und dass auf ihn ein Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (4.17)$$

wirkt. Der Dipol ist demnach bestrebt, sich parallel zu \vec{E} auszurichten. Bei der Temperatur $T = 0$ wären tatsächlich alle Dipole parallel zu \vec{E} ausgerichtet. Bei nicht verschwindender Temperatur *fluktuieren* die Dipole aufgrund ihrer thermischen Energie. Im Vorgriff auf die Vorlesung Thermodynamik und Statistische Physik berechnen wir den thermischen Mittelwert $\langle \vec{p} \rangle$ von \vec{p} als Mittel über alle möglichen Orientierungen, gewichtet mit dem Boltzmann-Faktor $e^{-W/k_B T}$: θ, ϕ seien die sphärischen Polarwinkel von \vec{p} , so dass $\vec{p} = p(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$, und sei o. B. d. A. $\vec{E} = E \hat{z}$. Dann ist

$$\langle \vec{p} \rangle = \hat{z} \langle p_z \rangle = \hat{z} p \langle \cos \theta \rangle = \hat{z} p \frac{\iint d\theta d\phi \sin \theta \cos \theta e^{-W(\theta, \phi)/k_B T}}{\underbrace{\iint d\theta d\phi \sin \theta e^{-W(\theta, \phi)/k_B T}}_{\text{Normierungsfaktor}}}. \quad (4.18)$$

Die Energie ist

$$W(\theta, \phi) = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -p_z E = -pE \cos \theta, \quad (4.19)$$

also

$$\langle \vec{p} \rangle = \hat{z} p \frac{\iint d\theta d\phi \sin \theta \cos \theta e^{+pE \cos \theta / k_B T}}{\iint d\theta d\phi \sin \theta e^{+pE \cos \theta / k_B T}} = \hat{z} p \frac{\int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos \theta e^{pE \cos \theta / k_B T}}{\int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{pE \cos \theta / k_B T}}. \quad (4.20)$$

Mit der Substitution $u = \cos \theta \Rightarrow du = -\sin \theta d\theta$ ergibt sich

$$\langle \vec{p} \rangle = \hat{z} p \frac{\int_{-1}^1 du u e^{pEu/k_B T}}{\int_{-1}^1 du e^{pEu/k_B T}} = \hat{z} p \left(\coth \frac{pE}{k_B T} - \frac{k_B T}{pE} \right). \quad (4.21)$$

Für hohe Temperaturen $k_B T \gg pE$ können wir den hyperbolischen Kotangens für kleine Argumente entwickeln:

$$\langle \vec{p} \rangle \cong \hat{z} p \left(\frac{k_B T}{pE} + \frac{pE}{3k_B T} - \frac{k_B T}{pE} \right) = \hat{z} \frac{p^2 E}{3k_B T} = \frac{p^2}{3k_B T} \vec{E}. \quad (4.22)$$

Dieses gemittelte Dipolmoment ist also wieder linear im \vec{E} -Feld.

4.2 Polarisation von Materie

In einem nicht leitenden Medium werden elektrische Dipole induziert oder bereits existierende Dipole durch ein elektrisches Feld ausgerichtet; das Medium wird elektrisch polarisiert. Dieser Effekt wird quantitativ durch die (elektrische) *Polarisation* \vec{P} beschrieben, diese ist das Dipolmoment pro Volumen, also die Dipoldichte. Die lokale Polarisation können wir also schreiben als

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}. \quad (4.23)$$

Hier haben wir offensichtlich ein *kontinuierliches* Medium angenommen. In Wirklichkeit besteht (gewöhnliche) Materie natürlich aus diskreten Atomen, Ionen oder Molekülen. In der makroskopischen Elektrostatik – und auch in der makroskopischen Elektrodynamik – betrachten wir Größen, die über im Vergleich zu atomaren Längenskalen (10^{-10} m) große, aber im Vergleich zur Systemgröße kleine, Skalen gemittelt sind. Insbesondere sind auch die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ und das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ als gemittelte Größen zu verstehen. Es ist etwas unglücklich, dass sie meist mit denselben Symbolen wie die mikroskopischen Größen bezeichnet werden. Auf atomaren Skalen gilt die makroskopische Theorie nicht und z. B. die Polarisation \vec{P} hat keinen Sinn. Hier müssen wir stattdessen die mikroskopische Beschreibung für die elementaren Ladungen verwenden.

Die Polarisation wird nicht nur i. A. vom \vec{E} -Feld *erzeugt*, sie *generiert* auch selbst einen Beitrag zum elektrischen Feld. Wir wollen das skalare Potential aufgrund eines polarisierten Mediums berechnen. Das Potential bei \vec{r} eines infinitesimalen Dipolmoments $d\vec{p}$ am Ort \vec{r}' ist, vgl. Abschnitt 2.9,

$$d\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot d\vec{p}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (4.24)$$

Das gesamte Potential lautet also

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot d\vec{p}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V dV' \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (4.25)$$

Nun ist

$$\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (4.26)$$

und analog

$$\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = + \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (4.27)$$

Daraus folgt

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V dV' \left(\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \vec{P}(\vec{r}') \stackrel{\text{partiell}}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\partial V} d\vec{s}' \cdot \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V dV' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (4.28)$$

Der erste Term sieht aus wie das Potential einer Flächenladungsdichte

$$\sigma_g := \hat{n} \cdot \vec{P} \quad (4.29)$$

auf $\partial\mathcal{V}$ (der Subskript „g“ steht für „gebunden“) und der zweite Term wie das Potential einer Volumenladungsdichte

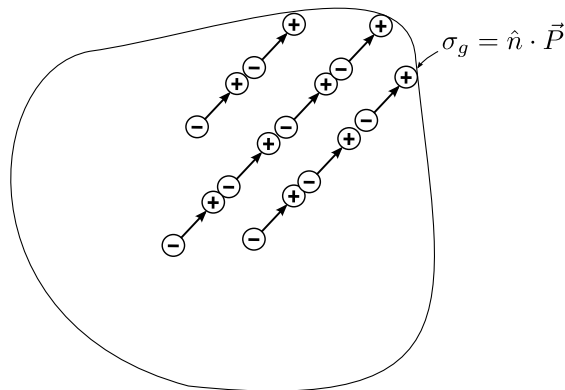
$$\rho_g := -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}. \quad (4.30)$$

Damit wird

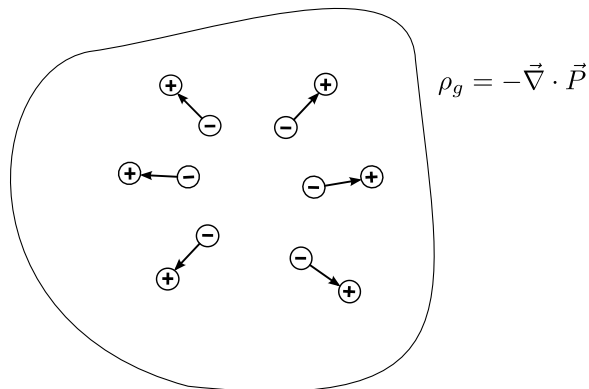
$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\partial\mathcal{V}} ds' \frac{\sigma_g(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} dV' \frac{\rho_g(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (4.31)$$

σ_g und ρ_g heißen *gebundene Ladungen* oder *Polarisationsladungen* in Abgrenzung zu freien Ladungen σ_f , ρ_f . Wir können nun alle bekannten Methoden zur Bestimmung des Potentials oder des \vec{E} -Feldes anwenden, *wenn* die Polarisation \vec{P} gegeben ist.

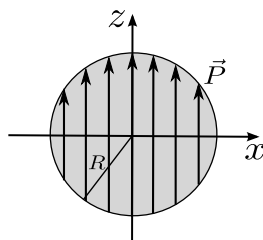
Man kann intuitiv verstehen, wie die gebundenen Ladungen aufgrund der Polarisation zustande kommen. Wir stellen uns \vec{P} als aus kleinen Dipolen zusammengesetzt vor. Ist $\vec{P} = \text{const}$, so kompensieren sich die positiven und negativen Enden der Dipole im Inneren, aber nicht an der Oberfläche:



Ist \vec{P} nicht gleichförmig, so kompensieren sich auch die gebundenen Ladungen im Inneren nicht:



■ Beispiel: gleichförmig polarisierte Kugel.



Hier ist

$$\rho_g = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0, \quad (4.32)$$

$$\sigma_g = \hat{n} \cdot \vec{P} = \hat{r} \cdot \vec{P} = P \cos \theta \quad (4.33)$$

mit der üblichen sphärischen Koordinate θ . Damit ist das Potential

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' R^2 \sin \theta' \frac{P \cos \theta'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (4.34)$$

Das Integral lässt sich direkt auswerten. Es ist aber einfacher, die allgemeine Lösung (3.81) der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten zu verwenden:

$$\phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l,m} \left(A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (4.35)$$

Die Laplace-Gleichung gilt für $r < R$ und $r > R$, da keine Raumladungen vorhanden sind. Für $r < R$ muss gelten $B_{lm} = 0$ (keine Singularität bei $\vec{r} = 0$!) und für $r > R$ entsprechend $A_{lm} = 0$ (Potential fällt ab für $r \rightarrow \infty$!). Die verbleibenden Koeffizienten erhalten wir aus der Anschlussbedingung bei $r = R$:

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma_g}{\epsilon_0} \quad (4.36)$$

$$\Rightarrow -\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=R^+} + \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=R^-} = \frac{\sigma_g}{\epsilon_0} = \frac{P}{\epsilon_0} \cos \theta \quad (4.37)$$

$$\Rightarrow \sum_{l,m} \left(\frac{(l+1)B_{lm}}{R^{l+2}} + lA_{lm}R^{l-1} \right) Y_{lm}(\theta, \phi) = \frac{P}{\epsilon_0} \cos \theta. \quad (4.38)$$

Nun wissen wir, dass $Y_{10}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$ ist und dass die Y_{lm} orthogonal sind. Daher kann die Summe über l, m nur den einen Term für $l = 1, m = 0$ enthalten. Die einzigen nicht verschwindenden Koeffizienten erfüllen also

$$\left(\frac{2B_{10}}{R^3} + A_{10} \right) \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta = \frac{P}{\epsilon_0} \cos \theta \quad (4.39)$$

$$\Rightarrow \frac{2B_{10}}{R^3} + A_{10} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{P}{\epsilon_0}. \quad (4.40)$$

Außerdem muss das Potential an einer Flächenladung stetig sein, siehe 2.4, also

$$\phi(r = R^-, \theta, \phi) = \phi(r = R^+, \theta, \phi) \quad (4.41)$$

$$\Rightarrow A_{10} R Y_{10}(\theta, \phi) = \frac{B_{10}}{R^2} Y_{10}(\theta, \phi) \quad (4.42)$$

$$\Rightarrow B_{10} = A_{10} R^3. \quad (4.43)$$

Damit folgt

$$3A_{10} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{P}{\epsilon_0} \Rightarrow A_{10} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{P}{\epsilon_0} \Rightarrow B_{10} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{P}{\epsilon_0} R^3 \quad (4.44)$$

und die Lösung lautet

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{4}{3\pi}} \frac{P}{\epsilon_0} \begin{cases} r Y_{10}(\theta, \phi) & \text{für } r \leq R \\ \frac{R^3}{r^2} Y_{10}(\theta, \phi) & \text{für } r \geq R \end{cases} = \frac{P}{3\epsilon_0} \cos \theta \begin{cases} r & \text{für } r \leq R \\ \frac{R^3}{r^2} & \text{für } r \geq R \end{cases} = \begin{cases} \frac{P}{3\epsilon_0} z & \text{für } r \leq R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} & \text{für } r \geq R, \end{cases} \quad (4.45)$$

wobei

$$\vec{p} = \frac{4\pi}{3} R^3 \vec{P} \quad (4.46)$$

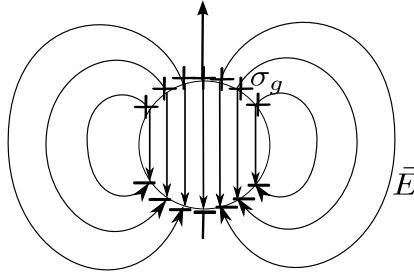
das Dipolmoment der Kugel ist.

Das elektrische Feld der polarisierten Kugel ist offenbar im Inneren

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = -\frac{P}{3\epsilon_0}\hat{z} = -\frac{1}{3\epsilon_0}\vec{P}, \quad (4.47)$$

also wie \vec{P} gleichförmig. Dies ist ein spezielles Resultat für Ellipsoide mit \vec{P} entlang einer Hauptachse. In anderen homogen polarisierten Körpern gilt $\vec{E} = \text{const}$ *nicht*. Im Außenraum finden wir für die Kugel das \vec{E} -Feld eines Punktdipols,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}. \quad (4.48)$$



4.3 Das Verschiebungsfeld

Im Allgemeinen liegen in Medien sowohl gebundene Ladungen ρ_g (aufgrund der Polarisation) als auch freie Ladungen ρ_f (aufgrund einer Aufladung, d. h. eines makroskopischen Transports von Ladungsträgern) vor. Die Gesamtladung

$$\rho = \rho_g + \rho_f \quad (4.49)$$

erzeugt das elektrostatische Feld, also gilt das Gaußsche Gesetz

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho = \rho_g + \rho_f = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} + \rho_f. \quad (4.50)$$

Das können wir umschreiben als

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f. \quad (4.51)$$

Wir definieren das *elektrische Verschiebungsfeld*

$$\vec{D} := \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (4.52)$$

Damit gilt also

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f, \quad (4.53)$$

die Quellen des Verschiebungsfeldes sind nur die *freien* Ladungen. Dies ist das Gaußsche Gesetz für Dielektrika. In Integralform lautet es in offensichtlicher Schreibweise

$$\oiint_{\partial V} d\vec{s} \cdot \vec{D} = Q_{\text{in},f}. \quad (4.54)$$

Vergleich mit dem Gaußschen Gesetz für das \vec{E} -Feld,

$$\oiint_{\partial V} d\vec{s} \cdot \vec{E} = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0}, \quad (4.55)$$

legt die Vermutung nahe, dass \vec{D} ganz analog zu \vec{E} bestimmt werden kann, indem man nur überall Gesamtladungen durch freie Ladungen (multipliziert mit dem trivialen Einheitenfaktor ϵ_0) ersetzt. Das ist *falsch*. Es gilt nämlich

$$\vec{\nabla} \times \vec{D} = \epsilon_0 \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{E}}_{=0} + \vec{\nabla} \times \vec{P}, \quad (4.56)$$

was i. A. nicht verschwindet. Dagegen gilt immer $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ und das ist für die Herleitung des Coulomb-Gesetzes

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \frac{\rho}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (4.57)$$

notwendig. Es gilt also i. A. *nicht*

$$\vec{D}(\vec{r}) \stackrel{?}{=} \frac{1}{4\pi} \iiint dV' \frac{\rho_f(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'). \quad (4.58)$$

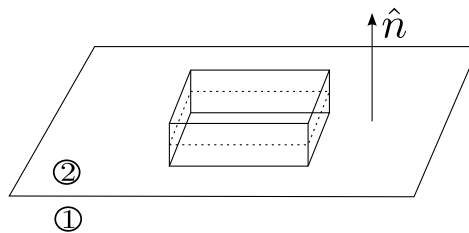
Dieses „Coulomb-Gesetz für das Verschiebungsfeld“ ist nur korrekt, wenn $\vec{\nabla} \times \vec{P} = 0$ und damit $\vec{\nabla} \times \vec{D} = 0$ im gesamten Raum gilt.

■ Beispiel: Für die gleichförmig polarisierte Kugel haben wir $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ im Außenraum, da dort \vec{P} verschwindet. Also ist \vec{D} , wie \vec{E} , ein Dipolfeld und insbesondere ungleich Null, obwohl gar keine freien Ladungen vorhanden sind. Im Umkehrschluss können wir folgern, dass $\vec{\nabla} \times \vec{P}$ nicht überall verschwinden kann, denn sonst würde Gl. (4.58) gelten und daher $\vec{D} = 0$ sein.

Ganz allgemein wird es für die Bestimmung von \vec{D} nicht ausreichen, nur die freien Ladungen $\rho_f(\vec{r})$ zu kennen. Man benötigt auch die Polarisation $\vec{P}(\vec{r})$.

4.3.1 Anschlussbedingungen

Für die Lösung von elektrostatischen Problemen mit Dielektrika ist es wichtig zu wissen, wie sich das \vec{E} - und das \vec{D} -Feld an der Grenzfläche zwischen zwei Medien ändern. Eines der Medien kann natürlich Luft oder Vakuum sein. Wir betrachten ein kleines Volumenelement, das ein Stück der Grenzfläche einschließt und dessen Seitenflächen parallel oder senkrecht dazu stehen.



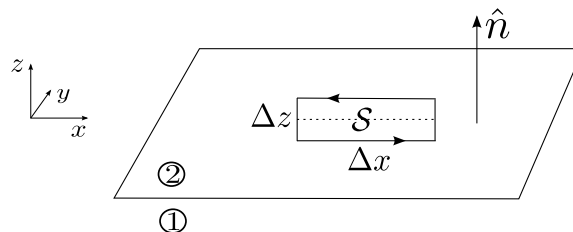
Aus

$$\oiint_{\partial V} d\vec{s} \cdot \vec{D} = Q_{\text{in},f} \quad (4.59)$$

folgt mit den üblichen Argumenten

$$D_{n2} - D_{n1} = \sigma_f, \quad (4.60)$$

dabei ist D_{nk} die Normalkomponente von \vec{D} im Medium $k = 1, 2$. Wir haben den Normaleneinheitsvektor \vec{n} so gewählt, dass er von Medium 1 nach Medium 2 zeigt. Nun betrachten wir die *tangentialen* Komponenten. Dazu untersuchen wir eine kleine *geschlossene Kurve* der folgenden rechteckigen Form:



Wir verwenden nun den *Stokesschen Satz*,

$$\oint_{\partial S} d\vec{l} \cdot \vec{E} = \iint_S d\vec{s} \cdot (\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{E}}_0) = 0. \quad (4.61)$$

Das Linienintegral zerlegen wir in Beiträge von den Kanten des Rechtecks:

$$\oint_{\partial S} d\vec{l} \cdot \vec{E} = \underbrace{\Delta x E_{t1}}_{\text{unten}} + \underbrace{\frac{\Delta z}{2} E_{n1} + \frac{\Delta z}{2} E_{n2}}_{\text{rechts}} - \underbrace{\Delta x E_{t2}}_{\text{oben}} - \underbrace{\frac{\Delta z}{2} E_{n1} - \frac{\Delta z}{2} E_{n2}}_{\text{links}} = \Delta x (E_{t1} - E_{t2}). \quad (4.62)$$

Es folgt $E_{t2} - E_{t1} = 0$ für die tangentialen Komponenten, hier speziell für die x -Komponenten. Für die y -Komponenten erhalten wir natürlich eine analoge Beziehung. Damit gilt für die *zweikomponentigen* tangentialen Anteile des \vec{E} -Feldes

$$\vec{E}_{t2} - \vec{E}_{t1} = 0. \quad (4.63)$$

Daraus folgt natürlich

$$\vec{D}_{t2} - \vec{D}_{t1} = \vec{P}_{t2} - \vec{P}_{t1}. \quad (4.64)$$

Das Potential ϕ ist stetig auch in Anwesenheit von Flächenladungsdichten, also gilt

$$\phi_2 - \phi_1 = 0. \quad (4.65)$$

An einer Grenzfläche ohne *freie* Ladungen gilt speziell

$$D_{n2} = D_{n1}, \quad \vec{E}_{t2} = \vec{E}_{t1}, \quad (4.66)$$

also sind die Normalkomponente von \vec{D} , aber die Tangentialkomponenten von \vec{E} stetig.

4.4 Lineare Dielektrika

Der Ursprung der Polarisation \vec{P} in Isolatoren liegt in den Dipolmomenten der einzelnen Atome, Ionen bzw. Moleküle. Haben diese in Abwesenheit eines elektrischen Feldes nicht verschwindende Dipolmomente (*permanente* Dipolmomente) *und* sind diese bevorzugt in einer Richtung ausgerichtet, so ist $\vec{P} \neq 0$ in Abwesenheit eines angelegten \vec{E} -Feldes. Ein Material mit dieser Eigenschaft bezeichnet man als *ferroelektrisch* oder als *Elektret*. Ein Beispiel ist ein Quarz, SiO_2 . Wassereis ist normalerweise kein Elektret, obwohl die einzelnen H_2O -Moleküle permanente Dipolmomente tragen. Diese addieren sich aber in den meisten Phasen von Eis zu Null innerhalb jeder kristallographischen Einheitszelle. Eine Ausnahme ist die Phase „Eis-XI“, die aber nur bei sehr tiefen Temperaturen vorkommt. (Als Elektret bezeichnet man auch einen ferroelektrischen, polarisierten Körper. In diesem Sinne ist ein Elektret analog zu einem Stabmagneten, nur mit elektrischer anstelle von magnetischer Polarisation. Jedoch kann man ein Elektret nicht im Laden kaufen, im Gegensatz zu einem Stabmagneten. Der Grund ist, dass die Polarisationsladungen σ_g an der Oberfläche eines Elektrets schnell durch Ionen aus der Luft kompensiert werden. Danach hat der Körper kein makroskopisches elektrisches Feld mehr. Mit Stabmagneten kann eine analoge Kompensation nicht stattfinden, da keine magnetischen freien Ladungen, d. h., Monopole, existieren.) In einem Elektret geht die Polarisation i. A. auf eine spontane Symmetriebrechung zurück, typischerweise eine Verschiebung der positiv geladenen Ionen gegenüber den negativen. Dann existieren für $\vec{E} = 0$ mehrere gleichberechtigte Lösungen für \vec{P} . Daher kann \vec{P} in diesem Fall keine Funktion von \vec{E} sein – die Abbildung ist nicht eindeutig. In einem nicht ferroelektrischen Material ist die Abbildung im stationären Fall aber eindeutig, also

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}). \quad (4.67)$$

Wir entwickeln für kleine \vec{E} :

$$P_i(\vec{E}) = \underbrace{P_i(0)}_0 + \sum_j \frac{\partial P_i(0)}{\partial E_j} E_j + \mathcal{O}(E^2), \quad (4.68)$$

wobei der konstante Term für nicht ferroelektrische Materialien verschwindet. Die Koeffizienten des linearen Terms bilden die Komponenten der *elektrischen Suszeptibilität*,

$$\epsilon_0 \chi_{e,ij} := \left. \frac{\partial P_i}{\partial E_j} \right|_{\vec{E}=0}. \quad (4.69)$$

Ist \vec{E} hinreichend klein, so ist

$$\vec{P} \cong \epsilon_0 \overleftrightarrow{\chi}_e \vec{E}, \quad (4.70)$$

wenn dies gilt, spricht man von einem *linearen Dielektrikum*. Ist es zusätzlich *isotrop*, so ist für alle Richtungen von \vec{E} die Polarisation \vec{P} parallel zu \vec{E} . Dies erfordert

$$\overleftrightarrow{\chi}_e = \chi_e \mathbb{1} \quad (4.71)$$

mit der skalaren Suszeptibilität χ_e .

Es ist wichtig, sich klarzumachen, dass \vec{E} das gesamte elektrische Feld ist, einschließlich eines Anteils, der vom polarisierten Körper selbst erzeugt wird. Daher ist $\vec{P} = \epsilon_0 \overleftrightarrow{\chi}_e \vec{E}$ i. A. eine komplizierte implizite Gleichung für \vec{E} bzw. \vec{P} .

In linearen Dielektrika gilt also

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \overleftrightarrow{\chi}_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \overleftrightarrow{\chi}_e) \vec{E} =: \epsilon_0 \overleftrightarrow{\epsilon}_r \vec{E} \equiv \overleftrightarrow{\epsilon} \vec{E}. \quad (4.72)$$

Hier ist $\overleftrightarrow{\epsilon}_r$ die (i. A. tensorwertige) *Dielektrizitätskonstante*, die offenbar einheitenlos ist, und $\overleftrightarrow{\epsilon}$ die *Permittivität*. In einem isotropen Medium haben wir

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \quad (4.73)$$

und speziell im Vakuum

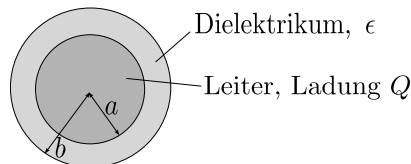
$$\epsilon_r = 1 \quad \text{und} \quad \epsilon = \epsilon_0. \quad (4.74)$$

Beispiele:

	ϵ_r
Luft (Normalbedingungen)	1,00054
Diamant	5,7
NaCl	5,9
Si	11,8
H ₂ O (-30°C)	99

Die Dielektrizitätskonstante von Wassereis ist hoch, da das H₂O-Molekül ein permanentes Dipolmoment besitzt. Wir werden von nun an nur isotrope, lineare Dielektrika betrachten.

■ Beispiel 1:



Es sei $\phi(\vec{r} \rightarrow \infty) = 0$, gesucht ist das Potential $\phi(\vec{r})$.

Lösung: Das Verschiebungsfeld folgt aus dem Gaußschen Gesetz (Kugelsymmetrie, daher $\vec{\nabla} \times \vec{P} = 0$):

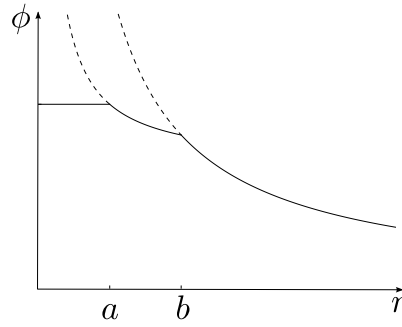
$$\vec{D}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad \text{für alle } r \geq a. \quad (4.75)$$

Innerhalb des Leiters ist $\vec{E} = 0$ und $\vec{D} = 0$. Außerhalb des Leiters bestimmen wir \vec{E} aus \vec{D} :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} & \text{für } r \geq b, \\ \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \hat{r} & \text{für } a \leq r < b. \end{cases} \quad (4.76)$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= - \int_{\infty}^{\vec{r}} d\vec{l}' \cdot \vec{E}(\vec{r}') \\ &= \begin{cases} - \int_{\infty}^r dr' \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(r')^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} & \text{für } r \geq b \\ - \int_{\infty}^b dr' \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(r')^2} - \int_b^r dr' \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{(r')^2} = \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon_0 b} + \frac{1}{\epsilon r} - \frac{1}{\epsilon b} \right) & \text{für } a \leq r < b \\ - \int_{\infty}^b dr' \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(r')^2} - \int_b^a dr' \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{(r')^2} = \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon_0 b} + \frac{1}{\epsilon a} - \frac{1}{\epsilon b} \right) & \text{für } r < a. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.77)$$



Wir können auch \vec{P} und die gebundenen Ladungen im Dielektrikum ausrechnen:

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E} = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{4\pi \epsilon} \frac{Q}{r^2} \hat{r} = \frac{\epsilon_r - 1}{4\pi \epsilon_r} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad \text{für } a \leq r < b. \quad (4.79)$$

Damit ist

$$\rho_g = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0 \quad (\text{da } \vec{r} \neq 0) \quad (4.80)$$

und

$$\sigma_g = \hat{n} \cdot \vec{P} = \begin{cases} \frac{\epsilon_r - 1}{4\pi \epsilon_r} \frac{Q}{b^2} & \text{für } r = b, \\ -\frac{\epsilon_r - 1}{4\pi \epsilon_r} \frac{Q}{a^2} & \text{für } r = a, \end{cases} \quad (4.81)$$

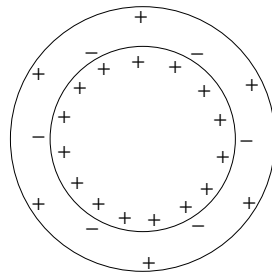
da \hat{n} vom Dielektrikum weg zeigt. Die gebundene Gesamtladung ist

$$Q_g = \underbrace{4\pi b^2 \frac{\epsilon_r - 1}{4\pi \epsilon_r} \frac{Q}{b^2}}_{\text{Außenfläche}} - \underbrace{4\pi a^2 \frac{\epsilon_r - 1}{4\pi \epsilon_r} \frac{Q}{a^2}}_{\text{Innenfläche}} = 0, \quad (4.82)$$

wie es sein muss.

Zum Vergleich, die *freie* Ladung an der Metalloberfläche bei $r = a$ ist

$$\sigma_f = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{a^2}. \quad (4.83)$$



Die Gesamtflächenladung an der Leiter-Dielektrikum-Grenzfläche ist also

$$\sigma = \sigma_f + \sigma_g = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{a^2} \left(1 - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) = \frac{1}{4\pi \epsilon_r} \frac{Q}{a^2}, \quad (4.84)$$

was mit dem \vec{E} -Feld für $a \leq r < b$ konsistent ist.

■ Beispiel 2: Ist das *gesamte* Volumen \mathcal{V} , in dem das Feld von Null verschieden ist, mit einem *homogenen* Dielektrikum gefüllt, dann gilt neben

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \quad (4.85)$$

auch

$$\vec{\nabla} \times \vec{D} = \vec{\nabla} \times \epsilon \vec{E} = \epsilon \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \quad (4.86)$$

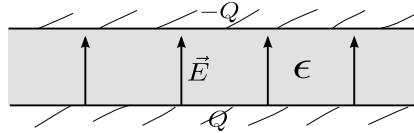
Dann gilt ein Coulomb-Gesetz für das Verschiebungsfeld:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint dV' \frac{\rho_f(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (4.87)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint dV' \frac{\rho_f(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (4.88)$$

(beachte die Größe ϵ statt ϵ_0). \vec{E} ist gegenüber dem Vakuum um den Faktor $\epsilon_0/\epsilon = 1/\epsilon_r$ reduziert.

Anwendung: Kondensator mit Dielektrikum.



Das \vec{E} -Feld für gegebene Ladungen $\pm Q$ ist gegenüber dem luftgefüllten Kondensator um $1/\epsilon_r$ reduziert. Daher ist auch das Potential ϕ um $1/\epsilon_r$ reduziert und ebenso die Potentialdifferenz (Spannung) U . Wir schließen, dass die Kapazität

$$C = \frac{Q}{U} \quad (4.89)$$

um den Faktor ϵ_r erhöht ist:

$$C = \epsilon_r C_{\text{vac}} \quad (4.90)$$

(C_{vac} ist die Kapazität des leeren Kondensators). Dies ist der übliche Weg, die Kapazität von Kondensatoren zu erhöhen.

4.4.1 Die Laplace-Gleichung in Dielektrika

In einem homogenen, linearen und isotropen Dielektrikum gilt

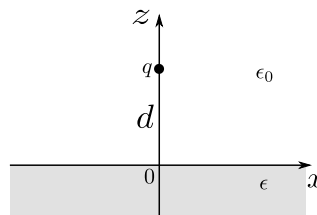
$$\rho_g = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\vec{\nabla} \cdot \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \frac{\epsilon_0 \chi_e \vec{D}}{\epsilon} = -\frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = -\frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \rho_f. \quad (4.91)$$

Die gebundene Ladungsdichte ist somit proportional zur freien Ladungsdichte. In fast allen praktisch relevanten Fällen ist die freie Ladungsdichte im Inneren von Dielektrika aber Null und daher gilt $\rho_f = 0$ und $\rho = \rho_f + \rho_g = 0$. Dann gilt die Laplace-Gleichung

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (4.92)$$

im Inneren von Dielektrika und Komplikationen kommen höchstens von den Anschlussbedingungen an den Grenzflächen zwischen Dielektrika (evtl. Luft oder Vakuum). Wir können also die bekannten Methoden zur Lösung der Laplace-Gleichung verwenden. Dies hatten wir schon in 4.2 ausgenutzt.

■ Beispiel: Punktladung und dielektrischer Halbraum.



Die Anschlussbedingungen lauten

$$D_z(x, y, 0^+) = D_z(x, y, 0^-), \quad (4.93)$$

$$E_x(x, y, 0^+) = E_x(x, y, 0^-), \quad (4.94)$$

$$E_y(x, y, 0^+) = E_y(x, y, 0^-), \quad (4.95)$$

$$\phi(x, y, 0^+) = \phi(x, y, 0^-). \quad (4.96)$$

Wir werden nur die erste und die vierte benötigen. Die erste impliziert

$$\epsilon_0 E_z(x, y, 0^+) = \epsilon E_z(x, y, 0^-). \quad (4.97)$$

Das Problem lässt sich mit Hilfe der Bildladungsmethode lösen, wobei wir immer aufpassen müssen, dass alle Bildladungen im unphysikalischen Bereich liegen. Jetzt interessiert uns aber das Feld sowohl im Vakuum ($z > 0$) als auch im Medium ($z < 0$). Wir machen eine Fallunterscheidung:

- Für $z > 0$ führen wir eine noch zu bestimmende Bildladung q' am Ort $-d\hat{z}$ ein (außerhalb des Bereichs $z > 0!$).
- Für $z < 0$ ersetzen wir die physikalische Ladung q bei $d\hat{z}$ durch die noch unbekannte Ladung q'' (außerhalb des Bereichs $z < 0!$).

Dann ist

$$\phi(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right] & \text{für } z > 0, \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q''}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} \right] & \text{für } z < 0. \end{cases} \quad (4.98)$$

Im Limes $z \rightarrow 0$ müssen beide Ausdrücke wegen der Stetigkeit von ϕ identisch sein. Daraus folgt sofort

$$q + q' = q''. \quad (4.99)$$

Die Bedingung für E_z ergibt

$$\frac{\epsilon_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} (-d) + \frac{q'}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} d \right] = \frac{\epsilon}{4\pi\epsilon_0} \frac{q''}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} (-d) \quad (4.100)$$

$$\Rightarrow -q + q' = -\epsilon_r q'' = -\epsilon_r (q + q') \quad (4.101)$$

$$\Rightarrow (1 + \epsilon_r) q' = (1 - \epsilon_r) q \quad (4.102)$$

$$\Rightarrow q' = \frac{1 - \epsilon_r}{1 + \epsilon_r} q = -\frac{\chi_e}{\chi_e + 2} q, \quad (4.103)$$

sowie

$$q'' = q - \frac{\chi_e}{\chi_e + 2} q = \frac{2}{\chi_e + 2} q. \quad (4.104)$$

Der Ansatz ist also erfolgreich, d. h. die Anschlussbedingungen lassen sich alle erfüllen (für \vec{E}_t wäre das noch zu prüfen). Wir könnten nun $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$, \vec{D} , \vec{P} und σ_g sofort ausrechnen.

4.5 Energie und Kraft in Dielektrika

4.5.1 Feldenergie

Da ein Dielektrikum die Kapazität eines Kondensators ändert, erwarten wir, dass es auch die im Feld gespeicherte Energie $W = \frac{1}{2} CU^2$ ändert. Um allgemein die Feldenergie zu bestimmen, stellen wir uns vor, ein *freies* Ladungselement ρ_f aus dem Unendlichen heran zu bringen, wofür wir gegen das Feld der schon vorhandenen Ladungen die Arbeit

$$\Delta W = \iiint dV \Delta\rho_f(\vec{r}) \phi(\vec{r}) \quad (4.105)$$

leisten müssen. Es ist

$$\Delta\rho_f = \vec{\nabla} \cdot \Delta\vec{D} \quad (4.106)$$

mit der Änderung $\Delta\vec{D}$ des Verschiebungsfeldes aufgrund von $\Delta\rho_f$. Daher folgt

$$\Delta W = \iiint dV (\vec{\nabla} \cdot \Delta\vec{D}) \phi \stackrel{\text{partiell}}{=} \underbrace{\iint d\vec{s} \cdot \Delta\vec{D} \phi}_0 - \iiint dV \Delta\vec{D} \cdot \vec{\nabla}\phi = + \iiint dV \Delta\vec{D} \cdot \vec{E}. \quad (4.107)$$

Dies gilt für jedes Dielektrikum. Nun nehmen wir an, dass es *linear* ist: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$. Dann folgt für infinitesimales $\Delta \vec{D}$:

$$\Delta \vec{D} \cdot \vec{E} = \epsilon \Delta \vec{E} \cdot \vec{E} = \frac{\epsilon}{2} \Delta (\vec{E} \cdot \vec{E}) = \frac{1}{2} \Delta (\vec{D} \cdot \vec{E}) \quad (4.108)$$

$$\Rightarrow \Delta W = \frac{1}{2} \iiint dV \Delta (\vec{D} \cdot \vec{E}) = \Delta \left(\frac{1}{2} \iiint dV \vec{D} \cdot \vec{E} \right). \quad (4.109)$$

Die Gesamtenergie nach dem Heranbringen aller freien Ladungen ist also

$$W = \frac{1}{2} \iiint dV \vec{D} \cdot \vec{E} \quad (4.110)$$

und die Energiedichte ist

$$w = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}. \quad (4.111)$$

Es stellt sich die Frage, wie diese Beziehungen und der oben hergeleitete Zusammenhang

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint dV E^2 \quad (4.112)$$

zugleich korrekt sein können. Die Antwort ist, dass die beiden Ausdrücke (4.110) und (4.112) die Energie für unterschiedliche Situationen wiedergeben. Gleichung (4.110) gilt, wenn ein polarisierbares Medium (ein Dielektrikum) schon vorhanden ist und freie Ladungen herangeführt werden. Gleichung (4.112) betrifft dagegen den Fall, dass *alle* Ladungen, auch die Kerne und Elektronen, die das Medium aufbauen, herangeführt werden.

Es geht also um den Unterschied zwischen dem Aufladen eines Kondensators und dessen Aufbau aus Elementarteilchen. Für einen Kondensator ist bei gegebener Spannung U das \vec{E} -Feld unabhängig von der Dielektrizitätskonstanten ϵ_r , da

$$U = \phi_+ - \phi_- = - \int d\vec{l} \cdot \vec{E} \quad (4.113)$$

gilt, was ϵ_r nicht enthält. Weiter ist

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (4.114)$$

im Dielektrikum. Wird die gespeicherte Energie vom Feld im Dielektrikum dominiert, so folgt

$$W = \frac{1}{2} \iiint dV \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \cdot \vec{E} = \epsilon_r \frac{\epsilon_0}{2} \iiint dV \vec{E} \cdot \vec{E} = \epsilon_r W_{\text{vac}}, \quad (4.115)$$

wobei W_{vac} die Energie des leeren Kondensators ist. Mit

$$W_{\text{vac}} = \frac{1}{2} C_{\text{vac}} U^2 \quad (4.116)$$

folgt

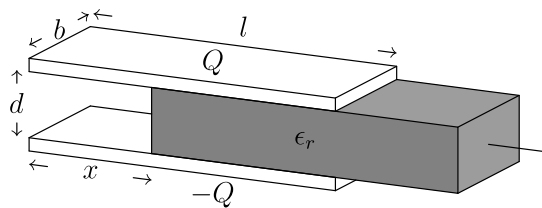
$$W = \frac{1}{2} \epsilon_r C_{\text{vac}} U^2. \quad (4.117)$$

Dies war zu erwarten, da wir in 4.4 gesehen hatten, dass $C = \epsilon_r C_{\text{vac}}$ gilt. Also können wir auch für Kondensatoren mit Dielektrikum schreiben

$$W = \frac{1}{2} C U^2. \quad (4.118)$$

4.5.2 Kräfte auf Dielektrika

Die Berechnung der mechanischen Kräfte, die im elektrischen Feld auf Dielektrika wirken, ist oft schwierig. Ein Teil der Schwierigkeit besteht darin, dass die direkte Bestimmung der Kräfte oft die Kenntnis des \vec{E} -Feldes für komplizierte Geometrien, z. B. Randeffekte, erfordert. Es ist meist einfacher, die Kräfte über die Energien zu bestimmen. Wir betrachten nur ein recht einfaches Beispiel zur Illustration.



Ein Plattenkondensator mit der Ladung Q enthalte ein gemäß Skizze verschiebbares Dielektrikum. Wir suchen die Kraft, mit der das Dielektrikum in den Kondensator hineingezogen oder aus ihm herausgedrückt wird.

Die direkte Berechnung der Kräfte benötigt das \vec{E} -Feld im Rand des Kondensators und ist daher schwierig. Wir betrachten daher die Energie

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (4.119)$$

(die *Ladung* ist gegeben, nicht die Spannung!). Die Kapazität kann, für $d \ll b, l$, wie folgt bestimmt werden:

Die Spannung U ist überall gleich, da die Platten jeweils Äquipotentialflächen sind. Für den leeren Teil gilt für die Flächenladungsdichte auf der (o. B. d. A.) oberen Platte

$$\sigma_{f,1} = \epsilon_0 E = \epsilon_0 \frac{U}{d}. \quad (4.120)$$

Für den gefüllten Teil gilt, da D_n um σ_f springt,

$$\sigma_{f,2} = D = \epsilon_0 \epsilon_r E = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{U}{d}. \quad (4.121)$$

Die (vorgegebene) Gesamtladung ist damit

$$Q = \sigma_{f,1} b x + \sigma_{f,2} b (l - x) = \epsilon_0 b [x + (l - x) \epsilon_r] \frac{U}{d} = \epsilon_0 b [l \epsilon_r + x \underbrace{(1 - \epsilon_r)}_{=-\chi_e}] \frac{U}{d} \quad (4.122)$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \frac{b}{d} (l \epsilon_r - x \chi_e). \quad (4.123)$$

(Dasselbe Ergebnis erhalten wir mittels der Formel für die Parallelschaltung von Kapazitäten.) Die gespeicherte Energie ist nun

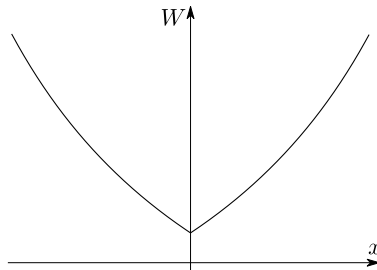
$$W = \frac{Q^2}{2\epsilon_0} \frac{d}{b} \frac{1}{l \epsilon_r - x \chi_e}. \quad (4.124)$$

Die Kraft in x -Richtung des Feldes auf das Dielektrikum ist

$$F = -\frac{dW}{dx} = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0} \frac{d}{b} \frac{\chi_e}{(l \epsilon_r - x \chi_e)^2}. \quad (4.125)$$

Die Herleitung hat nur Sinn für $x \geq 0$. Allgemein müssen wir x in W durch $|x|$ ersetzen. Dann sehen wir, dass $W(x)$ ein (nicht analytisches) Minimum bei $x = 0$ hat:

$$W = \frac{Q^2}{2\epsilon_0} \frac{d}{b} \frac{1}{l \epsilon_r - |x| \chi_e} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0} \frac{d}{b} \frac{1}{l \epsilon_r} \frac{1}{1 - \frac{\chi_e}{\epsilon_r l} |x|} \cong \frac{Q^2}{2\epsilon_0} \frac{d}{b} \frac{1}{l \epsilon_r} \left(1 + \frac{\chi_e}{\epsilon_r l} |x|\right). \quad (4.126)$$



Damit übereinstimmend ist $F < 0$ für $x > 0$ – das Dielektrikum wird in den Kondensator *hinein gezogen*. Für konstante *Spannung* lässt sich die Kraft ebenfalls berechnen, mit i. W. demselben Ergebnis. Dabei sind die in 2.7 besprochenen Subtilitäten zu beachten.

Kapitel 5

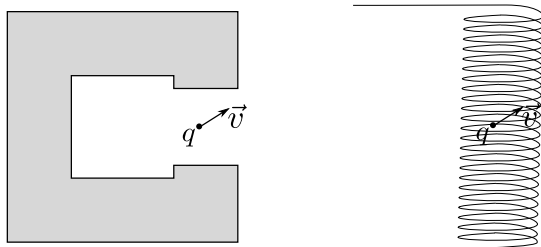
Mikroskopische Magnetostatik

Magnetische Phänomene sind zumindest seit der Antike bekannt. Plato und Aristoteles erwähnen Permanentmagnete. Es handelte sich um natürlich vorkommende „Magnetsteine“ aus Magnetit (Fe_3O_4). Das Erdmagnetfeld wurde offenbar in China entdeckt und beweglich aufgehängte Permanentmagnete wurden dort spätestens um 1040 u. Z. als Kompass verwendet, möglicherweise aber schon viel früher. Dieses Kapitel beschäftigt sich mit dem Konzept des *magnetischen Feldes* sowie mit dessen Ursachen und Konsequenzen. Wir beschränken uns hier auf zeitunabhängige Magnetfelder, dies definiert das Gebiet der *Magnetostatik*. Zunächst betrachten wir die Konsequenzen des Feldes.

5.1 Die Lorentz-Kraft

Wir führen das Magnetfeld hier empirisch ein. Man kann seine Existenz und Eigenschaften alternativ auch aus unserer Kenntnis des elektrischen Feldes und der Forderung der Lorentz-Invarianz ableiten. Experimente zeigen, dass auf ein Teilchen mit der Ladung q , das sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} zwischen den Polen eines Permanentmagneten oder in einer langen Spule bewegt, eine Kraft \vec{F} wirkt, die folgende Eigenschaften hat:

- die Kraft ist proportional zur Geschwindigkeit, $F \sim v$,
- sie steht senkrecht auf der Geschwindigkeit, $\vec{F} \perp \vec{v}$, also $\vec{F} \cdot \vec{v} = 0$,
- sie ist proportional zur Ladung, $F \sim q$,
- es existiert eine von der Geschwindigkeit und Ladung des Teilchens unabhängige Richtung \hat{B} , so dass die Kraft \vec{F} für alle Geschwindigkeiten und Ladungen senkrecht auf \hat{B} steht: $\vec{F} \cdot \hat{B} = 0 \forall \vec{v}, q$. Außerdem bilden \vec{v} , \hat{B} und \vec{F} ein Rechtssystem (Linkssystem) für $q > 0$ ($q < 0$).
- Die Kraft ist proportional zum Sinus des von \vec{v} und \hat{B} eingeschlossenen Winkels, $F \sim \sin \angle(\vec{v}, \hat{B})$.



Aus diesen Beobachtungen können wir schließen, dass eine Proportionalitätskonstante $B > 0$ existiert, so dass gilt

$$\vec{F} = B q \vec{v} \times \hat{B}. \quad (5.1)$$

Wir führen $\vec{B} := B \hat{B}$ ein und erhalten die *Lorentz-Kraft*, genauer ihren magnetischen Anteil,

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}. \quad (5.2)$$

Die gesamte Lorentz-Kraft beinhaltet auch den elektrischen Anteil $q\vec{E}$:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (5.3)$$

Man findet i. A. an verschiedenen Orten verschiedene \vec{B} , also ist $\vec{B}(\vec{r})$ ein *Feld*. Wir nennen es die *magnetische Induktion* oder *magnetische Flussdichte*. Es repräsentiert das magnetische Feld, aber leider ist der Begriff „Magnetfeld“ aus historischen Gründen für eine andere Größe reserviert, nämlich i. W. für das magnetische Analogon des elektrischen Verschiebungsfeldes, wie wir im nächsten Kapitel diskutieren werden.

Wir hatten in Abschnitt A.1.4 gesehen, dass das Vektorprodukt zweier Vektoren ein *Pseudovektor* ist. Zur Erinnerung: Vektoren ändern unter Inversion des Raumes ihr Vorzeichen, Pseudovektoren dagegen nicht. Wenn nun die Induktion \vec{B} wie die Geschwindigkeit \vec{v} ein Vektor wäre, so müsste die Kraft ein Pseudovektor sein. Das widerspricht aber dem Newtonschen Gesetz $\vec{F} = m\vec{a}$ und der Tatsache, dass die Beschleunigung ein Vektor ist. Daher müssen wir folgern, dass die Induktion ein Pseudovektor ist.

Die magnetische Lorentz-Kraft ist offensichtlich nicht konservativ, da sie von der Geschwindigkeit abhängt – ein Kraftfeld \vec{F} ist konservativ, wenn \vec{F} nur von \vec{r} abhängt und $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ gilt. Wir können aber die Arbeit ausrechnen, die eine sich im \vec{B} -Feld bewegend Ladung verrichtet. Während des Zeitintervalls dt bewegt sich die Ladung um

$$d\vec{r} = \vec{v} dt. \quad (5.4)$$

Dabei verrichtet sie die Arbeit

$$dW_{\text{mag}} = \vec{F}_{\text{mag}} \cdot d\vec{r} = q \underbrace{(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}}_0 dt = 0. \quad (5.5)$$

Also gilt für eine *beliebige* Bewegung der Ladung $W_{\text{mag}} = 0$, d. h. die magnetische Kraft verrichtet keine Arbeit. (Wir sehen, dass die magnetische Lorentz-Kraft eine ganz spezielle Kraft ist: Obwohl sie nicht konservativ ist, ist die Arbeit wie bei einer konservativen Kraft wegunabhängig, nämlich immer Null.) In einem rein magnetischen Kraftfeld ist somit die kinetische Energie $\frac{1}{2}mv^2$ erhalten und daher ebenso der Betrag $v = |\vec{v}|$ der Geschwindigkeit.

Wir betrachten die Bewegung für zwei einfache Fälle. Der Einfachheit halber sei jeweils $q > 0$.

- (a) Homogenes \vec{B} -Feld, verschwindendes \vec{E} -Feld. Da $\vec{F} \perp \vec{B}$, ist die Bewegung in Feldrichtung kräftefrei und daher unbeschleunigt. Wir beschränken uns auf den Fall $\vec{v} \perp \vec{B}$. Das mechanische Problem wird durch die Newton-Gleichung

$$m\dot{\vec{v}} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (5.6)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 \perp \vec{B} \quad (5.7)$$

ausgedrückt. Wir wählen kartesische Koordinaten mit $\hat{z} = \hat{B}$ und $\hat{x} = \hat{v}_0$. Es folgt

$$m\dot{v}_x = qv_y B, \quad (5.8)$$

$$m\dot{v}_y = -qv_x B \quad (5.9)$$

$$\Rightarrow m\ddot{v}_x = q\dot{v}_y B = -\frac{q^2 B^2}{m} v_x \quad (5.10)$$

$$\Rightarrow \ddot{v}_x = -\frac{q^2 B^2}{m^2} v_x \quad (5.11)$$

mit der Anfangsbedingung $v_x(0) = v_0$. Die Lösung lautet

$$v_x = v_0 \cos \omega_c t \quad (5.12)$$

mit der *Zyklotronfrequenz*

$$\omega_c := \frac{qB}{m}. \quad (5.13)$$

Es folgt

$$v_y = \frac{m}{qB} \dot{v}_x = \frac{\dot{v}_x}{\omega_c} = -v_0 \sin \omega_c t. \quad (5.14)$$

Die Trajektorie ist, ausgehend von einem Anfangsort $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$,

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t dt' \vec{v}(t') = \vec{r}_0 + \frac{v_0}{\omega_c} \begin{pmatrix} \sin \omega_c t' \\ \cos \omega_c t' \\ 0 \end{pmatrix} \Big|_0^t = \vec{r}_0 + \frac{v_0}{\omega_c} \begin{pmatrix} \sin \omega_c t \\ \cos \omega_c t - 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{r}_0 - \frac{v_0}{\omega_c} \hat{y} + \frac{v_0}{\omega_c} \begin{pmatrix} \sin \omega_c t \\ \cos \omega_c t \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

Das ist eine *Kreisbahn* (genannt Zyklotronbahn) mit dem Radius

$$R_c = \frac{v_0}{\omega_c} = \frac{mv_0}{qB} \quad (5.16)$$

und dem Mittelpunkt

$$\vec{r}_0 - \frac{v_0}{\omega_c} \hat{y}. \quad (5.17)$$

Diesen Zusammenhang kann man verwenden, um das Verhältnis e/m für Elektronen zu messen. Das ist ein recht einfacher Praktikumsversuch. Die Messung der Elementarladung e oder der Elektronenmasse m einzeln ist sehr viel schwieriger. Es ist bemerkenswert, dass mit einer einfachen Messung die spezifische Ladung e/m von Elementarteilchen bestimmt werden kann.

- (b) Homogene \vec{E} - und \vec{B} -Felder, orthogonal zueinander. Weiter sei $\vec{v}(0) = 0$ und o. B. d. A. $\vec{r}(0) = 0$. Wähle $\hat{x} = \hat{B}$ und $\hat{z} = \hat{E}$. Es ist

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (5.18)$$

also

$$F_x = 0, \quad (5.19)$$

$$F_y = qv_z B, \quad (5.20)$$

$$F_z = qE - qv_y B. \quad (5.21)$$

Wegen $F_x = 0$ und $v_x(0) = 0$ liegt die Trajektorie in der yz -Ebene. Die Newton-Gleichung liefert

$$m\dot{v}_y = qv_z B, \quad (5.22)$$

$$m\dot{v}_z = qE - qv_y B. \quad (5.23)$$

Wir geben hier nur das Ergebnis an:

$$v_y(t) = \frac{E}{B} (1 - \cos \omega_c t), \quad (5.24)$$

$$v_z(t) = \frac{E}{B} \sin \omega_c t, \quad (5.25)$$

was man durch Einsetzen überprüfen kann. Die Bewegung ist die Überlagerung einer gleichförmigen Bewegung in Richtung $\vec{E} \times \vec{B}$ mit der *Driftgeschwindigkeit*

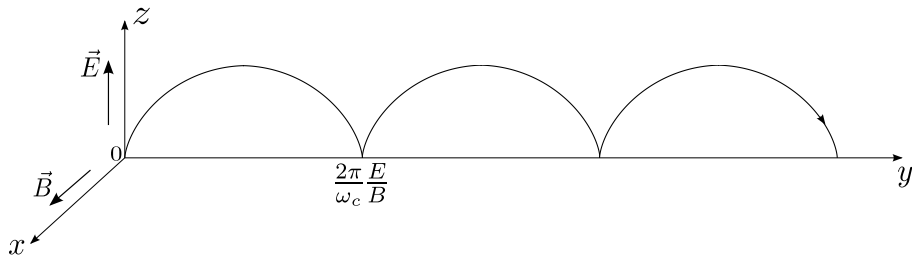
$$v_{\text{Drift}} = \frac{E}{B} \quad (5.26)$$

und einer Kreisbewegung mit der Zyklotronfrequenz ω_c . Durch Integration erhalten wir die Trajektorie (beachte $\vec{r}(0) = 0$)

$$r_y(t) = \frac{E}{B} \left(t - \frac{1}{\omega_c} \sin \omega_c t \right), \quad (5.27)$$

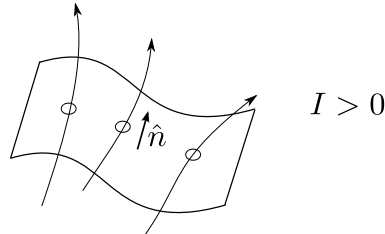
$$r_z(t) = -\frac{E}{B} \frac{1}{\omega_c} (\cos \omega_c t - 1). \quad (5.28)$$

Die Bahnkurve ist eine *Zykloide*. Das Teilchen kommt zu den Zeiten $t = 2\pi n/\omega_c$, $n = 0, 1, 2, \dots$ zur Ruhe.



5.2 Ströme

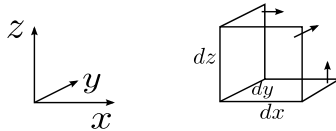
Die (elektrische) *Stromstärke* I ist definiert als die Ladung pro Zeitintervall, die durch eine orientierte Fläche hindurchtritt. Wir müssen festlegen, in welcher Richtung wir einen Strom aus positiven Ladungen als positiv zählen wollen. Dies ist die *Referenzstromrichtung*. Sie entspricht der Wahl einer der beiden möglichen Orientierungen der Fläche.



Wir können schreiben

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (5.29)$$

Wir definieren auch die (elektrische) *Stromdichte* als transportierte Ladung dq pro Zeitintervall dt und Fläche dA . Da es im dreidimensionalen Raum drei linear unabhängige Orientierungen von Flächenelementen $d\vec{A}$ gibt, liegt es nahe, die Stromdichte als *Vektor* zu definieren.



Sei

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)_\alpha \quad \text{für } \alpha = x, y, z \quad (5.30)$$

die Ladung pro Zeit, die durch das zu $\hat{\alpha} = \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ senkrechte Flächenelement tritt. Dann schreiben wir in kartesischen Koordinaten

$$j_x = \left(\frac{dq}{dt}\right)_x \frac{1}{dy dz}, \quad (5.31)$$

$$j_y = \left(\frac{dq}{dt}\right)_y \frac{1}{dz dx}, \quad (5.32)$$

$$j_z = \left(\frac{dq}{dt}\right)_z \frac{1}{dx dy}. \quad (5.33)$$

Für ein beliebig orientiertes Flächenelement $d\vec{A} = dA \hat{n}$ ist die Normalkomponente von \vec{j} analog

$$j_n \equiv \hat{n} \cdot \vec{j} = \left(\frac{dq}{dt}\right)_n \frac{1}{dA}. \quad (5.34)$$

Die Stromdichte ist i. A. ortsabhängig und daher ein *Vektorfeld*. Ihr *Fluss* durch eine Fläche \mathcal{S} ist die Stromstärke:

$$\iint_{\mathcal{S}} d\vec{A} \cdot \vec{j} = \iint_{\mathcal{S}} dA j_n = \iint_{\mathcal{S}} dA \left(\frac{dq}{dt}\right)_n \frac{1}{dA} = \iint_{\mathcal{S}} \left(\frac{dq}{dt}\right)_n \equiv \frac{dQ}{dt} = I. \quad (5.35)$$

Die Stromstärke ist offensichtlich ein Skalar.

Wird eine Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ von Teilchen gebildet, die sich mit der evtl. ortsabhängigen Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r})$ bewegen, so erzeugen sie die Stromdichte

$$\vec{j} = \rho \vec{v}. \quad (5.36)$$

Gibt es mehrere Arten von Teilchen, z. B. Elektronen und Löcher in einem Halbleiter oder Anionen und Kationen in einem Elektrolyt, so ist die gesamte Stromdichte

$$\vec{j} = \sum_n \rho_n \vec{v}_n, \quad (5.37)$$

wobei n die Teilchenart abzählt. In einem stromdurchflossenen Metall bewegen sich nur die Elektronen, aber nicht die Ionenrümpfe. Die Ladungen gleichen sich aber aus, das Metall ist (evtl. bis auf relativ kleine Oberflächenladungen) elektrisch neutral. Es gilt also

$$\rho = \rho_e + \rho_i = 0, \quad (5.38)$$

aber

$$\vec{j} = \rho_e \vec{v}_e + \rho_i \underbrace{\vec{v}_i}_0 = \rho_e \vec{v}_e \neq 0. \quad (5.39)$$

Beachte, dass ein sich insgesamt bewegnender elektrisch neutraler Leiter *keinen* Strom repräsentiert: Es ist

$$\vec{j} = \rho_e \vec{v} + \rho_i \vec{v} = (\rho_e - \rho_e) \vec{v} = 0. \quad (5.40)$$

Ist die Ladungsdichte auf eine Kurve oder eine Fläche beschränkt, können wir in Analogie zur Linien- bzw. Flächenladungsdichte entsprechende Stromdichten definieren:

- die *Linienstromdichte* $\vec{I} = \lambda \vec{v}$, diese ist ein *Vektor* tangential zur Kurve, auf die die Ladung beschränkt ist („Draht“); es gilt $\vec{I} = I \hat{t}$, wobei \hat{t} der Tangenteneinheitsvektor in der Referenzstromrichtung und I die Stromstärke ist,
- die *Flächenstromdichte* $\vec{K} = \sigma \vec{v}$, diese ist ein zur Fläche tangentialer Vektor.

In der *Magnetostatik* nehmen wir an, dass die Ströme (\vec{j}) und die Ladungen (ρ) zeitunabhängig sind. Das bedeutet nicht, dass die Ladungen ruhen, sondern nur, dass sie sich nicht anhäufen.

5.2.1 Die Kontinuitätsgleichung

Ein zentrales Postulat der Elektrodynamik ist die lokale Erhaltung der Ladung. *Lokale* Erhaltung bedeutet, dass an keinem Punkt Ladung erzeugt oder vernichtet wird. *Globale* Erhaltung wäre die viel schwächere Forderung, dass die *Gesamtladung* zeitunabhängig sein soll; dies würde zulassen, dass Ladung an einem Ort verschwindet und gleichzeitig an einem anderen auftaucht. Die Struktur der Elektrodynamik (als „Eichtheorie“) beruht wesentlich auf der lokalen Ladungserhaltung.

Ist die Ladung lokal erhalten, so muss für *jedes* Volumen \mathcal{V} gelten, dass die Änderung der enthaltenen Ladung Q nur durch einen Strom durch die Oberfläche $\partial\mathcal{V}$ erfolgen kann. Der Strom durch die Oberfläche ist

$$I = \oiint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{A} \cdot \vec{j}. \quad (5.41)$$

Wählen wir die Referenzstromrichtung nach außen, so muss für die Änderung der eingeschlossenen Ladung Q gelten

$$dQ = -I dt \quad (5.42)$$

(die Ladung nimmt ab, wenn Strom herausfließt). Es folgt

$$\frac{dQ}{dt} = -I \quad (5.43)$$

$$\Rightarrow \iiint_{\mathcal{V}} dV \frac{\partial\rho}{\partial t} = - \oiint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{A} \cdot \vec{j}. \quad (5.44)$$

Mit dem Gaußschen Satz folgt

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV \frac{\partial\rho}{\partial t} = - \iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{\nabla} \cdot \vec{j}. \quad (5.45)$$

Da dies für jedes \mathcal{V} gilt, folgt

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j} \quad (5.46)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (5.47)$$

Dies ist die *Kontinuitätsgleichung* für die elektrische Ladung. Sie ist eine kompakte Formulierung der lokalen Ladungserhaltung. Speziell in der Magnetostatik fordern wir $\partial\rho/\partial t = 0$, woraus folgt $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$. Die Stromdichte ist in diesem Fall quellenfrei.

5.2.2 Kraft und Drehmoment auf Stromschleifen

Oft sind die Kraft oder das Drehmoment gesucht, die auf eine Leiterschleife im \vec{B} -Feld wirken. Eine wichtige Anwendung sind Elektromotoren. Wir können noch allgemeiner beliebige Stromverteilungen $\vec{j}(\vec{r})$ betrachten. Die Kraft auf ein Volumenelement dV am Ort \vec{r} beträgt

$$d\vec{F} = dV \rho(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) = dV \vec{j} \times \vec{B}. \quad (5.48)$$

Die Gesamtkraft ist daher

$$\vec{F} = \iiint dV \vec{j} \times \vec{B} \quad (5.49)$$

und das Gesamtdrehmoment

$$\vec{M} = \iiint dV \vec{r} \times (\vec{j} \times \vec{B}) = \iiint dV \vec{j}(\vec{r} \cdot \vec{B}) - \iiint dV \vec{B}(\vec{r} \cdot \vec{j}). \quad (5.50)$$

Für einen Linienstrom $\vec{I}(\vec{r})$ ist die Herleitung analog: Die Kraft auf ein Linienelement $d\vec{l}$ am Ort \vec{r} beträgt

$$d\vec{F} = d\vec{l} \lambda \vec{v} \times \vec{B} = d\vec{l} \vec{I} \times \vec{B} \quad (5.51)$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \int d\vec{l} \vec{I} \times \vec{B} \quad (5.52)$$

und

$$\vec{M} = \int d\vec{l} \vec{r} \times (\vec{I} \times \vec{B}) = \int d\vec{l} \vec{I}(\vec{r} \cdot \vec{B}) - \int d\vec{l} \vec{B}(\vec{r} \cdot \vec{I}). \quad (5.53)$$

Wir nehmen jetzt an, dass die Stromlinien geschlossen sind. Im Rahmen der Magnetostatik ist die Stromstärke entlang jeder Schleife konstant. Wir betrachten nun nur *eine* Schleife, die Verallgemeinerung auf mehrere Schleifen folgt mittels des Superpositionsprinzips. Dann können wir schreiben

$$\vec{F} = I \oint d\vec{l} \times \vec{B}, \quad (5.54)$$

$$\vec{M} = I \oint d\vec{l}(\vec{r} \cdot \vec{B}) - I \oint (d\vec{l} \cdot \vec{r}) \vec{B}. \quad (5.55)$$

Speziell für ein *homogenes* \vec{B} -Feld können wir auch \vec{B} aus dem Integral herausziehen. Es folgt

$$\vec{F} = I \underbrace{\left(\oint d\vec{l} \right)}_{=0} \times \vec{B} = 0 \quad (5.56)$$

und

$$\vec{M} = I \oint d\vec{l}(\vec{r} \cdot \vec{B}) - I \underbrace{\left(\oint d\vec{l} \cdot \vec{r} \right)}_{=0} \vec{B}. \quad (5.57)$$

Das letzte Integral verschwindet, da der Integrand \vec{r} wirbelfrei ist ($\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0$) und daher ein Potential existiert:

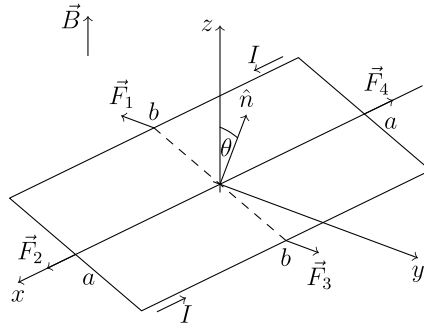
$$\vec{r} = \vec{\nabla} \frac{1}{2} r^2. \quad (5.58)$$

Das Ringintegral ist daher Null, analog zum Fall eines konservativen Feldes. Wir finden, dass die Kraft auf eine beliebige Stromschleife in einem homogenen \vec{B} -Feld verschwindet und sich das Drehmoment zu

$$\vec{M} = I \oint d\vec{l}(\vec{r} \cdot \vec{B}) \quad (5.59)$$

vereinfacht.

Beispiel: Drehmoment auf die folgende Leiterschleife im homogenen Induktionsfeld $\vec{B} = B\hat{z}$:



Wir können die Kräfte stückweise berechnen:

$$\vec{F}_1 = I \int_{\text{Stück 1}} d\vec{l} \times \vec{B} = Ib\hat{x} \times B\hat{z} = -bIB\hat{y}, \quad (5.60)$$

$$\vec{F}_2 = Ia(\cos\theta\hat{y} - \sin\theta\hat{z}) \times B\hat{z} = aIB\cos\theta\hat{x}, \quad (5.61)$$

$$\vec{F}_3 = -Ib\hat{x} \times B\hat{z} = bIB\hat{y}, \quad (5.62)$$

$$\vec{F}_4 = Ia(-\cos\theta\hat{y} + \sin\theta\hat{z}) \times B\hat{z} = -aIB\cos\theta\hat{x}. \quad (5.63)$$

Es folgt

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0, \quad (5.64)$$

wie erwartet, und

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \frac{a}{2}(-\cos\theta\hat{y} + \sin\theta\hat{z}) \times \vec{F}_1 + \frac{b}{2}\hat{x} \times \vec{F}_2 + \frac{a}{2}(\cos\theta\hat{y} - \sin\theta\hat{z}) \times \vec{F}_3 - \frac{b}{2}\hat{x} \times \vec{F}_4 \\ &= \frac{abIB}{2}\sin\theta\hat{x} + 0 + \frac{abIB}{2}\sin\theta\hat{x} + 0 = abI\sin\theta\hat{x} = abI(\sin\theta\hat{y} + \cos\theta\hat{z}) \times B\hat{z} = abI\hat{n} \times \vec{B}, \end{aligned} \quad (5.65)$$

wobei \hat{n} der Normaleneinheitsvektor senkrecht zur Ebene der Stromschleife ist.

5.3 Das Biot-Savart-Gesetz

Eine sich bewegende Punktladung q mit der Trajektorie $\vec{r} = \vec{r}_q(t)$ hat die Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}, t) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_q(t)) \quad (5.66)$$

und die Stromdichte

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho\vec{v} = q\frac{d\vec{r}_q}{dt}\delta(\vec{r} - \vec{r}_q(t)). \quad (5.67)$$

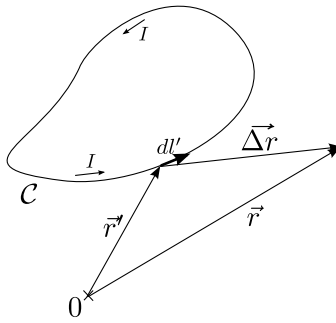
Diese sind offensichtlich nicht stationär. Dieser Fall kann daher nicht im Rahmen der Magnetostatik beschrieben werden. Der einfachste der Magnetostatik zugängliche Fall ist ein stationärer Strom entlang eines Drahtes (Linienstrom).

Beachte, dass das Induktionsfeld \vec{B} unter Ausnutzung der Lorentzkraft gemessen werden kann. (Typische Magnetfeldresonanzen beruhen auf dem Hall-Effekt, der in der Tat die Lorentz-Kraft auf Elektronen in Metallen ausnutzt.) Für eine gegebene Linienstromdichte \vec{I} findet man experimentell das Induktionsfeld

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C dl' \frac{\vec{I} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C dl' \frac{\vec{I} \times \widehat{\Delta r}}{(\Delta r)^3} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C dl' \frac{\vec{I} \times \widehat{\Delta r}}{(\Delta r)^2}. \quad (5.68)$$

Ist der Strom entlang des gesamten Drahtes gleich groß, so können wir I aus dem Integral herausziehen:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_C \frac{d\vec{l}' \times \widehat{\Delta r}}{(\Delta r)^2}. \quad (5.69)$$



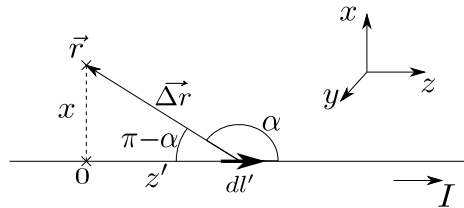
Alle diese Formen nennt man das *Biot-Savartsche* (oder Biot-Savart-) *Gesetz*. μ_0 ist die *Permeabilität des Vakuums*. In SI-Einheiten ist $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ (exakt). Wie ϵ_0 ist μ_0 einfach ein Umrechnungsfaktor, der sich aus der Wahl der Einheiten ergibt. Der Vergleich mit dem Coulomb-Gesetz für eine Linienladung,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C dl' \frac{\lambda(\vec{r}') \widehat{\Delta r}}{(\Delta r)^2}, \quad (5.70)$$

zeigt, dass das Biot-Savart-Gesetz das magnetische Analogon des Coulomb-Gesetzes ist.

Am Biot-Savart-Gesetz erkennen wir auch, dass das \vec{B} -Feld ein *Pseudovektor* (axialer Vektor) ist: In Gl. (5.69) ist die Stromstärke I ein Skalar und $d\vec{l}'$ sowie $\widehat{\Delta r}$ sind Vektoren. Unter Raumspiegelung (Inversion) ändert sich I nicht, während $d\vec{l}'$ und $\widehat{\Delta r}$ das Vorzeichen wechseln. Das \vec{B} -Feld ändert sein Vorzeichen unter Inversion also *nicht*, was es als Pseudovektorfeld kennzeichnet. Das ist konsistent mit der magnetischen Lorentz-Kraft $\vec{F}_{\text{mag}} = q \vec{v} \times \vec{B}$: \vec{v} ist ein Vektor, \vec{B} ist ein Pseudovektor, daher ist die Kraft \vec{F}_{mag} ein Vektor.

■ Beispiel 1: \vec{B} -Feld eines langen, geraden, stromführenden Drahtes:



Das Linienelement $d\vec{l}'$ bei \vec{r}' erzeugt am Ort $\vec{r} = x\hat{x}$ das Feld

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l}' \times \widehat{\Delta r}}{(\Delta r)^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dz' \sin \alpha \hat{y}}{x^2 + (z')^2}. \quad (5.71)$$

Es ist

$$\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (z')^2}} \quad (5.72)$$

$$\Rightarrow d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{x}{(x^2 + (z')^2)^{3/2}} \hat{y} dz'. \quad (5.73)$$

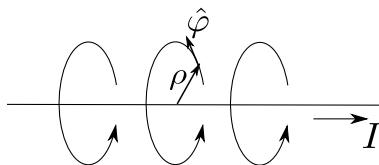
Das gesamte \vec{B} -Feld ist also

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{x}{(x^2 + (z')^2)^{3/2}} \hat{y} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\hat{y}}{x} \frac{z'}{\sqrt{x^2 + (z')^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{\hat{y}}{x} \underbrace{\lim_{z' \rightarrow \infty} \frac{z'}{\sqrt{x^2 + (z')^2}}}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{x} \hat{y}. \quad (5.74)$$

Unter Ausnutzung der Rotationssymmetrie um die z -Achse erhalten wir allgemein, in Zylinderkoordinaten ρ , φ , z ,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \hat{\varphi}. \quad (5.75)$$

Insbesondere ist das \vec{B} -Feld *tangential* an Kreisen mit ihrem Mittelpunkt auf dem Draht. Die Richtung von \vec{B} gehorcht der Rechte-Hand-Regel.

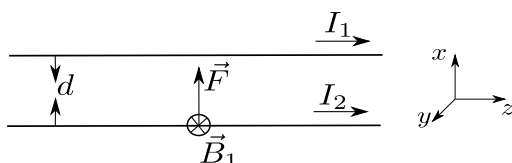


Wir betrachten noch das Verhalten dieses Gesetzes unter Inversion des Raumes. Unter Inversion kehrt sich der Strom um: $I \rightarrow -I$. Da \vec{B} ein Pseudovektor ist, könnte man annehmen, dass \vec{B} unverändert bleibt. Das kann aber nicht stimmen – wegen der Linearität der Gleichung muss \vec{B} mit -1 multipliziert werden, wenn I mit -1 multipliziert wird. Tatsächlich kehrt sich das Feld $\vec{B}(\vec{r})$ lokal um, denn unter Inversion gilt

$$\vec{r} \rightarrow -\vec{r} \Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) \rightarrow +\vec{B}(-\vec{r}) = -\vec{B}(\vec{r}), \quad (5.76)$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass \vec{B} eine ungerade Funktion von \vec{r} ist.

Mit dem Ergebnis für die Induktion können wir die Kraft zwischen zwei parallelen Drähten mit den Strömen I_1 und I_2 bestimmen.



An einem beliebigen Punkt auf Draht 2 beträgt das \vec{B} -Feld aufgrund von Draht 1,

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} (-\hat{y}). \quad (5.77)$$

Die Kraft auf Draht 2 ist also, gemäß Gl. (5.54),

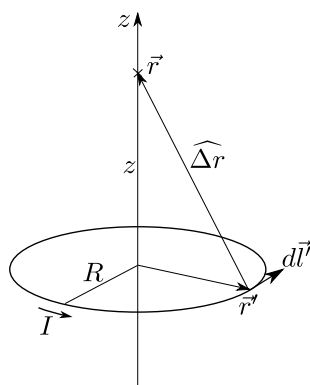
$$\vec{F}_{21} = I_2 \int_{\text{Draht 2}} d\vec{l} \times \vec{B}_1 = I_2 \int_{\text{Draht 2}} dz \hat{z} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} (-\hat{y}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} \hat{x} \int_{\text{Draht 2}} dz. \quad (5.78)$$

Das Integral ist die Länge des zweiten Drahtes und damit formal unendlich. Es ist sinnvoll, die Kraft pro Länge anzugeben:

$$\vec{f}_{21} := \frac{d\vec{F}_{21}}{dl} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} \hat{x}. \quad (5.79)$$

Beachte, dass die Kraft für in *dieselbe* Richtung fließende Ströme *anziehend* ist. Diese Kraft wird für die Definition der Einheit Ampère verwendet.

■ Beispiel 2: \vec{B} -Feld auf der Symmetrieachse einer kreisförmigen Leiterschleife.



Aus Symmetriegründen gilt auf der Achse $\vec{B}(z) = B_z(z) \hat{z}$. Das Biot-Savart-Gesetz ergibt

$$\begin{aligned} B_z(z) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \hat{z} \cdot \int_C \frac{d\vec{l}' \times \vec{\Delta r}}{(\Delta r)^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_C \frac{\hat{z} \cdot (d\vec{l}' \times \vec{\Delta r})}{(\Delta r)^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_C \frac{d\vec{l}' \cdot (\vec{\Delta r} \times \hat{z})}{(\Delta r)^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_C \frac{d\vec{l}' \cdot (\vec{r} \times \hat{z} - \vec{r}' \times \hat{z})}{(\Delta r)^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_C \frac{dl' R}{(R^2 + z^2)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (5.80)$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass $d\vec{l}'$, $-\vec{r}'$ und \hat{z} ein orthogonales Rechtssystem bilden. Es folgt

$$B_z(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (5.81)$$

Wir werden später auf das \vec{B} -Feld einer Leiterschleife zurückkommen.

Die Verallgemeinerung des Biot-Savart-Gesetzes auf Flächen- und Volumenstromdichten ist naheliegend:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint ds' \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times \widehat{\Delta r}}{(\Delta r)^2}, \quad (5.82)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times \widehat{\Delta r}}{(\Delta r)^2}. \quad (5.83)$$

Der letztere Ausdruck enthält Flächen- und Linienströme als Spezialfälle, analog zum Coulomb-Gesetz.

5.4 Das Ampèresche Gesetz

Mittels des Biot-Savartschen Gesetzes können wir die Rotation und die Divergenz von \vec{B} bestimmen. Ähnlich hatten wir oben die Rotation und die Divergenz des elektrischen Feldes mit Hilfe des Coulomb-Gesetzes ermittelt.

Zunächst finden wir

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \vec{\nabla} \times \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \left[\underbrace{\left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{j}(\vec{r}')}_0 - \left(\vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla} \right) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \vec{j}(\vec{r}') \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}_{4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')} - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}')}_0 \right]. \end{aligned} \quad (5.84)$$

Den zweiten Term betrachten wir gesondert:

$$\begin{aligned} -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' (\vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} &= +\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' (\vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \left[\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \underbrace{\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}')}_{=-\frac{\partial \rho(\vec{r}')}{\partial t} = 0} \right], \end{aligned} \quad (5.85)$$

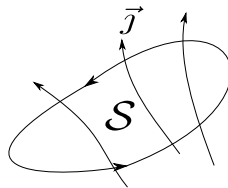
wobei wir die Bedingung der Magnetostatik ausgenutzt haben. Für den ersten Term wenden wir den Gaußschen Satz (für jede kartesische Komponente des vektorwertigen Integrals) an:

$$\dots = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint d\vec{s}' \cdot \vec{j}(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (5.86)$$

Dieses Oberflächenintegral verschwindet, wenn wir annehmen, dass keine Ströme ins Unendliche oder aus dem Unendlichen fließen. Damit verschwindet der gesamte zweite Term in Gl. (5.84) und wir erhalten

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \iiint dV' \vec{j}(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}). \quad (5.87)$$

Die *Wirbel* des \vec{B} -Feldes sind also in der Magnetostatik durch die Stromdichte gegeben. Dies ist das *Ampèresche Gesetz* in differentieller Form.



Wenn wir beide Seiten des Ampèreschen Gesetzes über eine berandete Fläche \mathcal{S} integrieren, erhalten wir

$$\iint_{\mathcal{S}} d\vec{s} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \iint_{\mathcal{S}} d\vec{s} \cdot \vec{j}. \quad (5.88)$$

Mit dem Stokesschen Satz folgt

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} d\vec{l} \cdot \vec{B} = \mu_0 \iint_{\mathcal{S}} d\vec{s} \cdot \vec{j}. \quad (5.89)$$

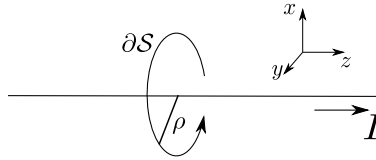
Die rechte Seite ist, bis auf den Faktor μ_0 , der Fluss von $\vec{j}(\vec{r})$ durch \mathcal{S} , also der elektrische *Strom* durch \mathcal{S} :

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} d\vec{l} \cdot \vec{B} = \mu_0 I_{\text{in}}. \quad (5.90)$$

Dies ist das Ampèresche Gesetz in Integralform. Die Referenzstromrichtung zur Festlegung des Vorzeichens von I_{in} gehorcht dabei der Rechte-Hand-Regel in Bezug auf die Richtung des Integrationsweges $\partial\mathcal{S}$.

Das Ampèresche Gesetz spielt offenbar in der Magnetostatik eine ähnliche Rolle wie das Gaußsche Gesetz in der Elektrostatik. Insbesondere können wir es verwenden, um \vec{B} für Situationen mit hoher Symmetrie einfach auszurechnen, ohne das Biot-Savart-Gesetz anwenden zu müssen.

■ Beispiel: \vec{B} für einen langen, geraden, stromführenden Draht.



Wir wählen eine „Ampèresche Schleife“ $\partial\mathcal{S}$ als Kreis mit dem Radius ρ , in einer Ebene senkrecht zum Draht und mit dem Mittelpunkt auf dem Draht. Es gilt

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} d\vec{l} \cdot \vec{B} = \mu_0 I. \quad (5.91)$$

Wegen der Rotationssymmetrie um die Drehachse ist $d\vec{l} \cdot \vec{B}$ konstant entlang $\partial\mathcal{S}$. Es ist

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} d\vec{l} \cdot \vec{B} = \int_0^{2\pi} d\varphi \rho \hat{\varphi} \cdot \vec{B} = \rho B_\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\rho B_\varphi \quad (5.92)$$

in Zylinderkoordinaten. Es folgt für die Tangentialkomponente

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho}. \quad (5.93)$$

Wir müssen noch erklären, wieso die übrigen Komponenten B_z und B_ρ verschwinden. Wegen der Translationssymmetrie entlang z müssen B_z und B_ρ unabhängig von z sein. Rotationssymmetrie um die z -Achse impliziert auch, dass B_z und B_ρ unabhängig von φ sind. Wir werden unten sehen, dass die Divergenz von \vec{B} verschwindet. Wir haben also

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho B_\rho + \frac{1}{\rho} \underbrace{\frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial B_z}{\partial z}}_{=0} = \frac{1}{\rho} B_\rho + \frac{\partial B_\rho}{\partial \rho} \quad (5.94)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial B_\rho}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} B_\rho \quad (5.95)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$B_\rho = \frac{b}{\rho} \quad \text{mit } b = \text{const.} \quad (5.96)$$

Aber $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ muss für alle \vec{r} gelten, also auch für $\rho = 0$. Daher muss \vec{B} dort insbesondere differenzierbar sein, was nur die Lösung $b = 0 \Rightarrow B_\rho = 0$ erlaubt. Die Rotation von \vec{B} ist nun

$$\mu_0 \vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \left(\frac{1}{\rho} \underbrace{\frac{\partial B_z}{\partial \varphi}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}}_{=0} \right) \hat{\rho} + \left(\underbrace{\frac{\partial B_\rho}{\partial z}}_{=0} - \frac{\partial B_z}{\partial \rho} \right) \hat{\varphi} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \rho B_\varphi - \underbrace{\frac{\partial B_\rho}{\partial \varphi}}_{=0} \right) \hat{z} = -\frac{\partial B_z}{\partial \rho} \hat{\varphi} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\mu_0 I}{2\pi}}_{=0}. \quad (5.97)$$

Für $\rho > 0$ ist $\vec{j} = 0$, also folgt

$$\frac{\partial B_z}{\partial \rho} = 0. \quad (5.98)$$

Aus Symmetrieüberlegungen wissen wir schon, dass $\partial B_z / \partial \varphi = \partial B_z / \partial z = 0$ ist. Also ist $B_z = \text{const}$ im Raum. Unter der plausiblen Annahme, dass \vec{B} weit entfernt vom Draht (also für $\rho \rightarrow \infty$) verschwindet, folgt, dass

$$B_z = 0 \quad (5.99)$$

im gesamten Raum ist.

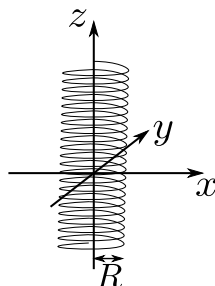
Es folgt das schon bekannte Ergebnis

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \hat{\varphi}. \quad (5.100)$$

In Analogie zum Gaußschen Gesetz in der Elektrostatik ist es in der Magnetostatik empfehlenswert, das Ampèresche Gesetz zu verwenden, sofern die Symmetrie des Systems hoch genug ist. Beachte die Möglichkeit, die vorgegebenen Ströme zunächst in Beiträge hoher Symmetrie zu zerlegen (Superpositionsprinzip). Das Ampèresche Gesetz erfordert im Gegensatz zum Gaußschen die Betrachtung von geschlossenen Kurven anstelle von Flächen.

5.4.1 Die ideale Spule

Wir betrachten eine lange, eng gewickelte Spule mit $n = dN/dl$ Windungen pro Längeneinheit und dem Radius R , die von einem Strom I durchflossen wird. Wir wollen das \vec{B} -Feld innerhalb und außerhalb der Spule bestimmen.



Wegen $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ haben wir $B_\rho = 0$. Wählen wir eine Ampèresche Schleife als Kreis um die z -Achse, so finden wir analog zum letzten Beispiel

$$B_\varphi = 0 \quad \text{für } \rho < R \quad (\text{im Inneren}) \quad (5.101)$$

und

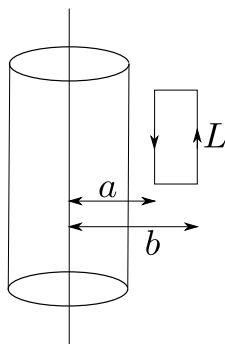
$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \quad \text{für } \rho > R \quad (\text{im Außenraum}). \quad (5.102)$$

Das ist einfach das vom Strom I erzeugte Feld, das man bei der idealisierten Betrachtung i. A. vernachlässigt. Bei einer doppelt gewickelten Spule ist der Nettostrom und damit B_φ ohnehin Null. Dies ist äquivalent dazu, den Strom durch eine *rein tangentielle* Flächenstromdichte

$$\vec{K}(\vec{r}) = nI \hat{\varphi} \quad (5.103)$$

zu ersetzen. Damit bleibt nur noch die z -Komponente übrig:

1. Fall: Außerhalb der Spule ergibt eine rechteckige Ampèresche Schleife:



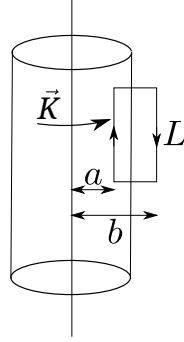
$$\oint d\vec{l} \cdot \vec{B} = B_z(b)L - B_z(a)L = \mu_0 I_{\text{in}} = 0 \quad (5.104)$$

$$\Rightarrow B_z(b) = B_z(a). \quad (5.105)$$

Da jedoch die Spule für große Abstände ρ wie ein dünner Draht erscheint, gilt $\lim_{\rho \rightarrow \infty} B_z(\rho) = 0$ und daher

$$B_z(\rho) = 0 \quad \forall \rho > R. \quad (5.106)$$

2. Fall: Innerhalb der Spule finden wir das Feld mit Hilfe einer Schleife, die die Drähte umschließt (beachte die Richtung):



$$\oint d\vec{l} \cdot \vec{B} = B_z(a)L - \underbrace{B_z(b)}_0 L = \mu_0 I_{\text{in}} = \mu_0 nLI \quad (5.107)$$

$$\Rightarrow B_z(a) = \mu_0 nI. \quad (5.108)$$

Damit finden wir für die ideale Spule

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \mu_0 nI \hat{z} & \text{für } \rho < R, \\ 0 & \text{für } \rho > R. \end{cases} \quad (5.109)$$

Das \vec{B} -Feld innerhalb der Spule ist also *homogen*.

5.5 Quellenfreiheit des Induktionsfeldes und Vektorpotential

Neben der Rotation können wir auch die Divergenz von \vec{B} aus dem Biot-Savart-Gesetz ermitteln:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{j}(\vec{r}'))}_{=0} - \vec{j}(\vec{r}') \cdot \left(\vec{\nabla} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.110)$$

Hier ist $\vec{\nabla} \times \vec{j}(\vec{r}') = 0$, da die Ableitung nach \vec{r} erfolgt, wovon $\vec{j}(\vec{r}')$ gar nicht abhängt. Weiter ist

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (5.111)$$

proportional zum statischen *elektrischen* Feld einer Punktladung bei \vec{r}' und daher wirbelfrei. Also verschwindet auch der zweite Term und es folgt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (5.112)$$

Das Induktionsfeld ist also quellenfrei. Diese Quellenfreiheit wird oft damit gleichgesetzt, dass die Feldlinien von \vec{B} nicht enden könnten; sie seien immer *geschlossene Kurven* oder reichten, für idealisierte Modellsysteme wie die ideale Spule, ins Unendliche. Das ist nicht immer korrekt. Eine Feldlinie lässt sich zum Beispiel dann

nicht immer sinnvoll fortsetzen, wenn sie zu einem Punkt mit $\vec{B} = 0$ führt. Ein Beispiel sind die Feldlinien auf der gemeinsamen Symmetrieachse eines Systems von zwei Spulen, die entgegengesetzt gleiche Felder erzeugen.

Man kann die Beziehung $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ als *Gaußsches Gesetz für die magnetische Induktion* deuten. Der Vergleich mit dem Gaußschen Gesetz für \vec{E} ,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (5.113)$$

legt nahe, das entsprechende Gesetz für \vec{B} als Ausdruck der Nichtexistenz *magnetischer Ladungen (Monopole)* zu interpretieren:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \mu_0 \rho_m = 0, \quad (5.114)$$

wobei ρ_m die magnetische Ladungsdichte ist. In der Tat wurden bisher keine magnetischen Monopole als fundamentale Teilchen entdeckt. Ihre Existenz wäre durchaus willkommen, denn Dirac hat gezeigt, dass aus der Existenz auch nur eines einzigen Monopols die Quantisierung der elektrischen Ladung (und auch der magnetischen Ladung) folgt. Das Argument ist relativ einfach, erfordert aber die Quantenmechanik.

Interessanterweise kommen magnetische Monopole sehr wohl als Anregungen bestimmter magnetischer Kristalle vor. Diese bezeichnet man als *Spin-Eis*. Beispiele sind die Verbindungen $\text{Ho}_2\text{Ti}_2\text{O}_7$ und $\text{Dy}_2\text{Ti}_2\text{O}_7$, beide mit sogenannter Pyrochlor-Gitterstruktur.

In Integralform lautet das Gaußsche Gesetz für die Induktion

$$\oiint_{\partial V} d\vec{s} \cdot \vec{B} = 0. \quad (5.115)$$

Also verschwindet der *magnetische Fluss*

$$\Phi_m = \iint d\vec{s} \cdot \vec{B} \quad (5.116)$$

durch jede *geschlossene* Oberfläche.

Aus $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ folgt, dass zu \vec{B} ein *Vektorpotential* \vec{A} existiert, so dass gilt

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (5.117)$$

vgl. Anhang [A.3.2](#). Dieses Feld \vec{A} nennt man einfach *das* Vektorpotential.

Man kann einen beliebigen Gradienten zu \vec{A} addieren, ohne das physikalisch relevante Feld \vec{B} zu ändern:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla}\chi) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\chi}_{=0} = \vec{B}. \quad (5.118)$$

Diese Freiheit bei der Wahl von \vec{A} ist eine *Eichinvarianz*, auf wir später zurück kommen werden. Wir setzen das Vektorpotential in die eben hergeleiteten Gesetze ein:

1. $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$ ist nun automatisch erfüllt.
2. $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$, also wird das Ampèresche Gesetz

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad (5.119)$$

oder äquivalent

$$\nabla^2 \vec{A} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\mu_0 \vec{j}. \quad (5.120)$$

Vergleiche die Poisson-Gleichung für das skalare Potential:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (5.121)$$

Die Eichinvarianz können wir dazu verwenden, die Gleichung für \vec{A} zu vereinfachen. Wir können nämlich *fordern*, dass

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (5.122)$$

gelten soll. Das ist eine Bestimmungsgleichung für das „Umeichfeld“ χ : Sei

$$\vec{A} = \vec{A}_0 + \vec{\nabla}\chi. \quad (5.123)$$

Aus $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ folgt

$$\nabla^2 \chi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0. \quad (5.124)$$

Diese Poisson-Gleichung für χ müssen wir lösen, um für gegebenes Vektorpotential \vec{A}_0 ein anderes zu finden, das $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ erfüllt. Dies ist immer möglich. Für freie Randbedingungen im Unendlichen ($\vec{A}, \vec{A}_0 \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$) ist die Lösung explizit

$$\chi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint dV' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}_0(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (5.125)$$

Die Bedingung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (5.126)$$

heißt *Coulomb-Eichung*. Nur unter Festlegung auf die Coulomb-Eichung gilt

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}. \quad (5.127)$$

Das ist nun ein Satz von drei Poisson-Gleichungen für die Komponenten von \vec{A} , die analog zur elektrischen Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.128)$$

sind. Falls \vec{j} für $r \rightarrow \infty$ schnell genug abfällt, insbesondere wenn die Ströme auf einen endlichen Bereich beschränkt sind, können wir die Poisson-Gleichung für \vec{A} analog zu der für ϕ lösen:

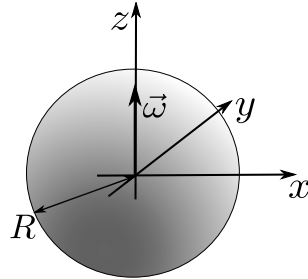
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (5.129)$$

Für Linien- und Flächenstromdichten erhalten wir natürlich

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dl' \frac{\vec{I}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (5.130)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint ds' \frac{\vec{K}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (5.131)$$

■ Beispiel: Vektorpotential für rotierende, gleichförmig geladene dünne Kugelschale.



Wir wählen $\hat{z} \parallel \vec{\omega}$. Die Flächenstromdichte ist

$$\vec{K}(\vec{r}') = \sigma \vec{v}(\vec{r}') = \sigma \vec{\omega} \times \vec{r}', \quad (5.132)$$

daraus folgt

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint ds' \frac{\sigma \vec{\omega} \times \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sigma \vec{\omega} \times \iint ds' \frac{\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (5.133)$$

Das Integral ist

$$\iint ds' \frac{\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = R \iint ds' \frac{\hat{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = R \iint \frac{d\vec{s}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (5.134)$$

Hier benötigen wir eine Variante des Gaußschen Satzes, die wir leicht durch partielle Integration herleiten können:

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{\nabla} f(\vec{r}) = \iiint_{\mathcal{V}} dV \mathbf{1} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r}) \stackrel{\text{partiell}}{=} \oint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} f(\vec{r}) - \iiint_{\mathcal{V}} dV (\vec{\nabla} \mathbf{1}) f(\vec{r}) = \oint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} f(\vec{r}). \quad (5.135)$$

Für unseren Fall folgt

$$\iint ds' \frac{\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \dots = R \iiint dV' \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = R \iiint dV' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (5.136)$$

Wenn wir hier R durch $\rho/4\pi\epsilon_0$ ersetzen, erhalten wir das Coulomb-Gesetz für das \vec{E} -Feld einer homogen geladenen Kugel. Dafür kennen wir die Lösungen schon (ermittelt z. B. mittels des Gaußschen Gesetzes):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r} & \text{für } r < R, \\ \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^3} \vec{r} & \text{für } r > R. \end{cases} \quad (5.137)$$

Daher ist (ersetze $\rho/4\pi\epsilon_0 \rightarrow R$):

$$\iint ds' \frac{\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{4\pi}{3} \vec{r} \begin{cases} R & \text{für } r < R, \\ \frac{R^4}{r^3} & \text{für } r > R. \end{cases} \quad (5.138)$$

Damit ist schließlich

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{3} \sigma \vec{\omega} \times \vec{r} \begin{cases} R & \text{für } r < R, \\ \frac{R^4}{r^3} & \text{für } r > R. \end{cases} \quad (5.139)$$

Das \vec{B} -Feld erhalten wir sofort aus $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Im Inneren der Kugel gilt z. B.

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0 \sigma R}{3} \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{\mu_0 \sigma R}{3} \left[\underbrace{(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega}}_0 - (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} + \vec{\omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) - \vec{r} \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega})}_0 \right] \\ &= \frac{\mu_0 \sigma R}{3} [-\vec{\omega} + 3\vec{\omega}] = \frac{2\mu_0 \sigma R}{3} \vec{\omega}. \end{aligned} \quad (5.140)$$

Das Feld im Inneren ist offensichtlich homogen.

5.5.1 Vektorpotential und magnetischer Fluss

Für eine beliebige geschlossene Kurve $\partial\mathcal{S}$ gilt

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} d\vec{l} \cdot \vec{A} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \iint_{\mathcal{S}} d\vec{s} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \iint_{\mathcal{S}} d\vec{s} \cdot \vec{B} \equiv \Phi_m, \quad (5.141)$$

dies ist der *magnetische Fluss* durch die Fläche \mathcal{S} . Dieser Zusammenhang hat interessante Konsequenzen: Wenn $\partial\mathcal{S}$ eine ideale Spule umschließt, ist Φ_m der Fluss im Inneren der Spule und damit

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} d\vec{l} \cdot \vec{A} = \Phi_m \neq 0. \quad (5.142)$$

Andererseits ist $\vec{B} = 0$ überall außerhalb der Spule und somit auch auf $\partial\mathcal{S}$. Anders als in \vec{B} , ist in \vec{A} die Information über das Vorhandensein der Spule enthalten. Eine Lösung für \vec{A} erhalten wir unter geeigneten Annahmen über die Symmetrie von \vec{A} aus dem Stokesschen Satz: Wähle $\partial\mathcal{S}$ als Kreis mit dem Radius r mit Mittelpunkt in der Spule. Dann ist

$$\Phi_m = \oint_{\partial\mathcal{S}} d\vec{l} \cdot \vec{A} = 2\pi r A_\varphi(\vec{r}) \quad (5.143)$$

$$\Rightarrow A_\varphi(\vec{r}) = \frac{\Phi_m}{2\pi r} \quad (5.144)$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\Phi_m}{2\pi r} \hat{\varphi} \quad (5.145)$$

außerhalb der Spule. Es wirkt merkwürdig, dass \vec{A} eine nichttriviale Ortsabhängigkeit hat, während \vec{B} identisch verschwindet. Hat \vec{A} irgendwelche beobachtbaren Konsequenzen? Das ist in der Tat der Fall. Die bekannteste

Wählen wir stattdessen $\hat{t} \times \hat{n} = \hat{K}$ und damit $\hat{t} \perp \vec{K}$, so folgt

$$\hat{K} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0. \quad (5.153)$$

Der zur Stromsicht tangente Anteil von \vec{B} senkrecht zu \vec{K} hat also einen Sprung um $\mu_0 K$, während der tangente Anteil parallel zu \vec{K} stetig ist:

$$\vec{B}_{2t} - \vec{B}_{1t} = \mu_0 K (\hat{K} \times \hat{n}) = \mu_0 \vec{K} \times \vec{n}. \quad (5.154)$$

Da die normale Komponente stetig ist, können wir zusammenfassend schreiben

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{K} \times \hat{n}. \quad (5.155)$$

Für das Vektorpotential \vec{A} gehen wir ganz ähnlich vor. Allgemein finden wir aber keine Bedingung für die Normalkomponente, da wir keine einfache Gleichung für $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ haben. Wählen wir aber die *Coulomb-Eichung*, so ist $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ und analog zum \vec{B} -Feld folgt

$$A_{2n} - A_{1n} = 0. \quad (5.156)$$

Für die Tangentialkomponenten gilt eichunabhängig

$$\oint d\vec{l} \cdot \vec{A} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \iint d\vec{s} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \iint d\vec{s} \cdot \vec{B} = \Phi_m \quad (5.157)$$

und, wenn wir die Stokessche Schleife klein machen, strebt der Fluss Φ_m gegen Null. Also erhalten wir

$$\vec{A}_{2t} - \vec{A}_{1t} = 0 \quad (5.158)$$

und damit (in Coulomb-Eichung)

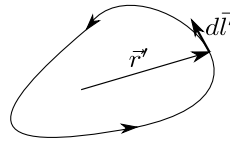
$$\vec{A}_2 - \vec{A}_1 = 0. \quad (5.159)$$

\vec{A} ist also stetig, wie das skalare Potential.

5.6 Multipolentwicklung

Für freie Randbedingungen $\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{A}(\vec{r}) = 0$ und räumlich begrenzte Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$ können wir analog zur Elektrostatik das Vektorpotential in Multipolbeiträge zerlegen. Für eine Stromschleife gilt (alles in diesem Abschnitt gesagt gilt auch für mehrere Stromschleifen, solange sie nur alle geschlossen sind)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (5.160)$$



Hier können wir $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ wie in Abschnitt 2.9.1 in eine Taylor-Reihe in r'/r entwickeln:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^k P_k(\cos \theta) \quad (5.161)$$

mit den Legendre-Polynomen $P_k(x)$. θ ist der von \vec{r} und \vec{r}' eingeschlossene Winkel. Dies ergibt

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left[\underbrace{\frac{1}{r} \oint d\vec{l}'}_0 + \frac{1}{r^2} \oint d\vec{l}' r' \cos \theta + \dots \right]. \quad (5.162)$$

Der Monopolterm verschwindet. Der führende Beitrag ist also der Dipolterm, sofern er nicht auch verschwindet. Er lautet

$$\vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} \oint d\vec{l}' r' \cos\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} \oint d\vec{l}' (\vec{r} \cdot \vec{r}'). \quad (5.163)$$

Die x -Komponente des Integrals ist

$$\begin{aligned} \hat{x} \cdot \oint d\vec{l}' (\vec{r} \cdot \vec{r}') &= \oint d\vec{l}' \cdot (\vec{r} \cdot \vec{r}') \hat{x} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \iint d\vec{s}' \cdot [\vec{\nabla}' \times (\vec{r} \cdot \vec{r}') \hat{x}] \\ &= \iint d\vec{s}' \cdot \left[\hat{y} \frac{\partial}{\partial z'} (\vec{r} \cdot \vec{r}') - \hat{z} \frac{\partial}{\partial y'} (\vec{r} \cdot \vec{r}') \right] = \iint d\vec{s}' \cdot (\hat{y} z - \hat{z} y) \quad \left| \text{da } \vec{r} \cdot \vec{r}' = xx' + yy' + zz' \right. \\ &= \iint (ds'_y z - ds'_z y) = \iint (d\vec{s}' \times \vec{r})_x = - \left(\vec{r} \times \iint d\vec{s}' \right)_x. \end{aligned} \quad (5.164)$$

Für alle Komponenten erhalten wir analog

$$\oint d\vec{l}' (\vec{r} \cdot \vec{r}') = -\vec{r} \times \iint d\vec{s}'. \quad (5.165)$$

Das Ergebnis lautet also

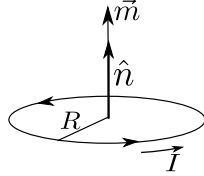
$$\vec{A}_1(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} \vec{r} \times \iint d\vec{s}' =: \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (5.166)$$

wobei wir das *magnetische Dipolmoment*

$$\vec{m} = I \iint d\vec{s}' \quad (5.167)$$

der Leiterschleife(n) definiert haben. Für eine *flache* Schleife ist das Integral $\iint d\vec{s}'$ der *Flächeninhalt* multipliziert mit dem Normaleneinheitsvektor, $A \hat{n}$. Das Dipolmoment einer kreisförmigen Leiterschleife mit dem Radius R beträgt also

$$\vec{m} = I \pi R^2 \hat{n}. \quad (5.168)$$



Typischerweise existieren nicht verschwindende höhere Multipolmomente. Einen magnetischen *Punktdipol* oder reinen magnetischen Dipol erhalten wir im Grenzfall Fläche $A \rightarrow 0$, Strom $I \rightarrow \infty$, wobei $\vec{m} = \text{const.}$ Vergleiche den reinen elektrischen Dipol: $d \rightarrow 0$, $q \rightarrow \infty$, wobei $\vec{p} = \text{const.}$

Das \vec{B} -Feld eines magnetischen Dipols lautet

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[-(\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{m} \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right]. \quad (5.169)$$

\vec{A} und daher auch \vec{B} sind singularär am Punkt $\vec{r} = 0$, den wir nun ausschließen. Der Ausdruck im zweiten Term ist

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = 4\pi \delta(\vec{r}) = 0 \quad \text{für } \vec{r} \neq 0. \quad (5.170)$$

Den ersten Term schreiben wir in kartesischen Komponenten:

$$-\sum_j m_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_i}{r^3} = -\sum_j m_j \frac{\delta_{ij} r^3 - x_i 3 r^2 \frac{x_j}{r}}{r^6} = -\sum_j m_j \left(\frac{\delta_{ij}}{r^3} - 3 \frac{x_i x_j}{r^5} \right) = 3 \sum_j \frac{x_i x_j m_j}{r^5} - \frac{m_i}{r^3}, \quad (5.171)$$

so dass folgt

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3 \vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{m})}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3 \hat{r} (\hat{r} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{r^3}. \quad (5.172)$$

Wir sehen, dass das magnetische Dipolfeld dieselbe Form hat wie das elektrische:

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \hat{r} (\hat{r} \cdot \vec{p}) - \vec{p}}{r^3}. \quad (5.173)$$

Kapitel 6

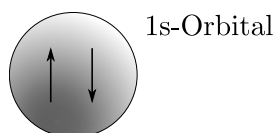
Makroskopische Magnetostatik

Magnetische Effekte in Materie sind sehr vielgestaltig. Sie sind Gegenstand aktueller Forschung in der experimentellen und theoretischen Physik. Das Verständnis der meisten magnetischen Eigenschaften erfordert eine quantenmechanische Beschreibung. Siehe dazu das Skript *Theory of Magnetism*, das allerdings eine Einführung in die Quantentheorie voraussetzt. In diesem Kapitel werden wir nur einige wichtige Konzepte anreißen.

Wir hatten gesehen, dass elektrische Ströme Magnetfelder hervorrufen. Können wir das Magnetfeld eines Stabmagneten auch auf Ströme zurückführen? Tatsächlich beruht dieses Feld zum (kleineren) Teil auf Elektronenströmen auf atomaren Längenskalen und zum (größeren) Teil auf der Rotation der Elektronen um die eigene Achse (ihrem *Spin*). Dass der letztere Effekt ein magnetisches Dipol und damit ein \vec{B} -Feld erzeugt, ist klassisch nicht zu verstehen, da Elektronen nach allen bisherigen Erkenntnissen punktförmig sind und das Dipolmoment einer rotierenden Kugel für verschwindenden Radius gegen Null geht.

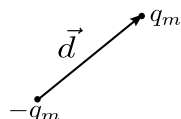
6.1 Magnetische Dipolmomente

Elementarteilchen, insbesondere Elektronen, tragen permanente *magnetische* Dipolmomente (magnetische Momente), aber, nach heutiger Kenntnis, keine *elektrischen* Dipolmomente. Daraus würde man zunächst schließen, dass magnetische Effekte in Materie weitaus stärker sein sollten, als man tatsächlich beobachtet. Die Ursache für die Abschwächung liegt wieder in der Quantenmechanik: zwei Elektronen mit *entgegengesetzten* magnetischen Dipolmomenten (und Spins) besetzen typischerweise ein Orbital, so dass sich die Dipolmomente vektoriell zu Null addieren.



6.1.1 Permanente magnetische Momente

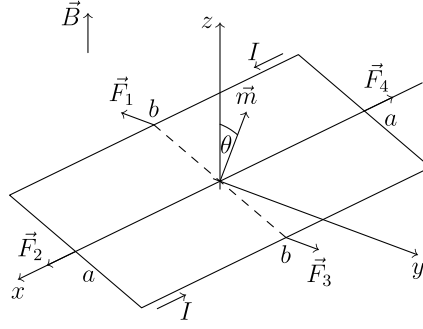
Wir können einen magnetischen Punktdipol analog zu einem elektrischen (Abschnitt 4.1.2) durch zwei magnetische Monopole $\pm q_m$ im Abstand d darstellen, wobei $q_m \rightarrow \infty$ und $d \rightarrow 0$ mit $m = q_m d = \text{const.}$ Das ist natürlich nur ein günstiges *effektives Modell*, keine *mikroskopische* Beschreibung wirklicher Dipole.



Damit finden wir für das *Drehmoment* auf einen magnetischen Dipol, analog zum elektrischen Fall,

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}. \quad (6.1)$$

Eine physikalisch befriedigendere Darstellung eines Dipols verwendet eine kleine Leiterschleife:



Das Drehmoment auf diese Leiterschleife hatten wir bereits in Abschnitt 5.2.2 berechnet:

$$\vec{M} = abI \hat{n} \times \vec{B}. \quad (6.2)$$

Num ist $\vec{m} = Iab \hat{n}$ das magnetische (Dipol-) Moment und damit wieder

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}. \quad (6.3)$$

Dieses Drehmoment ist bestrebt, das magnetische Moment parallel zu \vec{B} auszurichten. Im stationären Zustand erwarten wir daher eine magnetische Polarisierung (*Magnetisierung*) in der Richtung von \vec{B} . Eine Magnetisierung in Feldrichtung nennt man *Paramagnetismus*.

Mittels des Modells der (infinitesimalen) Leiterschleife können wir auch die *Kraft* auf einen Dipol in einem *inhomogenen* \vec{B} -Feld berechnen:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 \\ &= Ib \hat{x} \times \vec{B}_1 + Ia(\hat{y} \cos \theta - \hat{z} \sin \theta) \times \vec{B}_2 + Ib(-\hat{x}) \times \vec{B}_3 + Ia(-\hat{y} \cos \theta + \hat{z} \sin \theta) \times \vec{B}_4 \\ &= Ib(-\hat{x}) \times (\vec{B}_3 - \vec{B}_1) + Ia(-\hat{y} \cos \theta + \hat{z} \sin \theta) \times (\vec{B}_4 - \vec{B}_2). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Hier ist \vec{B}_i das über die Kante i gemittelte Induktionsfeld. Für eine infinitesimale Leiterschleife bzw. ein sich im Raum hinreichend langsam änderndes Feld gilt

$$\vec{B}_3 - \vec{B}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{pmatrix} a (\hat{y} \cos \theta - \hat{z} \sin \theta) = a \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \cos \theta - \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \sin \theta \right), \quad (6.5)$$

$$\vec{B}_4 - \vec{B}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{pmatrix} b(-\hat{x}) = -b \frac{\partial \vec{B}}{\partial x}. \quad (6.6)$$

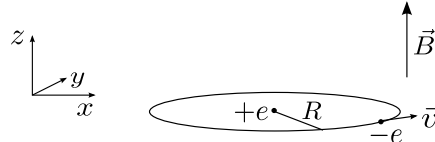
Es folgt

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= -\underbrace{Iab}_m \hat{x} \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \cos \theta - \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \sin \theta \right) - \underbrace{Iab}_m (-\hat{y} \cos \theta + \hat{z} \sin \theta) \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \\
&= -m \left(\cos \theta \hat{x} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} - \sin \theta \hat{x} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} - \cos \theta \hat{y} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + \sin \theta \hat{z} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \right) \\
&= -m \left(\frac{\partial}{\partial y} \cos \theta \hat{x} \times \vec{B} - \frac{\partial}{\partial z} \sin \theta \hat{x} \times \vec{B} - \frac{\partial}{\partial x} \cos \theta \hat{y} \times \vec{B} + \frac{\partial}{\partial x} \sin \theta \hat{z} \times \vec{B} \right) \\
&= -m \left[\frac{\partial}{\partial y} \cos \theta (-\hat{y} B_z + \hat{z} B_y) - \frac{\partial}{\partial z} \sin \theta (-\hat{y} B_z + \hat{z} B_y) - \frac{\partial}{\partial x} \cos \theta (-\hat{x} B_z + \hat{z} B_x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x} \sin \theta (-\hat{x} B_y + \hat{y} B_x) \right] \\
&= - \left[\frac{\partial}{\partial y} m_z (-\hat{y} B_z + \hat{z} B_y) - \frac{\partial}{\partial z} m_y (-\hat{y} B_z + \hat{z} B_y) - \frac{\partial}{\partial x} m_z (-\hat{x} B_z + \hat{z} B_x) + \frac{\partial}{\partial x} m_y (-\hat{x} B_y + \hat{y} B_x) \right] \\
&= \underbrace{\left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right)}_{\vec{\nabla}} (m_y B_y + m_z B_z) \\
&\quad - \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} m_y B_y - \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} m_z B_z - \hat{z} \frac{\partial}{\partial y} m_z B_y - \hat{y} \frac{\partial}{\partial z} m_y B_z - \hat{z} \frac{\partial}{\partial x} m_z B_x - \hat{y} \frac{\partial}{\partial x} m_y B_x \\
&= \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}) - \underbrace{\vec{m}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}_0 = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}). \tag{6.7}
\end{aligned}$$

Ist der magnetische Dipol \vec{m} parallel (antiparallel) zum \vec{B} -Feld ausgerichtet, so zeigt die Kraft \vec{F} in Richtung des stärkeren (schwächeren) \vec{B} -Feldes. Wenn sich ein permanenter magnetischer Dipol also parallel zum Feld ausrichtet, wird er danach ins Feld hineingezogen. Dieses Verhalten können wir mit zwei Permanentmagneten leicht beobachten.

6.1.2 Induzierte magnetische Momente

Zur Abschätzung des *induzierten* magnetischen Dipolmoments eines Atoms führen wir ein neues, sehr grobes, Atommodell ein: Elektronen umlaufen den Kern auf Kepler-Bahnen. Wir beschränken uns auf ein Wasserstoff-Atom und eine Kreisbahn:



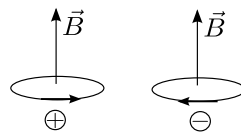
Ohne \vec{B} -Feld zwingt die Coulomb-Kraft das Elektron auf eine Kreisbahn. Daher ist die Coulomb-Kraft mit der Zentripetalkraft identisch:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2} = \frac{m_e v_0^2}{R}. \tag{6.8}$$

\vec{v}_0 ist die Geschwindigkeit für $\vec{B} = 0$. Im \vec{B} -Feld kommt die magnetische Lorentz-Kraft hinzu. Wir nehmen hier der Einfachheit halber an, dass die Bahn in der Ebene senkrecht zu \vec{B} liegt. Dies reicht aus, um den Effekt qualitativ zu verstehen. Für eine quantitative Berechnung ist das Modell ohnehin zu stark vereinfacht. Die Gesamtkraft lautet nun

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2} \pm evB = \frac{m_e v^2}{R}. \tag{6.9}$$

Das Vorzeichen hängt von der Bewegungsrichtung ab (beachte $q = -e < 0$):



Je nach der Bewegungsrichtung wird die Zentralkraft also verstärkt oder abgeschwächt. Es folgt

$$evB = \pm \left(\frac{m_e v^2}{R} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2} \right) = \pm \left(\frac{m_e v^2}{R} - \frac{m_e v_0^2}{R} \right) = \pm \frac{m_e}{R} (v^2 - v_0^2) = \pm \frac{m_e}{R} (v + v_0)(v - v_0). \quad (6.10)$$

Ist nun die Änderung $\Delta v := v - v_0$ der Geschwindigkeit klein, $|\Delta v| \ll v_0$, was für realistische Induktionsfelder sehr gut erfüllt ist, so folgt

$$ev_0 B \cong \pm \frac{m_e}{R} 2v_0 \Delta v \quad (6.11)$$

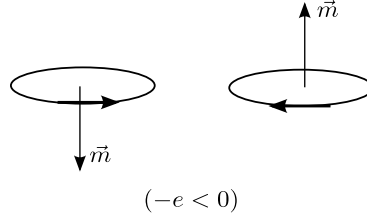
$$\Rightarrow \Delta v \cong \pm \frac{eRB}{2m_e}. \quad (6.12)$$

Ist die Umlaufzeit $T = 2\pi R/v$ klein im Vergleich zu experimentellen Zeitskalen, d. h. läuft das Elektron während der Messung sehr oft um, so kann man das Elektron durch einen stationären Kreisstrom annähern. Dann gilt die Magnetostatik. Die Stromstärke (oder Linienstromdichte) ist

$$I = \pm \frac{-e}{T} = \mp \frac{ev}{2\pi R} \quad (6.13)$$

und das Dipolmoment

$$\vec{m} = \pi R^2 I \hat{z} = \pi R^2 \left(\mp \frac{ev}{2\pi R} \right) \hat{z} = \mp \frac{evR}{2} \hat{z}. \quad (6.14)$$



Das Dipolmoment ändert sich im \vec{B} -Feld also um

$$\Delta \vec{m} = \mp \frac{e \Delta v R}{2} \hat{z} \cong \mp \pm \frac{eR}{2} \frac{eRB}{2m_e} \hat{z} = - \frac{e^2 R^2 B}{4m_e} \hat{z} = - \frac{e^2 R^2}{4m_e} \vec{B}. \quad (6.15)$$

Das wesentliche Ergebnis ist, dass $\Delta \vec{m}$ *antiparallel* zum \vec{B} -Feld steht. Beachte, dass dieses Ergebnis unabhängig davon ist, ob das Elektron links- oder rechts herum läuft. (Wir haben angenommen, dass der Bahnradius R mit und ohne \vec{B} -Feld gleich ist. Ebenso gut hätten wir annehmen können, dass die Geschwindigkeit gleich bleibt und sich stattdessen der Radius ändert. Dies führt auf ein um einen Faktor 2 größeres Ergebnis für $\Delta \vec{m}$. Qualitativ bleibt die Schlussfolgerung aber bestehen. Für quantitative Aussagen ist das verwendete Atommodell ohnehin zu primitiv.)

Für $\vec{B} = 0$ erwarten wir, dass die Elektronenbahnen zufällig orientiert sind. Das *mittlere* Dipolmoment einer Probe ist dann $\langle \vec{m}_0 \rangle = 0$. Für $\vec{B} \neq 0$ finden wir daher

$$\langle \vec{m} \rangle = \langle \Delta \vec{m} \rangle = - \frac{e^2 R^2}{4m_e} \vec{B}, \quad (6.16)$$

antiparallel zu \vec{B} . Die induzierten magnetischen Dipolmomente der Atome sind also antiparallel zu \vec{B} . Dieses Phänomen nennt man *Diamagnetismus*. Beachte, dass der Diamagnetismus auf der Bahnbewegung der Elektronen beruht – die permanenten magnetischen Momente der Elektronen haben wir hier gar nicht beachtet. Im Vergleich dazu zeigen induzierte atomare *elektrische* Dipolmomente immer in *dieselbe* Richtung wie das \vec{E} -Feld, siehe Abschnitt 4.1.1. In realen Materialien tragen verschiedene para- und diamagnetische Beiträge zur Magnetisierung bei und es ist nicht trivial, magnetische Eigenschaften zu berechnen.

6.2 Magnetisierung von Materie

Analog zur elektrischen Polarisation \vec{P} definieren wir die *Magnetisierung* (oder magnetische Polarisation) \vec{M} als magnetisches Dipolmoment pro Volumen,

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}. \quad (6.17)$$

Ist $\vec{M} \neq 0$, auch wenn kein \vec{B} -Feld anliegt, so spricht man von einem *Permanentmagneten* und bezeichnet das Material als *ferromagnetisch* (oder ferrimagnetisch, s. u.). Ist dagegen $\vec{M} = 0$ in Abwesenheit eines angelegten Feldes, so können wir i. A. \vec{M} in eine Taylor-Reihe in \vec{B} entwickeln und finden in führender Ordnung eine lineare Abhängigkeit. Vereinfachend unterscheidet man folgende Arten von Materie hinsichtlich ihrer magnetischen Eigenschaften:

1. $\vec{M} = 0$ für verschwindendes angelegtes Feld, $\vec{B} = 0$, \vec{M} parallel zu \vec{B} für $\vec{B} \neq 0$: *Paramagnet*. Beispiele: einfache Metalle, (Na, K, Al, ...), die meisten Metalle und Isolatoren mit teilweise gefüllten 3d, 4d, 5d, 4f, 5f Schalen und daher permanenten magnetischen Momenten, organische Radikale (Moleküle mit ungepaarten Elektronen) und O₂. Molekularer Sauerstoff ist paramagnetisch, weil das O₂-Molekül ein permanentes magnetisches Dipolmoment hat. Ausgehend von elementarer (Schul-) Chemie ist das überraschend; in der üblichen Darstellung



scheinen alle Elektronen gepaart zu sein. Tatsächlich enthält O₂ aber zwei ungepaarte Elektronen in antibindenden π_{2p}^* -Orbitalen.

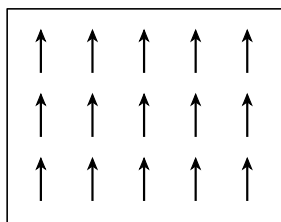
Paramagneten werden wegen

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}) \quad (6.18)$$

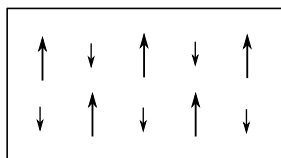
in ein inhomogenes \vec{B} -Feld hineingezogen.

Zum Vergleich: $\vec{P} = 0$ für $\vec{E} = 0$, \vec{P} parallel zu \vec{E} für $\vec{E} \neq 0$, definiert ein (isotropes) Dielektrikum. Dieses könnte man logischer als „Parelektrikum“ bezeichnen.

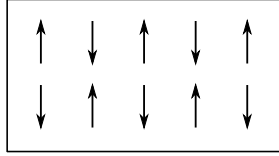
2. $\vec{M} = 0$ für $\vec{B} = 0$, \vec{M} antiparallel zu \vec{B} für $\vec{B} \neq 0$: *Diamagnet*. Beispiele: Edelgase, Edelmetalle, (Au, Ag, Cu), Hg, Bi, die meisten abgesättigten kovalent gebundenen Materialien, insbesondere die meisten organischen Materialien und H₂O, daher auch organisches Gewebe. Supraleiter sind *sehr starke* Diamagneten. Wegen $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B})$ werden Diamagneten aus einem inhomogenen \vec{B} -Feld *herausgedrängt*. Dies führt zu dem bekannten Phänomen der Levitation von Supraleitern und erklärt auch die Levitation von lebenden Fröschen (organisches Gewebe!) in sehr starken Magnetfeldern.
3. $\vec{M} \neq 0$ für $\vec{B} = 0$, mikroskopische magnetische Momente von Atomen/ Ionen parallel ausgerichtet: *Ferromagnet*. Beispiele: Fe, Co, Ni, Gd (bei tiefen Temperaturen), CrO₂, MnBi, Cu₂MnSn und weitere sogenannte Heusler-Verbindungen, ...



4. $\vec{M} \neq 0$ für $\vec{B} = 0$, mikroskopische magnetische Momente nicht alle parallel ausgerichtet: *Ferrimagnet*. Beispiele: Fe₃O₄ (Magnetit), Y₃Fe₂(FeO₄)₃ (Yttrium-Eisen-Granat, YIG), verschiedene Metalloxide, ...



5. $\vec{M} = 0$ für $\vec{B} = 0$, mikroskopische magnetische Momente existieren und sind geordnet, kompensieren sich aber: *Antiferromagnet*. Beispiele: Cr, FeMn, NiO, FeSe, YBa₂Cu₃O₇, LaFeAsO, ...



Wir betrachten nun das Feld eines magnetisierten Körpers. Das Vektorpotential eines infinitesimalen Dipolmoments $d\vec{m}$ am Ort \vec{r} ist gemäß Gl. (5.166)

$$d\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (6.19)$$

Das gesamte Vektorpotential eines magnetisierten Körpers ist daher

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{d\vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} dV' \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (6.20)$$

Analog zur Darstellung des \vec{E} -Feldes oder skalaren Potentials eines polarisierten Körpers durch gebundene Ladungen können wir \vec{A} durch gebundene Ströme ausdrücken: Es ist

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} dV' \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} dV' \vec{\nabla}' \times \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} dV' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}') \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s}' \times \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} dV' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}'), \end{aligned} \quad (6.21)$$

wobei wir eine Variante des Gaußschen Satzes verwendet haben. Wir schreiben dies als

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s}' \frac{\vec{K}_g(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} dV' \frac{\vec{j}_g(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (6.22)$$

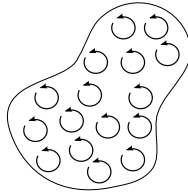
mit dem *gebundenen Oberflächenstrom*

$$\vec{K}_g := \vec{M} \times \hat{n} \quad (6.23)$$

und dem *gebundenen Volumenstrom*

$$\vec{j}_g := \vec{\nabla} \times \vec{M}. \quad (6.24)$$

Diese gebundenen Ströme sind, wie gebundene Ladungen, auf atomare Größenordnungen beschränkt.



Beachte auch die Identität

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_g = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}) = 0. \quad (6.25)$$

Die Kontinuitätsgleichung zeigt also, dass der gebundene Volumenstrom keine Ladungen anhäufen kann. An der Oberfläche muss man sowohl \vec{K}_g als auch \vec{j}_g beachten, um zu sehen, dass keine Ladungen angehäuft werden. Aus $\vec{A}(\vec{r})$ erhalten wir sofort

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s}' \vec{\nabla} \times \frac{\vec{K}_g(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} dV' \vec{\nabla} \times \frac{\vec{j}_g(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s}' \vec{K}_g(\vec{r}') \times \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} dV' \vec{j}_g(\vec{r}') \times \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= +\frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s}' \vec{K}_g(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} dV' \vec{j}_g(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Die beiden Terme haben die Form des Biot-Savart-Gesetzes für Flächen- bzw. Volumenstromdichten, siehe Abschnitt 5.3.

Für gegebene Magnetisierung \vec{M} ist die Bestimmung von \vec{A} und \vec{B} damit auf ein bekanntes Problem zurückgeführt.

■ Beispiel: gleichförmig magnetisierte Kugel. Sei $\vec{M} = M\hat{z}$. Die gebundenen Ströme sind

$$\vec{j}_g = \vec{\nabla} \times \vec{M} = 0, \quad (6.27)$$

$$\vec{K}_g = \vec{M} \times \hat{n} = M\hat{z} \times \hat{r} = M \sin \theta \hat{\phi}. \quad (6.28)$$

Vergleiche das schon behandelte Beispiel einer rotierenden dünnen Kugelschale. Dort war

$$\vec{K} = \sigma \vec{\omega} \times \vec{r} = \sigma \omega R \hat{z} \times \hat{r} = \sigma \omega R \sin \theta \hat{\phi}. \quad (6.29)$$

Wir können also das Ergebnis mittels der Ersetzung $\sigma \vec{\omega} \rightarrow \vec{M}/R$ übertragen:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{3} \vec{M} \times \vec{r} \begin{cases} 1 & \text{für } r < R, \\ R^3 & \\ \frac{1}{r^3} & \text{für } r > R \end{cases} \quad (6.30)$$

und im Inneren finden wir das homogene Feld

$$\vec{B} = \frac{2\mu_0}{3} \vec{M} = \text{const.} \quad (6.31)$$

Vergleiche das \vec{E} -Feld im Inneren einer gleichförmig polarisierten Kugel; es ist ebenfalls homogen.

6.3 Das Magnetfeld \vec{H}

Die folgende Diskussion ist weitgehend analog zur Motivation des Verschiebungsfeldes \vec{D} in Abschnitt 4.3. Die totale Stromdichte setzt sich i. A. aus gebundenen und freien Strömen zusammen:

$$\vec{j} = \vec{j}_g + \vec{j}_f. \quad (6.32)$$

Sie erzeugt das Induktionsfeld \vec{B} gemäß des Ampèreschen Gesetzes

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} = \vec{j}_g + \vec{j}_f = \vec{\nabla} \times \vec{M} + \vec{j}_f. \quad (6.33)$$

Es folgt

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) = \vec{j}_f. \quad (6.34)$$

Wir definieren das *Magnetfeld*

$$\vec{H} := \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}, \quad (6.35)$$

und erhalten das Ampèresche Gesetz für \vec{H} :

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_f, \quad (6.36)$$

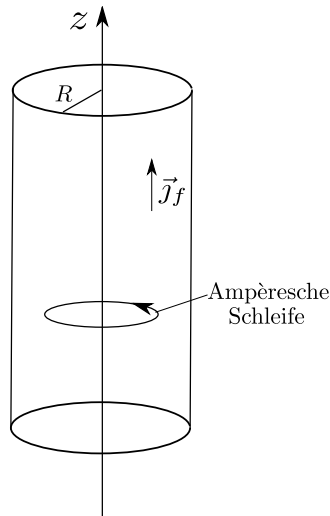
die Wirbel des Magnetfeldes sind nur die *freien* Ströme. In Integralform:

$$\oint_{\partial S} d\vec{l} \cdot \vec{H} = I_{f, \text{in}}. \quad (6.37)$$

Das Magnetfeld \vec{H} ist also analog zum Verschiebungsfeld $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ in der Elektrostatik. Die *fundamentalen* Felder sind \vec{E} und \vec{B} . Daher ist die historisch entstandene Bezeichnung von \vec{H} und nicht \vec{B} als „Magnetfeld“ unglücklich.

Es ist aber leicht zu verstehen, warum früher und in der Experimentalphysik noch heute oft \vec{E} und \vec{H} angegeben werden. In Experimenten kennt man i. A.

- die angelegte Spannung und daraus das elektrische Feld \vec{E} ,
- den fließenden *freien* Strom und daraus das Magnetfeld \vec{H} .
- Beispiel: \vec{H} -Feld für einen dicken Kupferdraht mit gleichförmigem freiem Strom I_f .



Aus Symmetriegründen ist \vec{H} tangential:

$$\vec{H} = H_\varphi \hat{\varphi}. \quad (6.38)$$

Das Ampèresche Gesetz für \vec{H} ergibt

$$\oint_{\partial S} d\vec{l} \cdot \vec{H} = \iint_S d\vec{s} \cdot \vec{j}_f \quad (6.39)$$

$$\Rightarrow 2\pi\rho H_\varphi = \begin{cases} \pi\rho^2 j_f & \text{für } \rho \leq R, \\ \pi R^2 j_f & \text{für } \rho > R. \end{cases} \quad (6.40)$$

Der gesamte freie Strom ist

$$I_f = \pi R^2 j_f, \quad (6.41)$$

woraus folgt

$$2\pi\rho H_\varphi = \begin{cases} \frac{\rho^2}{R^2} I_f & \text{für } \rho \leq R, \\ I_f & \text{für } \rho > R \end{cases} \quad (6.42)$$

$$\Rightarrow H_\varphi = \frac{I_f}{2\pi} \begin{cases} \frac{\rho}{R^2} & \text{für } \rho \leq R, \\ \frac{1}{\rho} & \text{für } \rho > R. \end{cases} \quad (6.43)$$

Im Außenraum ist $\vec{M} = 0$ und daher

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \frac{\mu_0}{2\pi} I_f \frac{1}{\rho} \hat{\varphi}, \quad (6.44)$$

wie für einen dünnen Draht. Im Inneren können wir \vec{B} nicht ohne weitere Informationen, insbesondere über den Zusammenhang von \vec{M} mit \vec{B} oder \vec{H} , bestimmen. Für Kupfer ist \vec{M} allerdings klein im Vergleich zu $\mu_0 \vec{H}$.

Analog zur Elektrostatik reicht der Zusammenhang

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_f \quad (6.45)$$

i. A. nicht aus, um \vec{H} zu bestimmen. Im Beispiel war das nur aufgrund der hohen Symmetrie möglich. Allgemein ist

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}}_0 - \vec{\nabla} \cdot \vec{M} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} \quad (6.46)$$

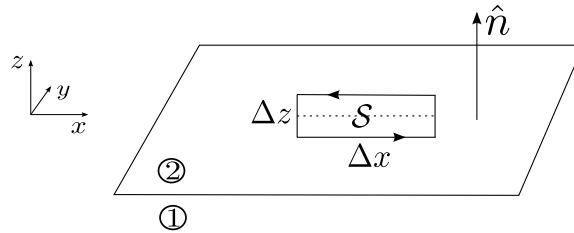
von Null verschieden. Beispiel: ein Stabmagnet hat $\vec{j}_f \equiv 0$ aber offensichtlich im Außenraum $\vec{B} \neq 0$ und damit $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 \neq 0$.

Analog zu \vec{E} und \vec{D} können wir auch für \vec{B} und \vec{H} Anschlussbedingungen an der Grenzfläche zwischen zwei Medien (evtl. Vakuum) herleiten. Das Ergebnis ist, hier ohne Beweis,

$$B_{n2} - B_{n1} = 0, \quad (6.47)$$

oder äquivalent $H_{n2} - H_{n1} = -(M_{n2} - M_{n1})$, und

$$\vec{H}_{t2} - \vec{H}_{t1} = \vec{K}_f \times \hat{n}. \quad (6.48)$$



6.4 Lineare Medien

Für Paramagneten und Diamagneten kann man \vec{M} für kleine \vec{B} entwickeln. Für nicht zu großes \vec{B} -Feld ist die Magnetisierung also linear in \vec{B} . In Analogie zur Beziehung $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ wäre es also naheliegend, diese Proportionalität als

$$\vec{M} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\mu_0} \chi_m \vec{B} \quad (6.49)$$

zu schreiben. Da \vec{H} experimentell besser zugänglich ist als \vec{B} , tut man das aber nicht, sondern schreibt stattdessen

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (6.50)$$

mit der *magnetischen Suszeptibilität* χ_m . Es folgt

$$\vec{B} \equiv \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}. \quad (6.51)$$

χ_m ist i. A. ein Tensor, aber wir betrachten hier nur den isotropen Fall, in dem χ_m als Skalar aufgefasst werden kann. Dann ist

$$\vec{H} = \frac{1}{1 + \chi_m} \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (6.52)$$

$$\Rightarrow \vec{M} = \chi_m \vec{H} = \frac{\chi_m}{1 + \chi_m} \frac{\vec{B}}{\mu_0}. \quad (6.53)$$

Es ist $\chi_m > 0$ für Paramagneten (\vec{M} zeigt in dieselbe Richtung wie \vec{B}) und $\chi_m < 0$ für Diamagneten (\vec{M} ist antiparallel zu \vec{B}). Man kann zeigen, dass χ_m nicht kleiner als -1 sein kann und den extremen Wert $\chi_m = -1$ nur für Supraleiter annimmt, in welchem Fall offenbar $\vec{B} = 0$ für beliebiges \vec{H} gilt. Wir definieren noch

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} =: \mu \vec{H} \quad (6.54)$$

mit der *Permeabilität* $\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$. Man verwendet auch die *relative Permeabilität*

$$\mu_r := \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m. \quad (6.55)$$

■ Beispiel: ideale Spule, gefüllt mit linearem Medium. Analog zur luftgefüllten Spule erhalten wir im Inneren

$$\vec{H} = n I_f \hat{z} \quad (6.56)$$

(n ist die Zahl der Windungen pro Länge). Es folgt

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0(1 + \chi_m) n I_f \hat{z}. \quad (6.57)$$

Für Paramagneten ist das Feld *vergrößert*. Das kann man mit Hilfe des gebundenen Oberflächenstromes verstehen:

$$\vec{K}_g = \vec{M} \times \hat{n} = \chi_m \vec{H} \times \hat{n} = \chi_m n I_f \hat{z} \times \hat{\rho} = \chi_m n I_f \hat{\phi}. \quad (6.58)$$

Dieser fließt in *dieselbe* Richtung wie der freie Strom und verstärkt so das \vec{B} -Feld.

Kapitel 7

Lineare Leiter in statischen Feldern

In diesem kurzen Kapitel kommen wir auf Leiter zurück. In Abschnitt 2.6 hatten wir den stationären Zustand im statischen elektrischen Feld betrachtet. Die Leiter waren von der Quelle des Feldes elektrisch isoliert. In dieser Situation werden im Leiter Ladungen getrennt, die sich an seiner Oberfläche ansammeln, aber es fließt im stationären Zustand kein Strom mehr. Ein ganz anderer Fall liegt vor, wenn das elektrische Feld im Inneren des Leiters durch eine Spannungsquelle aufrecht erhalten wird. Dann wird der stromlose Zustand nie erreicht, auch wenn wir beliebig lange warten.

In einem *idealen* Leiter würden die Ladungsträger unbegrenzt beschleunigt, die Stromdichte sollte also immer weiter anwachsen. Diese freie Beschleunigung lässt sich leicht mittels einer Materialgleichung ausdrücken. Die Ergebnisse gelten allgemein für ideale Leiter, wir formulieren sie aber konkret für Supraleiter. Für die (Supra-) Stromdichte gilt, bei homogener Ladungsdichte ρ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{j}_s = \underbrace{qn_s}_{\rho} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = qn_s \frac{\vec{F}_{\text{el}}}{m} = n_s \frac{q^2}{m} \vec{E}. \quad (7.1)$$

Hier sind n_s die Konzentration, q die Ladung und m die Masse der die Supraleitung tragenden Ladungsträger. Dies sind Elektronen, also $q = -e$ und

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{j}_s = n_s \frac{e^2}{m} \vec{E}. \quad (7.2)$$

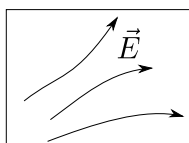
Dies ist die *erste London-Gleichung*. Das unbegrenzte Anwachsen des Stromes erscheint unphysikalisch. Durch eine sorgfältige *elektrodynamische* Betrachtung lässt sich das Problem auflösen. (Nehmen wir statt Elektronen Cooper-Paare als Ladungsträger an – wofür die Gebrüder London noch keinen Anlass hatten – so ändert sich das Ergebnis nicht. In $n_s q^2/m$ werden q und m verdoppelt und n_s halbiert.)

Nicht ideale Leiter, wie normalleitende Metalle, setzen einem Strom einen Widerstand entgegen – wir wissen aus Erfahrung, dass sich stromdurchflossene Leiter erwärmen, also wird in ihnen Energie dissipiert. Daher erwarten wir, dass sich für $t \rightarrow \infty$ eine *stationäre Stromdichte* $\vec{j} \neq 0$ einstellt. Die Ladungsträger sind dann natürlich nicht in Ruhe. Dies ist die im Rahmen der Magnetostatik beschriebene Situation. Wir sehen also, dass in der Magnetostatik (und noch allgemeiner in der Elektrodynamik) in Leitern i. A. $\vec{E} \neq 0$ und $\vec{j} \neq 0$ gilt.

Im Folgenden betrachten wir zunächst den Fall, dass nur ein externes elektrisches Feld im Leiter aufrecht erhalten wird. Anschließend untersuchen wir Leiter in koexistierenden \vec{E} - und \vec{B} -Feldern.

7.1 Das Ohmsche Gesetz

Wir betrachten einen Leiter mit einem nicht unbedingt gleichförmigen, aber statischen \vec{E} -Feld.



Das \vec{E} -Feld beschleunigt die Ladungsträger gemäß der Newton-Gleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = q\vec{E}. \quad (7.3)$$

In einem nicht idealen Leiter wirkt aber zusätzlich eine Reibungskraft aufgrund der Streuung der Ladungsträger an Gitterdefekten und Gitterschwingungen (Phononen), also lautet die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = q\vec{E} - \alpha\dot{\vec{r}} \quad (7.4)$$

oder

$$m\dot{\vec{v}} = q\vec{E} - \alpha\vec{v} \quad (7.5)$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{v}} + \alpha\vec{v} = \frac{q}{m}\vec{E}. \quad (7.6)$$

Wir nehmen nun der Einfachheit halber an, dass \vec{E} homogen ist und lösen diese Gleichung mit dem Ansatz

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_\infty + \vec{\omega} e^{-\lambda t}. \quad (7.7)$$

Einsetzen ergibt

$$-\lambda m \vec{\omega} e^{-\lambda t} + \alpha \vec{v}_\infty + \alpha \vec{\omega} e^{-\lambda t} = q \vec{E} \quad (7.8)$$

$$\Rightarrow \vec{v}_\infty = \frac{q\vec{E}}{\alpha} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{\alpha}{m}. \quad (7.9)$$

Die allgemeine Lösung ist damit

$$\vec{v}(t) = \frac{q\vec{E}}{\alpha} + \vec{\omega} \exp\left(-\frac{\alpha t}{m}\right). \quad (7.10)$$

Im stationären Zustand für $t \rightarrow \infty$ ist die Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \vec{v}_\infty = \frac{q\vec{E}}{\alpha}. \quad (7.11)$$

Ist die *Konzentration* der Ladungsträger n und ihre Ladungsdichte daher $\rho = qn$, so ist die Stromdichte

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = \rho \frac{q\vec{E}}{\alpha} = \frac{q^2 n}{\alpha} \vec{E}. \quad (7.12)$$

Sie ist also *linear* im Feld \vec{E} . Die Proportionalitätskonstante ist die *Leitfähigkeit* σ , also

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (7.13)$$

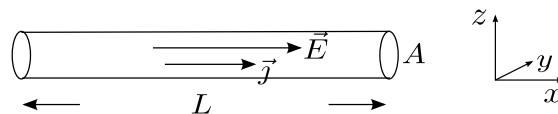
Dies ist das *Ohmsche Gesetz* in mikroskopischer Form. Dieser lineare Zusammenhang folgt aber nur, weil wir eine lineare Form $-\alpha\dot{\vec{r}}$ für die Reibungskraft angenommen hatten. Auch ist die klassische Herleitung für z. B. Elektronen in Metallen sicherlich nicht gerechtfertigt. Eine bessere quantenmechanische Rechnung liefert auch einen linearen Zusammenhang für kleine Felder. Allgemeiner erwarten wir eine kompliziertere Abhängigkeit $\vec{j}(\vec{E})$, deren führende Ordnung das lineare Ohmsche Gesetz ist, analog zu den Materialgleichungen $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ und $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$.

In anisotropen Leitern wird die Leitfähigkeit, analog zu den Suszeptibilitäten, ein symmetrischer Tensor sein:

$$\vec{j} = \overleftrightarrow{\sigma} \vec{E}. \quad (7.14)$$

Wir beschränken uns hier auf den isotropen Fall $\overleftrightarrow{\sigma} = \sigma \mathbb{1}$.

Die makroskopische Form des Ohmschen Gesetzes erhalten wir, indem wir $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ über das Volumen \mathcal{V} eines Drahtes mit der Querschnittsfläche A und der Länge L integrieren. Wir nehmen hier an, dass \vec{j} , σ und \vec{E} homogen sind.



Es folgt

$$\iiint_V dV j_x = \iiint_V dV \sigma E_x \quad (7.15)$$

$$\Rightarrow L \iint ds j_x = \sigma A \int dl E_x \quad (7.16)$$

$$\Rightarrow L \iint d\vec{s} \cdot \vec{j} = \sigma A \int d\vec{l} \cdot \vec{E} \quad (7.17)$$

$$\Rightarrow LI = \sigma AU \quad (7.18)$$

$$\Rightarrow I = \frac{\sigma A}{L} U =: GU \quad (7.19)$$

mit dem *Leitwert* G bzw.

$$U = \frac{L}{\sigma A} I = \frac{I}{G} =: RI \quad (7.20)$$

mit dem *Widerstand* R .

Abschließend sei angemerkt, dass die Natur der treibenden Kraft für den Strom unerheblich ist. Er kann insbesondere auch durch die magnetische Lorentz-Kraft angetrieben werden. Wir sollten also im Ohmschen Gesetz \vec{E} durch \vec{F}/q ersetzen, wobei \vec{F} die Gesamtkraft auf die Ladungsträger (mit der Ladung q) ist. Unter Einschluss der magnetischen Kraft $\vec{F}_{\text{mag}} = q\vec{v} \times \vec{B}$ erhalten wir damit

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (7.21)$$

Hier enthält \vec{v} einerseits die Geschwindigkeit der Ladungsträger relativ zum Leiter, aber andererseits auch die Geschwindigkeit des Leiters relativ zum Laborsystem, bezüglich dem \vec{B} gegeben ist. Wir kommen darauf bei der Diskussion des Induktionsgesetzes zurück.

7.2 Induktionsfeld in Leitern und Supraleitern

Leiter haben einen dramatischen Effekt auf *elektrostat*ische Felder: Das \vec{E} -Feld wird vollständig aus ihrem Inneren verdrängt. *Normale* Leiter beeinflussen das \vec{B} -Feld bei weitem nicht so stark. Unter Vernachlässigung der meist geringen magnetischen Polarisierbarkeit (siehe Kapitel 6), dringt das \vec{B} -Feld ungestört in einen normalen Leiter ein. Die Asymmetrie zwischen \vec{E} und \vec{B} beruht darauf, dass der Leiter zwar freie Ladungsträger enthält, aber keine freien magnetischen Monopole. Der wichtigste magnetische Effekt in normalen Leitern ist der Hall-Effekt, den wir gleich besprechen werden.

Ganz anders verhalten sich *Supraleiter*. Diese verdrängen nicht nur das \vec{E} -Feld (weil sie leiten), sondern auch das \vec{B} -Feld, bis auf eine Oberflächenschicht mikroskopischer Dicke λ (*Meissner-Ochsenfeld-Effekt*). Der Ursprung dieses Effekts kann hier nicht erklärt werden. Letztlich ist er analog zum Higgs-Mechanismus in der Hochenergiephysik. Im Zusammenhang mit Supraleitung spricht man vom *Anderson-Higgs-Mechanismus*. Er bewirkt, dass das *Photon* in supraleitenden Medien effektiv eine *Masse* erhält. Damit fallen \vec{E} - und \vec{B} -Felder exponentiell mit dem Abstand ab, also insbesondere auch exponentiell mit dem Abstand zur Oberfläche.

Es sei angemerkt, dass für statische Felder die Eigenschaften von Supraleitern im Rahmen der Magnetostatik beschrieben werden können, wenn man eine zusätzliche (Material-) Gleichung einführt. Dies ist die *zweite London-Gleichung*

$$\vec{\nabla} \times \vec{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \vec{B}. \quad (7.22)$$

Diese liefert mit dem Ampèreschen Gesetz

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (7.23)$$

die Gleichung

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\frac{1}{\lambda^2} \vec{B} \quad (7.24)$$

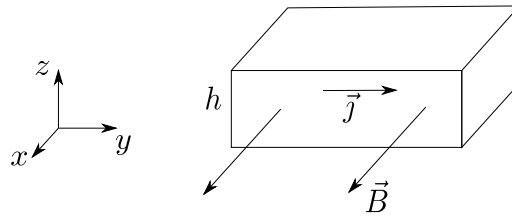
$$\Rightarrow \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}_0 - \nabla^2 \vec{B} = -\frac{1}{\lambda^2} \vec{B} \quad (7.25)$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{B}, \quad (7.26)$$

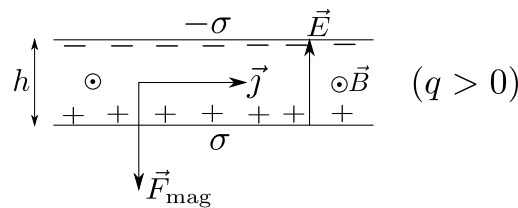
die den exponentiellen Abfall von \vec{B} beschreibt.

7.3 Der Hall-Effekt

Wir betrachten einen großen, leitenden Quader mit gleichförmiger Stromdichte \vec{j} parallel zu einer Kante und gleichförmigem \vec{B} -Feld parallel zu einer dazu senkrechten Kante.



Die Ladung der Ladungsträger sei q . Die magnetische Lorentz-Kraft $\vec{F}_{\text{mag}} = q \vec{v} \times \vec{B}$ lenkt die Ladungsträger nach unten (oben) ab, wenn $q > 0$ ($q < 0$) gilt. Dies führt zur Akkumulation von Flächenladungen $\pm\sigma$ auf der oberen und der unteren Seitenfläche. Diese Ladung nimmt zu, bis die von ihr hervorgerufene *elektrische* Kraft $\vec{F}_{\text{el}} = q \vec{E}$ die magnetische Kraft gerade kompensiert – dann gibt es keine Ablenkung mehr. Die Existenz des elektrischen Feldes \vec{E} aufgrund der Oberflächenladungen ist der *Hall-Effekt*.



Im stationären Zustand gilt also

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = 0 \quad (7.27)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} = -\frac{\vec{j}}{\rho} \times \vec{B}. \quad (7.28)$$

Für die hier betrachtete Geometrie bedeutet das

$$E_z = \frac{jB}{\rho}. \quad (7.29)$$

Die Spannung zwischen der oberen und der unteren Seitenfläche ist also

$$U_{\text{Hall}} = -hE_z = -\frac{jBh}{\rho}. \quad (7.30)$$

Dies ist die *Hall-Spannung*. Beachte, dass U_{Hall} vom Vorzeichen von ρ und damit vom Vorzeichen $\text{sgn } q$ der beweglichen Ladungsträger abhängt. (Dieses Vorzeichen kürzt sich nicht mit einem Faktor in \vec{j} heraus, da die Richtung von \vec{j} *unabhängig* vom Vorzeichen der Ladungsträger durch eine in y -Richtung angelegte Spannung bestimmt wird.) Der Hall-Effekt wird daher zur Messung des Vorzeichens und der Konzentration der dominierenden Ladungsträger verwendet (Elektronen oder Löcher?). Er wird auch, für bekanntes Material, zur Messung des \vec{B} -Feldes verwendet.

Kapitel 8

Elektrodynamik

Bisher hatten wir zeitunabhängige Felder beschrieben, die von stationären Ladungen und Strömen erzeugt werden. Die dazu nötigen mikroskopischen Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (8.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \quad (8.2)$$

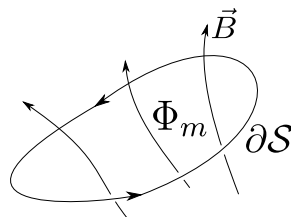
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (8.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad (8.4)$$

enthalten für gegebene ρ und \vec{j} keine Kopplung zwischen elektrischen und magnetischen Feldern. Eine Kopplung kommt höchstens dadurch zustande, dass die Stromdichte \vec{j} vom elektrischen Feld \vec{E} abhängt, z. B. über das Ohmsche Gesetz. Im Folgenden wollen wir *zeitabhängige* Phänomene behandeln. Experimente von Faraday und Nachfolgern zeigten, dass zeitlich veränderliche Magnetfelder elektrische Felder *induzieren*. Daher müssen in der Beschreibung zeitabhängiger Felder Gleichungen auftreten, die \vec{E} und \vec{B} koppeln.

8.1 Das Faradaysche Induktionsgesetz

Experimente von Michael Faraday zeigten, dass in einer Leiterschleife ∂S ein elektrischer Strom I erzeugt wird, wenn sich der magnetische Fluss Φ_m durch die Schleife zeitlich ändert.



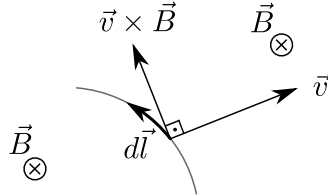
Dies ist unabhängig davon, wie diese Änderung bewirkt wird, z. B. durch

- Änderung des \vec{B} -Feldes,
- Translation der Leiterschleife,
- Rotation der Schleife,
- Verformung der Schleife.

Man sagt, der Strom I wird durch die Flussänderung *induziert*. Es muss eine Kraft existieren, die diesen Strom antreibt. Für hinreichend schwache Kraft – wie in Faradays Experimenten – gilt das Ohmsche Gesetz und der Strom ist proportional zur Kraft. Unser Ziel ist es, diese Kraft zu verstehen. Dies ist ziemlich subtil und wird in Lehrbüchern teilweise falsch diskutiert.

8.1.1 Bewegungsinduktion

Wir betrachten zunächst eine sich bewegende Schleife im zeitunabhängigen \vec{B} -Feld. Das Feld muss dabei nicht homogen sein und die Bewegung der Schleife kann beliebige Translationen, Rotationen und Verformungen enthalten. Es soll sich um eine „Probeschleife“ handeln, deren Leitwert so gering ist, dass das vom induzierten Strom erzeugte \vec{B} -Feld gegenüber dem angelegten Feld vernachlässigbar ist. Ein Linienelement $d\vec{l}$ der Schleife bewege sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} :



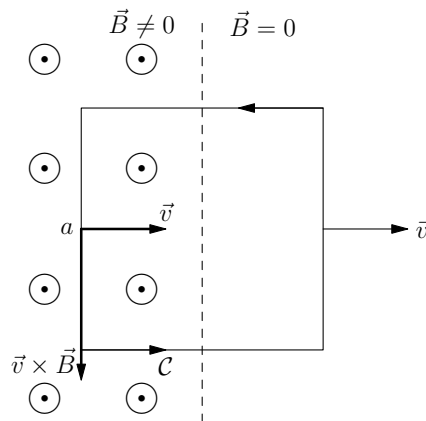
Die auf einen Ladungsträger der Ladung q wirkende Kraft ist die magnetische Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}. \quad (8.5)$$

Für die Bewegung der Ladung entlang der Schleife ist nur die Kraftkomponente parallel zu $d\vec{l}$ relevant. Durchläuft die Ladung eine geschlossene Schleife einmal, so verrichtet die Kraft an ihr die Arbeit

$$W = \oint d\vec{l} \cdot \vec{F} = q \oint d\vec{l} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}). \quad (8.6)$$

Dieses Ringintegral verschwindet im Allgemeinen nicht, wie folgendes Beispiel zeigt:



$$W = q \int_c d\vec{l} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = qavB. \quad (8.7)$$

Damit ist die Kraft i. A. *nicht konservativ*. Analog zur Einführung des elektrischen Feldes und Potentials spalten wir die (Probe-) Ladung q ab und definieren:

$$\mathcal{E} := \frac{W}{q}. \quad (8.8)$$

\mathcal{E} heißt *elektromotorische Kraft*. Diese Bezeichnung ist irreführend, da \mathcal{E} schon einheitenmäßig keine Kraft ist, sondern eine Verallgemeinerung der Potentialdifferenz (Spannung) auf den Fall nicht konservativer Kräfte. Einleuchtendere Bezeichnungen für \mathcal{E} sind *Ringspannung* und *Umlaufspannung*.

Für die Bewegung der Ladungen ist unerheblich, ob die Kraft konservativ ist oder nicht bzw. ob sie durch eine Potentialdifferenz oder eine allgemeine elektromotorische Kraft angetrieben werden. Für eine geschlossene leitende Schleife mit dem Ohmschen Widerstand R erhalten wir daher einen induzierten Strom

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (8.9)$$

Beachte, dass in der bisherigen Diskussion kein elektrisches Feld auftrat. Ist der Stromkreis jedoch nicht geschlossen, so führt ein induzierter Strom zur Anhäufung von Ladungen an den offenen Enden, die ein elektrisches Gegenfeld erzeugen. Dies ist analog zum Hall-Effekt. Alle diese Effekte in bewegten Leitern im \vec{B} -Feld bezeichnet man als *Bewegungsinduktion*.

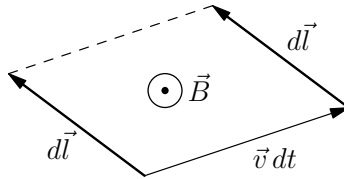
Wir können die elektromagnetische Kraft

$$\mathcal{E} = \oint_{\partial S} d\vec{l} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (8.10)$$

noch mit dem magnetischen Fluss

$$\Phi_m = \iint_S d\vec{s} \cdot \vec{B} \quad (8.11)$$

durch die Schleife in Beziehung setzen. Wir betrachten die Änderungen des Flusses aufgrund der Bewegung des Elements $d\vec{l}$:



Die Flussänderung im Zeitintervall dt ist

$$d\Phi_m = \underbrace{(\vec{v} dt \times d\vec{l})}_{\text{überstrichenes Flächenelement}} \cdot \vec{B} = (\vec{B} \times \vec{v}) \cdot d\vec{l} dt = -(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} dt. \quad (8.12)$$

Damit ist die gesamte Änderung des Flusses pro Zeit

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = - \oint_{\partial S} d\vec{l} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = -\mathcal{E} \quad (8.13)$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = - \frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (8.14)$$

Dies ist ein bemerkenswert einfaches Ergebnis für die elektromotorische Kraft bei Bewegungsinduktion.

8.1.2 Ruheinduktion und allgemeines Induktionsgesetz

Faradays Experimente haben nun gezeigt, dass es für den induzierten Strom gar nicht darauf ankommt, wodurch sich der magnetische Fluss ändert – es gilt immer

$$I = - \frac{1}{R} \frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (8.15)$$

Daraus schließen wir, dass immer eine elektromotorische Kraft

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_m}{dt} \quad (8.16)$$

existiert, die den Strom antreibt. Wir untersuchen nun die Konsequenzen für eine *unbewegliche* Schleife in einem *zeitlich veränderlichen* \vec{B} -Feld. In diesem Fall spricht man von der *Ruheinduktion*. Nun kann die magnetische Lorentz-Kraft $q\vec{v} \times \vec{B}$ nicht verantwortlich sein, da $\vec{v} = 0$ gilt oder, wenn schon ein Strom fließt, $\vec{v} \parallel d\vec{l}$ ist und daher $q\vec{v} \times \vec{B}$ senkrecht zum Leiter wirkt. Daher muss es sich um eine *elektrische* Kraft $q\vec{E}$ handeln. Wir schließen also

$$W = \oint d\vec{l} \cdot \vec{F} = q \oint d\vec{l} \cdot \vec{E} \quad (8.17)$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = \oint d\vec{l} \cdot \vec{E}. \quad (8.18)$$

Faradays Experimente implizieren dann

$$\oint_{\partial S} d\vec{l} \cdot \vec{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S d\vec{s} \cdot \vec{B}. \quad (8.19)$$

Nun hatten wir angenommen, dass die Schleife ∂S stationär ist, daher können wir die Zeitableitung ins Integral ziehen:

$$\oint_{\partial S} d\vec{l} \cdot \vec{E} = -\iint_S d\vec{s} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (8.20)$$

Mit dem Stokesschen Satz folgt

$$\iint_S d\vec{s} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\iint_S d\vec{s} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (8.21)$$

Die Schleife hatten wir als Probeschleife verstanden, die die Felder vernachlässigbar stört. Daher gilt die Beziehung auch, wenn keine reale Leiterschleife vorhanden ist. Da wir ∂S beliebig (stationär) wählen können, folgt

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (8.22)$$

Dies ist das *Faradaysche Induktionsgesetz* in differentieller Form. Wir sehen, dass es elektrische und magnetische Felder miteinander koppelt. Daher sprechen wir von einem *elektromagnetischen* Feld mit Komponenten \vec{E} und \vec{B} . Das Faraday-Gesetz schafft also zum ersten Mal eine Vereinigung von Elektrizität und Magnetismus.

Wir schreiben das Induktionsgesetz noch in einer allgemeineren (Integral-) Form auf, die sowohl Bewegungsinduktion als auch Ruheinduktion einschließt: Die Flussänderung pro Zeit aufgrund der Bewegung ist, siehe Gleichung (8.13),

$$\left. \frac{d\Phi_m}{dt} \right|_{\text{Bewegung}} = -\oint_{\partial S} d\vec{l} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}). \quad (8.23)$$

Die Flussänderung aufgrund der zeitlichen Änderung des \vec{B} -Feldes ist einfach

$$\left. \frac{d\Phi_m}{dt} \right|_{\text{Feld}} = \iint_S d\vec{s} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \stackrel{\text{Faraday}}{=} -\oint_{\partial S} d\vec{l} \cdot \vec{E}. \quad (8.24)$$

Insgesamt also

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{d}{dt} \iint_S d\vec{s} \cdot \vec{B} = -\oint_{\partial S} d\vec{l} \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (8.25)$$

Können wir verstehen, wieso die Art der Änderung des Flusses keine Rolle für die Induktion spielt? Wir betrachten ein \vec{B} -Feld, das von einem Permanentmagneten erzeugt wird, und eine starre Leiterschleife. Bewegen sich Magnet und Schleife relativ zueinander (wir betrachten reine Translation), so ändert sich i. A. der Fluss durch die Schleife und eine elektromotorische Kraft wird induziert. Im Ruhesystem des Magneten handelt es sich um Bewegungsinduktion (die Schleife bewegt sich), im Ruhesystem der Schleife hingegen um Ruheinduktion. Die induzierte elektromotorische Kraft und damit der Strom darf nicht davon abhängen, welches Bezugssystem wir wählen. Also ergibt sich die Gleichheit der Effekte aus der Forderung der *Galilei-Invarianz* [siehe M. Jammer und J. Stachel, American Journal of Physics **48**, 5 (1980)].

8.2 Das Ampère-Maxwell-Gesetz

Wir fassen zunächst die bisher erhaltenen Gleichungen für das elektromagnetische Feld zusammen. In mikroskopischer Form lauten sie

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{Gauß für } \vec{E}), \quad (8.26)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad (\text{Faraday}), \quad (8.27)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Gauß für } \vec{B}), \quad (8.28)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (\text{Ampère}). \quad (8.29)$$

Haben wir damit eine korrekte Beschreibung der Dynamik des Feldes? Um dies zu prüfen, betrachten wir die Divergenz der Stromdichte:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} \stackrel{\text{Ampère}}{=} \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0. \quad (8.30)$$

Ladungserhaltung führt andererseits auf die Kontinuitätsgleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\dot{\rho}. \quad (8.31)$$

Es folgt $\dot{\rho} = 0$, also $\rho = \text{const}$; die obigen Gleichungen gelten also nur für zeitunabhängige Ladungsdichten. Für zeitabhängiges $\rho(\vec{r}, t)$ ergeben sie einen Widerspruch zur Kontinuitätsgleichung, d.h. sie verletzen die Ladungserhaltung.

James Clerk Maxwell hat diesen Widerspruch durch eine Ergänzung des Ampèreschen Gesetzes behoben. Wie muss dieses Gesetz ergänzt werden, um mit der Kontinuitätsgleichung vereinbar zu sein? Wir fügen einen Zusatzterm ein:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \vec{j}_V \quad (8.32)$$

(wir können diesen Term natürlich bezeichnen, wie wir wollen; die Schreibweise $\mu_0 \vec{j}_V$ erweist sich gleich als günstig). Dann muss gelten

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_V = \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})}_0 - \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \dot{\rho}. \quad (8.33)$$

Mit dem Gaußschen Gesetz ergibt sich

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_V = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{E}}. \quad (8.34)$$

Die einfachste Möglichkeit, diese Gleichung zu erfüllen, ist der Ansatz

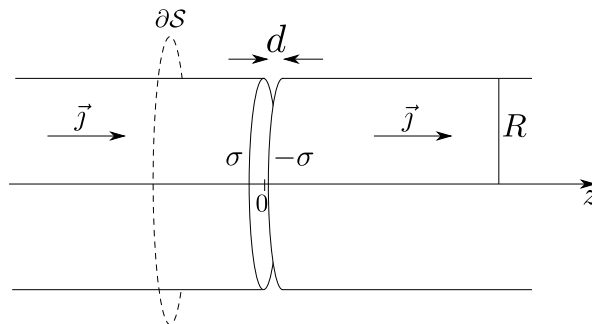
$$\vec{j}_V = \epsilon_0 \dot{\vec{E}}. \quad (8.35)$$

Im Prinzip könnte zu \vec{j}_V noch ein beliebiges Wirbelfeld addiert werden, aber Experimente zeigen, dass ein solcher Term nicht auftritt. Damit wird

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \dot{\vec{E}}. \quad (8.36)$$

Das ist das *Ampère-Maxwell-Gesetz*. Die Größe $\vec{j}_V = \epsilon_0 \dot{\vec{E}}$ nennt man den *Verschiebungsstrom*.

■ Beispiel: Gegeben sei ein dicker zylindrischer Leiter mit einer schmalen Lücke. Im Leiter fließe eine homogene Stromdichte \vec{j} :



Bestimme das \vec{B} -Feld außerhalb des Leiters.

Lösung: Der Strom lädt die Oberflächen beiderseits der Lücken auf (Kondensator!). Ladungserhaltung ergibt für die Gesamtladung

$$\dot{Q} = I \quad (8.37)$$

und

$$\dot{\sigma} = j_z. \quad (8.38)$$

Da die Lücke schmal ist, können wir Streufelder vernachlässigen. Daher ist das \vec{E} -Feld in der Lücke

$$\vec{E} = \hat{z} \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (8.39)$$

Die rechte Seite des Ampère-Maxwell-Gesetzes lautet $\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \dot{\vec{E}}$. Für Radien $\rho > R$ (in Zylinderkoordinaten) verschwindet sie. Für $\rho < R$ haben wir

$$\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \dot{\vec{E}} = \begin{cases} \mu_0 \vec{j} = \mu_0 j_z \hat{z} & \text{für } |z| > \frac{d}{2}, \\ \mu_0 \epsilon_0 \dot{\vec{E}} = \mu_0 \dot{\sigma} \hat{z} = \mu_0 j_z \hat{z} & \text{für } |z| < \frac{d}{2} \end{cases} \quad (8.40)$$

und damit für *alle* z

$$\dots = \mu_0 j_z \hat{z}. \quad (8.41)$$

Die Summe aus realem Strom und Verschiebungsstrom ist also translationsinvariant entlang z . Wir können daher das Ampère-Maxwell-Gesetz in Integralform in Analogie zum Ampèreschen Gesetz für einen dicken Draht leicht lösen: Für $\rho > R$ erhalten wir

$$\oint_{\partial S} d\vec{l} \cdot \vec{B} = \mu_0 \iint_S d\vec{s} \cdot j_z \hat{z} \Theta(R - \rho) \quad (8.42)$$

$$\Rightarrow 2\pi\rho B_\varphi = \mu_0 \pi R^2 j_z = \mu_0 I \quad (8.43)$$

$$\Rightarrow B_\varphi = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{\rho} \quad (8.44)$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{\rho} \hat{\phi}. \quad (8.45)$$

Ohne die Maxwellsche Ergänzung wäre das Ergebnis nicht einfach falsch, sondern mehrdeutig. Nichts legt fest, wie die von der Ampèreschen Schleife ∂S berandete Fläche S aussehen muss. Wir können sie also so wählen, dass sie den Leiter durchschneidet, dann fließt der Strom I hindurch. Oder wir können sie durch die Lücke legen, dann fließt kein realer Strom hindurch. Abhängig von der Wahl der rein mathematischen Fläche S würden wir jeweils unterschiedliche Ergebnisse für das \vec{B} -Feld erhalten.

8.3 Die Maxwell-Gleichungen

Mit den Überlegungen in Abschnitten 8.1 und 8.2 haben wir nun die vollständigen Bewegungsgleichungen für das elektromagnetische Feld gefunden. Diese nennt man zusammenfassend *Maxwell-Gleichungen*, obwohl sie in dieser Form nicht von Maxwell aufgeschrieben wurden; seine Veröffentlichung von 1864 enthält kompliziertere Gleichungen, die aber zur modernen Formulierung äquivalent sind. Zusammengefasst lauten die Gleichungen in mikroskopischer Form

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{Gauß für } \vec{E}), \quad (8.46)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad (\text{Faraday}), \quad (8.47)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Gauß für } \vec{B}), \quad (8.48)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \dot{\vec{E}} \quad (\text{Ampère-Maxwell}). \quad (8.49)$$

Es gibt keine allgemein übliche Reihenfolge der Gleichungen – Bezeichnungen wie „3. Maxwell-Gleichung“ sind daher nicht eindeutig und sollten vermieden werden. Die Maxwell-Gleichungen enthalten alles, was man über das klassische elektromagnetische Feld wissen kann. Sie definieren damit die klassische *Feldtheorie* des Elektromagnetismus. Beachte, dass die Gleichungen (8.46) und (8.49) inhomogen sind – die Inhomogenitäten sind ρ/ϵ_0 bzw. $\mu_0 \vec{j}$. Die anderen beiden sind homogen, wären aber auch inhomogen, wenn magnetische Monopole existieren würden.

Die inhomogenen Gleichungen implizieren – per Konstruktion – die Kontinuitätsgleichung:

$$0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{E}} = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \mu_0 \dot{\rho} \quad (8.50)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \dot{\rho} = 0, \quad (8.51)$$

diese muss also nicht als zusätzliche Gleichung gefordert werden. Ladungserhaltung ist also automatisch erfüllt.

In Materie erhalten wir analog die folgenden Gleichungen, die das Feld mit *freien* Ladungen und Strömen in Verbindung bringen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f, \quad (8.52)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}, \quad (8.53)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (8.54)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_f + \dot{\vec{D}}. \quad (8.55)$$

\vec{E} , \vec{D} , \vec{B} , \vec{H} sind alle makroskopisch gemittelte Felder. Man erkennt, dass die Faktoren in den Definitionen von \vec{D} und \vec{H} gerade so gewählt wurden, dass die Umrechnungsfaktoren ϵ_0 und μ_0 in den Maxwell-Gleichungen verschwinden. Die Gleichungen müssen ergänzt werden durch die Definitionen

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (8.56)$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}), \quad (8.57)$$

die ganz allgemein gelten. In *linearen* Medien gilt zusätzlich

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}, \quad (8.58)$$

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}, \quad (8.59)$$

und in linearen (ohmschen) Leitern gilt außerdem

$$\vec{j}_f = \sigma \vec{E}. \quad (8.60)$$

8.4 Potentiale und Eichinvarianz

8.4.1 Potentiale

Wie in der Statik können wir die Felder durch Potentiale darstellen. Aus

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (8.61)$$

folgt die Existenz eines Vektorpotentials \vec{A} mit

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (8.62)$$

Nur ist jetzt \vec{B} und also auch \vec{A} zeitabhängig. Aus

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad (8.63)$$

folgt dann

$$0 = \vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = \vec{\nabla} \times (\vec{E} + \dot{\vec{A}}). \quad (8.64)$$

Also ist nun nicht mehr \vec{E} , sondern $\vec{E} + \dot{\vec{A}}$ wirbelfrei. Damit existiert ein skalares Potential ϕ mit

$$\vec{E} + \dot{\vec{A}} = -\vec{\nabla} \phi \quad (8.65)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \dot{\vec{A}}. \quad (8.66)$$

Das skalare Potential ist nun i. A. auch zeitabhängig. Die Vakuum-Maxwell-Gleichungen betreffen sechs Feldkomponenten $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$. Die Darstellung durch Potentiale zeigt aber, dass das elektromagnetische Feld gar nicht sechs unabhängige Komponenten hat. Die Zahl ist nun zunächst auf vier reduziert, da das Feld durch die vier Komponenten ϕ, A_x, A_y und A_z dargestellt werden kann.

8.4.2 Eichinvarianz

Wie schon mehrfach gesehen, ändert sich \vec{B} nicht, wenn wir zu \vec{A} einen Gradienten addieren:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla}\chi) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\chi}_0 = \vec{B}. \quad (8.67)$$

In der Elektrodynamik tritt \vec{A} aber auch im \vec{E} -Feld auf. Nun fordern wir, dass sich auch \vec{E} nicht ändern soll. Für

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \quad (8.68)$$

ist dann aber

$$\vec{\nabla}\phi = -\vec{E} - \dot{\vec{A}} \rightarrow -\vec{E} - \dot{\vec{A}} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla}\chi = \vec{\nabla}\phi - \vec{\nabla}\dot{\chi}. \quad (8.69)$$

\vec{E} und \vec{B} ändern sich also nicht, wenn wir beide Potentiale gleichzeitig gemäß

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\chi, \quad (8.70)$$

$$\phi \rightarrow \phi - \dot{\chi} \quad (8.71)$$

transformieren. Dies ist eine allgemeine *Eichtransformation*. Da sie die beobachtbaren Felder \vec{E} und \vec{B} nicht ändert, ist das skalare „Umeichfeld“ $\chi(\vec{r}, t)$ aus Prinzip *unbeobachtbar*. Es beschreibt daher keine physikalischen Eigenschaften des Systems. Das elektromagnetische Feld hat daher nur *drei* Komponenten (drei *Freiheitsgrade* an jedem Ort \vec{r}), die vierte kann durch Wahl von $\chi(\vec{r}, t)$ beliebig und ohne Konsequenzen festgelegt werden.

Durch die Einführung der Potentiale sind die homogenen Maxwell-Gleichungen automatisch erfüllt. Wir drücken nun die inhomogenen Gleichungen (im Vakuum) durch die Potentiale aus. Das Gaußsche Gesetz lautet

$$-\nabla^2\phi - \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{A}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (8.72)$$

und das Ampère-Maxwell-Gesetz

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \equiv \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j} - \mu_0 \epsilon_0 \vec{\nabla} \dot{\phi} - \mu_0 \epsilon_0 \ddot{\vec{A}}. \quad (8.73)$$

Es folgt

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (8.74)$$

$$\left(\nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \dot{\phi}) = -\mu_0 \vec{j}. \quad (8.75)$$

Das sieht ziemlich kompliziert aus.

Eine zusätzliche Bedingung, die ϕ und \vec{A} festlegt, nennt man *Eichbedingung*, die dadurch erfolgende Festlegung *Eichung*. Durch geeignete Eichungen können wir die Gleichungen vereinfachen:

1. *Coulomb-Eichung*: Wir fordern

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \quad (8.76)$$

Dann lautet die erste Gleichung

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (8.77)$$

Das ist identisch zur Poisson-Gleichung der Elektrostatik. Unter den üblichen (freien) Randbedingungen ist die Lösung bekannt:

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (8.78)$$

ϕ ist also das *instantan* von der Ladungsdichte ρ erzeugte Potential. Das widerspricht nicht der Erkenntnis, dass sich Wirkungen höchstens mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten können. Man kann zeigen, dass

der Beitrag von \vec{A} die unphysikalischen überlichtschnellen Wirkungen in beobachtbaren Größen weghebt. Für \vec{A} erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} \left(\nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} &= -\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \vec{\nabla} \dot{\phi} \\ &= -\mu_0 \vec{j} + \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \iiint dV' \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= -\mu_0 \vec{j} - \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \iiint dV' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned} \quad (8.79)$$

mit einer nicht sehr einfachen Inhomogenität. Diese ist so kompliziert, weil \vec{A} wie gesagt die überlichtschnellen Wirkungen wegheben muss.

2. *Lorenz-Eichung*: Diese ist benannt nach Ludvig Lorenz (ohne „t“). Wir fordern

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \dot{\phi} = 0. \quad (8.80)$$

Dann lauten die inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$\left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (8.81)$$

$$\left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{A} = \mu_0 \vec{j}. \quad (8.82)$$

Die Gleichungen für ϕ , A_x , A_y , A_z sehen jetzt symmetrisch aus. Sie sind aber nicht entkoppelt, da die Eichbedingung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \dot{\phi} = 0$ sie verknüpft. Im Fall ohne Ladungen und Ströme erhalten wir

$$\left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi = 0, \quad (8.83)$$

$$\left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{A} = 0. \quad (8.84)$$

Das sind *Wellengleichungen* für ϕ , A_x , A_y , A_z . Sie beschreiben elektromagnetische Wellen, die sich mit einer noch unbekanntem Geschwindigkeit c ausbreiten. Der Ansatz

$$\phi(\vec{r}, t) = f(x - ct) \quad (8.85)$$

in einer Dimension ergibt

$$\mu_0 \epsilon_0 c^2 f''(x - ct) - f''(x - ct) = 0 \quad (8.86)$$

$$\Rightarrow \mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1 \quad (8.87)$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}. \quad (8.88)$$

Die Geschwindigkeit der Wellen (die *Lichtgeschwindigkeit*) ist also $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$. Wir schreiben daher für die allgemeinen inhomogenen Gleichungen

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (8.89)$$

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{A} = \mu_0 \vec{j}. \quad (8.90)$$

Den Operator auf der linken Seite nennt man auch *d'Alembert-Operator* oder „Quabla“

$$\square := \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2, \quad (8.91)$$

jedoch bezeichnet \square manchmal auch das Negative hiervon. Die Lorenz-Eichung ist einerseits günstig, weil sie auf symmetrische Gleichungen für ϕ und \vec{A} führt, und andererseits, weil sie mit der speziellen Relativitätstheorie kompatibel ist, wie wir noch sehen werden.

8.4.3 Eichinvarianz der Mechanik

Die Maxwell-Gleichungen ändern sich nicht unter Umeichungen

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\chi, \quad (8.92)$$

$$\phi \rightarrow \phi - \dot{\chi}. \quad (8.93)$$

Damit sich aber die physikalischen Voraussagen wie behauptet nicht ändern, müssen auch die Bewegungsgleichungen von Teilchen im elektromagnetischen Feld unverändert bleiben. In der Vorlesung Theoretische Mechanik wird gezeigt, dass ein Punktteilchen im elektromagnetischen Feld durch die *verallgemeinerte Lagrange-Funktion*

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - q\phi + q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} \quad (8.94)$$

beschrieben werden kann. Wie verhält sich L unter Eichtransformationen? Offenbar erhalten wir

$$L \rightarrow L + q\dot{\chi} + q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}\chi. \quad (8.95)$$

Da $\chi(\vec{r}, t)$ beliebig gewählt werden darf, ist L *nicht* eichinvariant. Es ist aber

$$q\dot{\chi} + q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}\chi = q \left(\frac{\partial\chi}{\partial t} + \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{\partial\chi}{\partial\vec{r}} \right) = q \frac{d\chi}{dt} \quad (8.96)$$

eine *totale* Zeitableitung. Die *Wirkung*

$$S[\vec{r}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \quad (8.97)$$

transformiert sich also gemäß

$$S \rightarrow S + q \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d\chi}{dt} = S + q\chi(\vec{r}(t_2), t_2) - q\chi(\vec{r}(t_1), t_1). \quad (8.98)$$

Die Variation von S , die im Hamiltonschen Prinzip auftritt, wird

$$\delta S \rightarrow \delta S + q\delta\chi(\vec{r}(t_2), t_2) - q\delta\chi(\vec{r}(t_1), t_1). \quad (8.99)$$

Da bei der Variation die Zeiten t_1, t_2 und auch die Anfangs- und Endorte $\vec{r}(t_1), \vec{r}(t_2)$ festgehalten werden müssen, verschwindet die Variation von χ an den Enden und wir finden

$$\delta S \rightarrow \delta S. \quad (8.100)$$

Die Variation der Wirkung ist eichinvariant und damit auch die aus dem Hamiltonschen Prinzip $\delta S = 0$ folgenden (Lagrange-) Bewegungsgleichungen.

8.5 Energie, Impuls und Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes

8.5.1 Energiedichte und Poynting-Vektor

Wir wollen die Energie des Feldes im Rahmen der vollen Elektrodynamik betrachten. Das Feld übt auf eine Punktladung q die Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (8.101)$$

aus. Bei einer Verschiebung der Ladung um $d\vec{r}$ leistet das Feld die Arbeit

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = q\vec{E} \cdot d\vec{r}; \quad (8.102)$$

die magnetische Kraft leistet keine Arbeit, siehe Gl. (5.5): $q(d\vec{r}/dt \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = 0$. Die *Leistung* des Feldes an der Ladung ist also

$$\dot{W} \equiv \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v}. \quad (8.103)$$

Eine kontinuierliche Ladungsdichte $\rho(\vec{r}, t)$ zerlegen wir in infinitesimale Elemente ρdV . Dann ist die Kraftdichte

$$\vec{f} = \rho (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (8.104)$$

und die entsprechende Leistungsdichte

$$\dot{w} = \vec{f} \cdot \vec{v} = \rho \vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (8.105)$$

Die gesamte Leistung im Volumen \mathcal{V} ist

$$\dot{W} = \iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (8.106)$$

Dies ist die Energie pro Zeit, die das Feld an die Ladungen abgibt (wenn $\dot{W} > 0$). Sie wird also in *mechanische* Energie der Ladungen umgewandelt. Ohne weitere Kräfte ist dies *kinetische* Energie.

Wir schreiben die Leistungsdichte noch um: Im Vakuum ist nach dem Ampère-Maxwell-Gesetz

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \dot{\vec{E}} \quad (8.107)$$

und damit

$$\begin{aligned} \dot{w} = \vec{E} \cdot \vec{j} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \dot{\vec{E}} \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \dot{\vec{E}} \quad \left| \text{Faraday-Gesetz} \right. \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \dot{\vec{B}} - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \dot{\vec{E}} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right), \end{aligned} \quad (8.108)$$

also

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right) = -\vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (8.109)$$

Diese Beziehung erinnert an die Kontinuitätsgleichung für die Ladung,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0, \quad (8.110)$$

nur steht jetzt rechts ein „Quellterm“. Tatsächlich können wir die neue Gleichung als Kontinuitätsgleichung für die Energie auffassen. Wir führen die *Energiedichte des elektromagnetischen Feldes* ein,

$$w_{\text{em}} := \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right), \quad (8.111)$$

wobei wir den ersten Term schon kannten, sowie die *Energiestromdichte* des Feldes, den sogenannten *Poynting-Vektor*

$$\vec{S} := \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}. \quad (8.112)$$

Dann erhalten wir

$$\frac{\partial w_{\text{em}}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (8.113)$$

Diese Gleichung nennt man auch *Poyntingsches Theorem*. Sie besagt, dass die Feldenergie nur bis auf den Term $-\vec{j} \cdot \vec{E}$ erhalten ist, der die Umwandlung in mechanische Energie und letztlich in „Joulesche Wärme“ beschreibt. In Integralform lautet das Poyntingsche Theorem

$$\dot{W}_{\text{em}} + \iint_{\partial \mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \vec{S} = - \iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{j} \cdot \vec{E}, \quad (8.114)$$

der zweite Term beschreibt offensichtlich den Energiefluss durch die Oberfläche des Volumens.

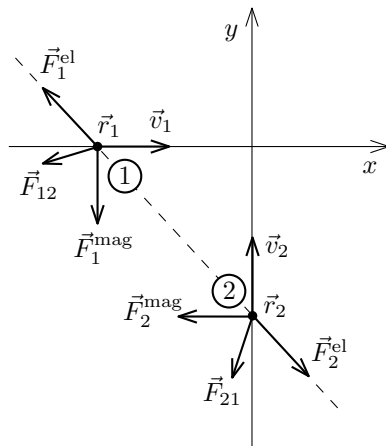
8.5.2 Impuls des Feldes und Maxwell'scher Spannungstensor

Das dritte Newtonsche Axiom (Reaktionsprinzip) sagt aus, dass die Kraft \vec{F}_{12} , die ein Körper 2 auf einen Körper 1 ausübt, und die Kraft \vec{F}_{21} des Körpers 1 auf Körper 2 betragsmäßig gleich und entgegengesetzt gerichtet sind:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}. \quad (8.115)$$

Wir betrachten diese Kräfte für zwei Punktladungen, die elektromagnetische wechselwirken.

Ein Körper der Masse m und der Ladung $q > 0$ möge sich entlang der x -Achse in positiver Richtung bewegen. Ein identischer Körper möge sich entlang der y -Achse in positiver Richtung bewegen.



Die Lorentzkraft auf Ladung 1 lautet

$$\vec{F}_{12} = \underbrace{q \vec{E}_2(\vec{r}_1)}_{\vec{F}_1^{\text{el}}} + \underbrace{q \dot{\vec{r}}_1 \times \vec{B}_2(\vec{r}_1)}_{\vec{F}_1^{\text{mag}}}, \quad (8.116)$$

wobei $\vec{E}_2(\vec{r}_1)$ und $\vec{B}_2(\vec{r}_1)$ das elektrische bzw. magnetische Feld aufgrund von Ladung 2 am Ort von Ladung 1 sind. Die Feldlinien von \vec{E}_2 zeigen von \vec{r}_2 aus radial nach außen, die Feldlinien von \vec{B}_2 bilden Kreise mit Mittelpunkten auf der y -Achse in Ebenen senkrecht zu dieser. Diese Aussagen gelten allgemein, insbesondere auch außerhalb der Statik. Es ist dann eine einfache Übung mit der Rechten-Hand-Regel, die Richtungen der elektrischen und magnetischen Kräfte auf Ladung 1 und analog auf Ladung 2 zu ermitteln (siehe Skizze). Es zeigt sich, dass in jedem Fall

$$\vec{F}_{12} \neq -\vec{F}_{21} \quad (8.117)$$

gilt. Quantitative Rechnung zeigt, dass zwar $|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|$ gilt, die Kräfte aber nicht entgegengesetzt gerichtet sind. Dieses Ergebnis ist problematisch, weil das Reaktionsprinzip bei der Herleitung des Impulssatzes und der Impulserhaltung ausgenutzt wird. Lehrbuchautor David J. Griffiths nennt die Impulserhaltung in diesem Zusammenhang das „heiligste Prinzip“ in der Physik. Die Lösung liegt darin, dass das elektromagnetische Feld selbst Impuls trägt. Im Rahmen der Mechanik ist das 3. Axiom hier wirklich verletzt, aber die Impulserhaltung gilt – der fehlende Impuls wird vom Feld übernommen.

Die Untersuchung der Impulsdichte des Feldes wird schwieriger sein als die der Energiedichte, da die Impulsdichte $\vec{\pi}$ selbst schon ein Vektorfeld ist. Die Impulsstromdichte muss daher ein *Tensor*feld sein; sie enthält einen doppelten Richtungssinn: welche Komponente des Impulses wird in welche Richtung transportiert. Diesen Tensor nennt man den *Maxwell'schen Spannungstensor* \overleftrightarrow{T} („Spannung“ bezieht sich hier auf eine mechanische Spannung, nicht auf eine elektrische Spannung.)

Wir wollen nun eine Kontinuitätsgleichung für die Impulsdichte des Feldes herleiten. Dazu gehen wir von der Kraft auf eine evtl. bewegte Ladungsdichte ρ in einem Volumen \mathcal{V} aus:

$$\vec{F} = \iiint_{\mathcal{V}} dV \rho(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \iiint_{\mathcal{V}} dV (\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}). \quad (8.118)$$

Die Kraftdichte ist also

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}. \quad (8.119)$$

Mit Hilfe des Gaußschen und des Ampère-Maxwell-Gesetzes erhalten wir

$$\vec{f} = \epsilon_0(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\vec{E} + \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \dot{\vec{E}} \right) \times \vec{B}. \quad (8.120)$$

Hierin ist

$$\dot{\vec{E}} \times \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{E} \times \dot{\vec{B}} \stackrel{\text{Faraday}}{=} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}), \quad (8.121)$$

also

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \epsilon_0 \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\vec{E} - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right] - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) \\ &= \epsilon_0 \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\vec{E} - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[\underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\vec{B}}_{=0} - \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \right] - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) \\ &= \epsilon_0 \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\vec{E} + (\vec{E} \cdot \vec{\nabla})\vec{E} - \frac{1}{2} \vec{\nabla} E^2 \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} - \frac{1}{2} \vec{\nabla} B^2 \right] - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}). \end{aligned} \quad (8.122)$$

Zur Abkürzung definieren wir den *Maxwellschen Spannungstensor* \overleftrightarrow{T} mit den Komponenten

$$T_{ij} := \epsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right). \quad (8.123)$$

Die Divergenz eines Tensors \overleftrightarrow{M} wird allgemein definiert als *Vektor* mit den Komponenten

$$(\vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{M})_j = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} M_{ij}. \quad (8.124)$$

Insbesondere ist

$$(\vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{T})_j = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} T_{ij} = \epsilon_0 \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})E_j + (\vec{E} \cdot \vec{\nabla})E_j - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} E^2 \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})B_j + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})B_j - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} B^2 \right], \quad (8.125)$$

so dass folgt

$$\vec{f} = \vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{T} - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{T} - \epsilon_0 \mu_0 \dot{\vec{S}} \quad (8.126)$$

mit dem Poynting-Vektor $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$. Die Gesamtkraft ist also

$$\vec{F} = \iiint dV \vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{T} - \epsilon_0 \mu_0 \iiint dV \dot{\vec{S}} \stackrel{\text{Gaußscher Satz}}{=} \oiint d\vec{s} \cdot \overleftrightarrow{T} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \iiint dV \vec{S}, \quad (8.127)$$

wobei

$$(\vec{d}\vec{s} \cdot \overleftrightarrow{T})_j \equiv \sum_i ds_i T_{ij} = \sum_i T_{ji} ds_i = (\overleftrightarrow{T} \cdot \vec{d}\vec{s})_j \quad (8.128)$$

gemeint ist. Der Spannungstensor tritt also nur im Oberflächenterm auf und der Poynting-Vektor im Volumenterm. Gemäß der Newtonschen Bewegungsgleichung gilt

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}}_{\text{mech}}, \quad (8.129)$$

wobei \vec{p}_{mech} der (mechanische) Impuls des Mediums ist, das die Ladungen trägt. Es folgt

$$\dot{\vec{p}}_{\text{mech}} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \iiint dV \vec{S} + \oiint d\vec{s} \cdot \overleftrightarrow{T}. \quad (8.130)$$

Der Volumenterm muss eine andere Form von Impuls darstellen, in die \vec{p}_{mech} umgewandelt werden kann. Da dieser Term \vec{E} und \vec{B} enthält, muss es sich um den Impuls des elektromagnetischen Feldes handeln. Wir definieren diesen als

$$\vec{p}_{\text{em}} := \epsilon_0 \mu_0 \iiint dV \vec{S} \quad (8.131)$$

und erhalten

$$\frac{d}{dt} (\vec{p}_{\text{mech}} + \vec{p}_{\text{em}}) = \iint \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{s}. \quad (8.132)$$

Auf der rechten Seite ist \overleftrightarrow{T} eine *mechanische Spannung*; T_{ij} ist die Kraft in die i -Richtung pro Fläche auf ein Flächenelement der Oberfläche orientiert (d. h. mit seiner Normalen) in j -Richtung. (Oder umgekehrt – \overleftrightarrow{T} ist symmetrisch.) Die Diagonalkomponenten T_{xx} usw. beschreiben die Kraftkomponenten (pro Fläche), die parallel zur Flächennormalen wirken. Das ist ein *Druck*. Die Außerdiagonalkomponenten T_{xy} usw. beschreiben Kraftkomponenten, die tangential zur Oberfläche angreifen. Das sind *Schubspannungen*, die zu *Scherungen* führen.

In differentiellen Form schreiben wir

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\pi}_{\text{mech}} + \vec{\pi}_{\text{em}}) = \vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{T} \quad (8.133)$$

mit der mechanischen Impulsdichte $\vec{\pi}_{\text{mech}}$ und der Impulsdichte des Feldes

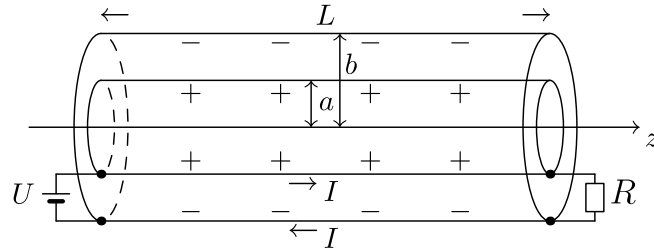
$$\vec{\pi}_{\text{em}} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{S} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}. \quad (8.134)$$

Diese Impulsdichte unterscheidet sich von der Energiestromdichte (dem Poynting-Vektor \vec{S}) also nur durch einen Einheitenfaktor $\epsilon_0 \mu_0$. Wir können die Impulserhaltung nun durch eine Kontinuitätsgleichung ausdrücken:

$$\frac{\partial \vec{\pi}_{\text{em}}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{T} = -\frac{\partial \vec{\pi}_{\text{mech}}}{\partial t} = -\vec{f}. \quad (8.135)$$

Wir erkennen, dass der Spannungstensor bis auf das Vorzeichen die Stromdichte des Impulses ist. Die Inhomogenität wird durch die (mechanische) Kraftdichte gebildet.

■ Beispiel: Wir betrachten ein langes Koaxialkabel, das eine Spannungsquelle mit einem Widerstand verbindet:



Das Kabelmaterial soll ein idealer Leiter sein, dann fällt entlang des Kabels keine Spannung ab und die beiden zylindrischen Leiter sind jeweils auf demselben Potential. Das elektrische Feld im Zwischenraum ist, in Zylinderkoordinaten,

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{\rho} \hat{\rho}, \quad (8.136)$$

wobei $\lambda = Q/L$ die Linienladungsdichte ist, die wir hier nicht ausrechnen. Das Induktionsfeld im Zwischenraum beträgt

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{\rho} \hat{\phi}. \quad (8.137)$$

Der Poynting-Vektor ist daher

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi^2\epsilon_0} \frac{\lambda I}{\rho^2} \hat{z}. \quad (8.138)$$

Offenbar fließt Energie in positive z -Richtung, von der Spannungsquelle zum Widerstand. Die Leistung, also die Energie pro Zeit, erhalten wir durch Integration über eine Querschnittsfläche,

$$P = \iint d\vec{s} \cdot \vec{S} = \frac{1}{4\pi^2\epsilon_0} \lambda I \iint d\rho d\phi \rho \hat{z} \cdot \frac{\hat{z}}{\rho^2} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \lambda I \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\lambda I}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}. \quad (8.139)$$

(Es muss auch $P = IU$ gelten. Damit könnten wir die Linienladung λ aus der Spannung U bestimmen.) Soweit ist das Ergebnis nicht überraschend.

Aber wir finden auch, dass das Feld die Impulsdichte

$$\vec{\pi}_{\text{em}} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{S} = \frac{\mu_0}{4\pi^2} \frac{\lambda I}{\rho^2} \hat{z} \quad (8.140)$$

trägt. Der Gesamtimpuls des Feldes ist

$$\vec{p}_{\text{em}} = \mu_0 \epsilon_0 \iiint dV \vec{S} = \frac{\mu_0}{4\pi^2} \lambda I \hat{z} \iiint d\rho d\varphi dz \frac{1}{\rho^2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \lambda I L \hat{z} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu_0}{2\pi} \lambda I L \hat{z} \ln \frac{b}{a}. \quad (8.141)$$

Wie kann der Impuls von Null verschieden sein, obwohl sich die Anordnung nicht bewegt? Die Antwort ist, dass der Strom ebenfalls Impuls trägt, der den Feldimpuls exakt kompensiert. Das ist überraschend, da die beiden Leiter dieselbe Stromstärke in entgegengesetzte Richtungen tragen. Die zugehörigen Impulse sind aber nicht proportional zur Stromstärke wegen relativistischer Korrekturen – wir kommen darauf zurück.

8.5.3 Drehimpuls des Feldes

Das elektromagnetische Feld hat die Impulsdichte $\vec{\pi} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{S} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$. Daher trägt es auch Drehimpuls, mit der Dichte

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{\pi} = \epsilon_0 \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}). \quad (8.142)$$

Der Gesamtdrehimpuls des Feldes ist

$$\vec{L} = \iiint dV \vec{r} \times \vec{\pi} = \epsilon_0 \iiint dV \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}). \quad (8.143)$$

Er hängt i. A. von der Wahl des Koordinatenursprungs ab: Verschieben wir

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{r}_0, \quad (8.144)$$

so wird

$$\vec{L} \rightarrow \vec{L} + \iiint dV \vec{r}_0 \times \vec{\pi} = \vec{L} + \vec{r}_0 \times \vec{p}_{\text{em}}. \quad (8.145)$$

Der Drehimpuls ist also unabhängig vom Koordinatenursprung, wenn der Gesamtimpuls des Feldes verschwindet.

Der Faktor \vec{r} führt zu Konvergenzproblemen, wenn über den gesamten Raum integriert wird. Wir nehmen daher an, dass $\vec{\pi}$ mit \vec{r} schnell genug abfällt. Außerdem betrachten wir der Einfachheit halber nur den Fall verschwindender Ladungsdichte, $\rho \equiv 0$. Wir schreiben nun den Drehimpuls um:

$$\vec{L} = \epsilon_0 \iiint dV \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) = \epsilon_0 \iiint dV \vec{r} \times (\vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})). \quad (8.146)$$

Im Folgenden sollen Ableitungen immer auf den gesamten folgenden Term wirken, unabhängig von Klammern. Damit schreiben wir

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \epsilon_0 \iiint dV \vec{r} \times \left[\sum_j E_j \vec{\nabla} A_j - (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \right] = \epsilon_0 \iiint dV \sum_j E_j (\vec{r} \times \vec{\nabla}) A_j - \epsilon_0 \iiint dV \vec{r} \times (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \\ &= \epsilon_0 \iiint dV \sum_j E_j (\vec{r} \times \vec{\nabla}) A_j - \underbrace{\epsilon_0 \iiint dV (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{r} \times \vec{A}}_{\vec{\nabla} \text{ wirkt auf alles!}} - \epsilon_0 \iiint dV \vec{A} \times (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} + \epsilon_0 \iiint dV \vec{r} \times \vec{A} \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{=0} \\ &\stackrel{\text{Gauß}}{=} \epsilon_0 \iiint dV \sum_j E_j (\vec{r} \times \vec{\nabla}) A_j - \underbrace{\epsilon_0 \oint d\vec{s} \cdot \vec{E} (\vec{r} \times \vec{A})}_{\rightarrow 0} - \epsilon_0 \iiint dV \vec{A} \times \vec{E} \\ &= \epsilon_0 \iiint dV \left[\sum_j E_j (\vec{r} \times \vec{\nabla}) A_j + \vec{E} \times \vec{A} \right]. \end{aligned} \quad (8.147)$$

Der erste Term ist für die Abhängigkeit von der Wahl des Koordinatenursprungs verantwortlich: Eine Verschiebung $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{r}_0$ ändert \vec{L} gemäß

$$\vec{L} \rightarrow \vec{L} + \epsilon_0 \vec{r}_0 \times \iiint dV \sum_j E_j \vec{\nabla} A_j. \quad (8.148)$$

Ähnliches kennen wir für den Bahndrehimpuls von Massenpunkten aus der Mechanik. Wir interpretieren daher den ersten Term als Bahndrehimpuls des Feldes. Der zweite Term hängt nicht vom Ursprung ab, wie der Eigendrehimpuls starrer Körper, und wir deuten ihn als Eigendrehimpuls des Feldes. Die Aufteilung in Bahn- und Eigendrehimpuls in Gl. (8.147) ist nicht eichinvariant, da \vec{A} explizit erscheint. Dies kann dadurch behoben werden, dass man \vec{E} und \vec{A} durch ihre „transversalen“ Komponenten ersetzt, was wir hier aber nicht weiter verfolgen.

Es ist überraschend, dass sogar statische Felder Impuls und Drehimpuls tragen, solange $\vec{E} \times \vec{B} \neq 0$ gilt. Diese müssen berücksichtigt werden, damit die entsprechenden Erhaltungssätze erfüllt sind.

■ Beispiel: Wir bestimmen den Drehimpuls des Feldes eines „Elementarteilchens“ mit der Ladung q und dem magnetischen Moment $\vec{\mu} = \mu \hat{z}$. Ein Abschneideparameter R wird sich als nützlich erweisen, d. h. $\vec{E} = 0$ oder $\vec{B} = 0$ für $r < R$. Es ist

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}, \quad (8.149)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{\mu}) - \vec{\mu}}{r^3}. \quad (8.150)$$

Daraus ergibt sich die Impulsdichte

$$\vec{\pi} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{16\pi^2} \frac{q}{r^5} \underbrace{[3\hat{r} \times \hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{\mu}) - \hat{r} \times \vec{\mu}]}_{=0} = -\frac{\mu_0}{16\pi^2} \frac{q\mu}{r^5} \hat{r} \times \hat{z} = +\frac{\mu_0}{16\pi^2} \frac{q\mu}{r^5} \sin\theta \hat{\varphi}. \quad (8.151)$$

Der Gesamtimpuls

$$\vec{p} = -\iiint dV \frac{\mu_0}{16\pi^2} \frac{q\mu}{r^5} \hat{r} \times \hat{z} \quad (8.152)$$

verschwindet, da der Integrand eine ungerade Funktion von \vec{r} ist. Der Drehimpuls ist daher unabhängig vom Koordinatenursprung. Die Drehimpulsdichte lautet

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{\pi} = \frac{\mu_0}{16\pi^2} \frac{q\mu}{r^4} \sin\theta \hat{r} \times \hat{\varphi} = -\frac{\mu_0}{16\pi^2} \frac{q\mu}{r^4} \sin\theta \hat{\theta}. \quad (8.153)$$

Der Drehimpuls beträgt daher

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \int_R^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \sin\theta \left(-\frac{\mu_0}{16\pi^2}\right) \frac{q\mu}{r^4} \sin\theta \hat{\theta} \\ &= -\frac{\mu_0}{16\pi^2} q\mu \underbrace{\int_R^\infty \frac{dr}{r^2}}_{1/R} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix} \sin^2\theta \cos\theta \cos\varphi \\ \sin^2\theta \cos\theta \sin\varphi \\ -\sin^3\theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mu_0}{8\pi} \frac{q\mu}{R} \frac{4}{3} \hat{z} = \frac{\mu_0}{6\pi} \frac{q\mu}{R} \hat{z} = \frac{\mu_0}{6\pi} \frac{q}{R} \vec{\mu}. \end{aligned} \quad (8.154)$$

Der gefundene Drehimpuls ist reiner Eigendrehimpuls. Dies können wir schon aus der Ortsunabhängigkeit schließen. Wir erhalten auch explizit für den Eigendrehimpuls

$$\vec{L}_{\text{Spin}} = \epsilon_0 \iiint dV \vec{E} \times \vec{A} \quad (8.155)$$

mit

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mu} \times \hat{r}}{r^2}, \quad (8.156)$$

siehe Abschnitt 5.6. Damit ist

$$\begin{aligned} \vec{L}_{\text{Spin}} &= \frac{\mu_0}{16\pi^2} q\mu \iiint dV \frac{\hat{r} \times (\hat{z} \times \hat{r})}{r^4} = \frac{\mu_0}{16\pi^2} q\mu \iiint dV \frac{\hat{r} \times \hat{\varphi} \sin\theta}{r^4} = -\frac{\mu_0}{16\pi^2} q\mu \iiint dV \frac{\hat{\theta} \sin\theta}{r^4} \\ &= -\frac{\mu_0}{16\pi^2} q\mu \underbrace{\int_R^\infty \frac{dr}{r^2}}_{=1/R} \int_0^\pi d\theta \sin^2\theta \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\varphi \\ \cos\theta \sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}}_{=-2\pi \sin\theta \hat{z}} = \frac{\mu_0}{6\pi} \frac{q}{R} \vec{\mu}, \end{aligned} \quad (8.157)$$

wie oben.

Der Drehimpuls ist abhängig vom Vorzeichen der Ladung parallel oder antiparallel zum magnetischen Moment ausgerichtet und divergiert, wie die Feldenergie, für $R \rightarrow 0$. Dies zeigt wieder, dass die Beschreibung von Teilchen als punktförmig im Rahmen der klassischen Physik nicht funktioniert. Was dieses Beispiel aber illustriert, ist, dass auch rein *statische* Felder Drehimpuls (wie auch Impuls) tragen können. Die Alltagsintuition versagt hier. Wir können aus Spaß den Radius R berechnen, wenn wir für die Ladung, das magnetische Moment und den (Eigen-) Drehimpuls die bekannten Werte für ein Elektron einsetzen:

$$q = -e, \quad (8.158)$$

$$|\vec{\mu}| = g \frac{e\hbar}{4m_e} \equiv \frac{g}{2} \mu_B \quad \text{mit } g \approx 2,0023, \quad (8.159)$$

$$|\vec{L}| = |\vec{S}| = \frac{\hbar}{2}. \quad (8.160)$$

Daraus folgt

$$R = \frac{\mu_0}{6\pi} g \frac{e^2 \hbar}{4m_e} = \frac{\mu_0}{12\pi} g \frac{e^2}{m_e} = \frac{1}{12\pi\epsilon_0} g \frac{e^2}{m_e c^2} = \frac{g}{3} \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e c^2}}_{= r_e} \quad (8.161)$$

mit dem „klassischen Elektronenradius“ r_e , der aus der Gleichsetzung der elektrostatischen Energie einer Kugel mit dem Radius r_e und der Ruheenergie $m_e c^2$ des Elektrons resultiert.

Wir werden auf die Energie, den Impuls und den Drehimpuls des Feldes im nächsten Kapitel, über elektromagnetische Wellen, zurückkommen.

8.6 Quasistationäre Felder und Stromkreise

Zeitabhängige elektromagnetischen Effekte benötigen zu ihrer Beschreibung i. A. die vollen Maxwell-Gleichungen. Deren Lösung ist oft mühsam, wie wir sehen werden. Für viele wichtige Anwendungen, vor allem in der Elektronik, können wir sie jedoch durch eine Näherung vereinfachen. In diesem Abschnitt betrachten wir *unbewegliche* Leiter und verwenden eine makroskopische Formulierung.

Die wesentliche Annahme ist nun, dass sich die Ströme und Ladungen, und damit auch die Felder, langsam ändern. Dann können wir elektromagnetische Wirkungen als instantan betrachten. Da sich Wirkungen tatsächlich nur mit der Lichtgeschwindigkeit c ausbreiten können, ist die Annahme gerechtfertigt, wenn sich die Felder usw. auf der Zeitskala $\Delta t = d/c$ nur schwach ändern, die Wirkungen benötigen, um die Ausdehnung d des Systems zu durchlaufen.

Sind Änderungen langsam, so können wir Zeitableitungen gegenüber nicht nach der Zeit abgeleiteten Größen vernachlässigen. Insbesondere können wir im Ampère-Maxwell-Gesetz

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}} \quad (8.162)$$

(\vec{j} ist hier die *freie* Stromdichte) den Verschiebungsstrom $\dot{\vec{D}}$ vernachlässigen. Damit fallen wir auf das ursprüngliche Ampèresche Gesetz zurück:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}. \quad (8.163)$$

Daraus folgt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = 0. \quad (8.164)$$

Zusammen mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ haben wir die Grundgleichungen der Magnetostatik wiedergewonnen. Somit können wir die Felder \vec{B} und \vec{H} mit den Methoden der Magnetostatik aus \vec{j} bestimmen bzw. die schon erhaltenen Ergebnisse übernehmen. Dies gilt, obwohl die Größen nun zeitabhängig sein dürfen, nur eben hinreichend schwach, so dass $\dot{\vec{D}}$ vernachlässigt werden darf. Daher nennt man das Ganze *quasistationäre* Näherung.

Das Induktionsgesetz

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad (8.165)$$

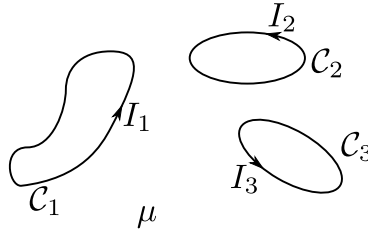
lassen wir in dieser Näherung unverändert, da es keine Inhomogenität enthält, relativ zu der \vec{B} klein sein könnte.

8.6.1 Induktivitäten

Wir betrachten jetzt eine beliebige Anordnung von Stromschleifen \mathcal{C}_i mit freien Strömen I_i in der quasi-stationären Näherung. Die Stromschleifen seien in ein lineares Medium eingebettet. Die Ströme produzieren Beiträge zum \vec{B} -Feld, die wiederum zu den magnetischen Flüssen Φ_j durch die Schleifen beitragen. Sind die Ströme zeitabhängig, so gilt dies auch für die Flüsse und in Schleife \mathcal{C}_j wird eine elektromotorische Kraft

$$\mathcal{E}_j = -\frac{d\Phi_j}{dt} \quad (8.166)$$

induziert. Wir wollen die elektromotorischen Kräfte mit den zeitlichen Änderungen der Ströme in Beziehung setzen.



Es gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \quad (8.167)$$

mit den freien Strömen \vec{j} und, da das umgebende Medium linear ist,

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{j} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{j}. \quad (8.168)$$

Damit lautet das Poisson-Integral für das Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu}{4\pi} \sum_i \oint_{\mathcal{C}_i} dl' \frac{\vec{I}_i(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu}{4\pi} \sum_i I_i \oint_{\mathcal{C}_i} \frac{d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (8.169)$$

Der Fluss durch \mathcal{C}_j ist

$$\begin{aligned} \Phi_j &= \iint_{\mathcal{S}_j} d\vec{s} \cdot \vec{B} \quad \left| \text{mit } \partial\mathcal{S}_j = \mathcal{C}_j \right. \\ &= \oint_{\mathcal{C}_j} d\vec{l} \cdot \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \sum_i I_i \oint_{\mathcal{C}_j} \oint_{\mathcal{C}_i} \frac{d\vec{l} \cdot d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \end{aligned} \quad (8.170)$$

Dies ist offensichtlich linear in den Stromstärken I_i und wir schreiben

$$\Phi_j = \sum_i L_{ji} I_i \quad (8.171)$$

mit dem *Induktionskoeffizienten* oder *Induktivitäten*

$$L_{ji} := \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_j} \oint_{\mathcal{C}_i} \frac{d\vec{l} \cdot d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (8.172)$$

(diese Gleichung nennt man *Neumann-Kurvenintegral*). Genauer nennen wir L_{jj} *Selbstinduktivitäten* und L_{ji} für $j \neq i$ *Gegeninduktivitäten*. Erstere sind in der angegebenen Form divergent wegen der Pole für $\vec{r} = \vec{r}'$. Die korrekte Berechnung der Selbstinduktivitäten erfordert die Berücksichtigung der nicht verschwindenden Querschnittsfläche der Leiter.

Die elektromotorischen Kräfte sind nun

$$\mathcal{E}_j = -\sum_i L_{ji} \dot{I}_i. \quad (8.173)$$

Unterbrechen wir die Stromschleifen, fallen zwischen den Enden die Spannungen

$$U_j = \mathcal{E}_j = - \sum_i L_{ji} \dot{I}_i \quad (8.174)$$

ab.

In wichtigen Spezialfällen kann man die Selbstinduktivität unter Verwendung von Symmetrieüberlegungen bestimmen, ohne komplizierte Integrale über Stromdichten auswerten zu müssen. Wir illustrieren dies für die ideale Spule mit $n = dN/dl$ Windungen pro Längeneinheit und ein lineares Medium mit der Permeabilität μ : In der quasistationären Näherung gilt das Ampèresche Gesetz

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}. \quad (8.175)$$

Analog zur Lösung für die luftgefüllte ideale Spule in 5.4.1 muss aus Symmetriegründen gelten

$$\vec{H} = H_z(\rho) \hat{z} \quad (8.176)$$

in Zylinderkoordinaten. Wie dort folgern wir aus dem Ampèreschen Gesetz

$$H_z(\rho) = \begin{cases} nI & \text{für } \rho < R, \\ 0 & \text{für } \rho > R, \end{cases} \quad (8.177)$$

wobei I hier der freie Strom ist. Es folgt

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu n I \hat{z} & \text{für } \rho < R, \\ 0 & \text{für } \rho > R. \end{cases} \quad (8.178)$$

Hat die Spule N Windungen, so tritt der Fluss $\pi R^2 B$ des Feldes N -mal durch die Leiterschleife, also beträgt der Gesamtfluss

$$\Phi_m = N \pi R^2 B = \mu N n \pi R^2 I = \mu \frac{N^2}{l} \pi R^2 I \quad (8.179)$$

mit der Länge l der Spule. Die induzierte Spannung ist

$$U = -\dot{\Phi}_m = -\mu \frac{N^2}{l} \pi R^2 \dot{I} \stackrel{!}{=} -L \dot{I}. \quad (8.180)$$

Die Selbstinduktivität der Spule ist also

$$L = \mu \frac{N^2}{l} \pi R^2. \quad (8.181)$$

8.6.2 Stromkreise

Unter quasistationären Bedingungen und unter der Annahme linearer Medien können wir nun die für die Beschreibung beliebiger Schaltungen aus passiven Bauelementen [Widerständen, Induktivitäten (Spulen) und Kapazitäten (Kondensatoren)] erforderlichen Gleichungen zusammentragen:

- Für Widerstände gilt das Ohmsche Gesetz

$$U = RI. \quad (8.182)$$

- Für Induktivitäten gilt, in Folge des Induktionsgesetzes,

$$U = -L \dot{I}. \quad (8.183)$$

- Für Kapazitäten gilt, in Folge des Gaußschen Gesetzes,

$$U = \frac{Q}{C} \quad (8.184)$$

und, in Folge der Kontinuitätsgleichung, $\dot{Q} = I$. Dies macht es oft sinnvoll, die zeitliche Änderung der Spannung, \dot{U} , zu betrachten.

- An Verzweigungspunkten („Knoten“) gilt

$$\sum_i I_i = 0, \quad (8.185)$$

wobei die Referenzstromrichtung entweder für alle Zweige zum Knoten hin oder vom Knoten weg zeigt. Diese *Knotenregel* folgt sofort aus der Kontinuitätsgleichung unter quasistationären Bedingungen, also $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$.

- Für geschlossene Schleifen („Maschen“) gilt die *Maschenregel*

$$\sum_i U_i = 0, \quad (8.186)$$

wobei alle Spannungen in derselben Umlaufrichtung zu messen sind, *falls* der magnetische Fluss durch die Masche verschwindet. Dies ist ein Spezialfall des Induktionsgesetzes, wonach gilt

$$\mathcal{E} = \sum_i U_i = -\dot{\Phi}_m. \quad (8.187)$$

Kapitel 9

Elektromagnetische Wellen

Wir kommen nun auf die vollen Maxwell-Gleichungen zurück. Diese haben oszillierende, Energie und Impuls tragende Lösungen, selbst wenn keine Ladungen und Ströme vorhanden sind: Elektromagnetische Wellen.

9.1 Elektromagnetische Wellen im Vakuum

Im Vakuum und ohne Ladungen und Ströme lauten die Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (9.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}, \quad (9.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (9.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \dot{\vec{E}} = \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}}. \quad (9.4)$$

Durch nochmalige Bildung der Rotation der zweiten und vierten Gleichung erhalten wir

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}_{=0}) - \nabla^2 \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \dot{\vec{B}} = -\frac{1}{c^2} \ddot{\vec{E}}, \quad (9.5)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}}_{=0}) - \nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \times \dot{\vec{E}} = -\frac{1}{c^2} \ddot{\vec{B}}. \quad (9.6)$$

Es folgt

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{E} = 0, \quad (9.7)$$

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{B} = 0, \quad (9.8)$$

dies sind *Wellengleichungen* für alle sechs Komponenten von \vec{E} und \vec{B} . Die Lösungen sind aber weiterhin verknüpft durch die Faraday- und Ampère-Maxwell-Gleichungen.

In einer Dimension hat die Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f(x, t) = 0 \quad (9.9)$$

eine sehr einfache *allgemeine* Lösung: Sind $f_-, f_+ : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ zwei zweimal stetig differenzierbare Funktionen, so ist

$$f(x, t) = f_-(x - ct) + f_+(x + ct) \quad (9.10)$$

eine Lösung der Wellengleichung. f_- beschreibt den nach rechts laufenden Anteil, f_+ den nach links laufenden Anteil. Wir können auch schreiben

$$f(x, t) = f_-(kx - \omega t) + f_+(kx + \omega t) \quad (9.11)$$

mit $\omega = kc$.

In *drei* Dimensionen lautet die Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) f(\vec{r}, t) = 0. \quad (9.12)$$

Eine Welle kann nicht nur in zwei Richtungen laufen, sondern in alle durch dreikomponentige Einheitsvektoren \hat{k} beschriebenen Raumrichtungen. Wir betrachten

$$f(\vec{r}, t) = g(k \hat{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = g(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t). \quad (9.13)$$

Einsetzen in die Wellengleichung ergibt

$$g''(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \left(\frac{1}{c^2} \omega^2 - k^2 \right) = 0. \quad (9.14)$$

Also ist $g(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ eine Lösung für $\omega = \pm kc$ (wir können $\omega = kc$ wählen, da das negative Vorzeichen nichts Neues ergibt) und eine beliebige, zweimal stetig differenzierbare Funktion g . Da die Wellengleichung linear ist, ist auch jede Linearkombination Lösung, allgemein also

$$f(\vec{r}, t) = \iiint d^3k g_{\vec{k}}(\vec{k} \cdot \vec{r} - kct) \quad (9.15)$$

mit beliebigen, zweimal stetig differenzierbaren Funktionen des Arguments, sofern das Integral existiert.

In der Praxis suchen wir Lösungen zu gegebenen Anfangs- und evtl. Randbedingungen. Dafür ist die obige allgemeine Form noch nicht besonders nützlich. Günstig ist wieder die Zerlegung in orthonormale Funktionensysteme. Für den freien Raum ohne Ränder läuft dies auf die Fouriertransformation hinaus. Aus

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) f(\vec{r}, t) = 0, \quad (9.16)$$

worin f für eine der Komponenten von \vec{E} oder \vec{B} steht, ergibt sich durch räumliche Fourier-Transformation

$$\begin{aligned} 0 &= \iiint dV e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) f(\vec{r}, t) \\ &\stackrel{\text{partiell}}{=} \iiint dV \left[e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\vec{\nabla} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}) \cdot \vec{\nabla} \right] f(\vec{r}, t) \\ &\stackrel{\text{partiell}}{=} \iiint dV \left[e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\nabla^2 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}) \right] f(\vec{r}, t) \\ &= \iiint dV \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + k^2 \right) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} f(\vec{r}, t) \\ &= \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + k^2 \right) f(\vec{k}, t). \end{aligned} \quad (9.17)$$

Oberflächenterme im Unendlichen wurden wie üblich weggelassen. Die räumliche Fourier-Transformierte $f(\vec{k}, t)$ erfüllt also die *gewöhnliche* Differentialgleichung

$$\ddot{f} = -k^2 c^2 f. \quad (9.18)$$

Diese hat die allgemeine Lösung

$$f = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (9.19)$$

mit

$$\omega := kc. \quad (9.20)$$

Es ist üblich und vereinfacht die Rechnungen, *komplexe* Lösungen der Wellengleichung zu betrachten. Die physikalischen Lösungen sind aber reell – sie ergeben sich als Realteil der komplexen Lösungen. In diesem Sinne lautet die allgemeine Lösung, für festes \vec{k} ,

$$f(\vec{k}, t) = f_-(\vec{k}) e^{-i\omega t} + f_+(\vec{k}) e^{i\omega t} \quad (9.21)$$

mit beliebigen \vec{k} -abhängigen Koeffizienten $f_{\pm}(\vec{k})$ und $\omega = kc$. Rücktransformation in den Ortsraum ergibt die allgemeine Lösung

$$f(\vec{r}, t) = \iiint \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} f(\vec{k}, t) = \iiint \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(f_-(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t} + f_+(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}+i\omega t} \right) \quad (9.22)$$

mit $\omega = kc$. Die allgemeine Lösung ist also die Superposition der *ebenen Wellen* proportional zu

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}\mp i\omega t}. \quad (9.23)$$

Sie haben alle die Phasengeschwindigkeit c . Es ist daher hinreichend, *eine* ebene Welle zu untersuchen; die allgemeine Lösung ergibt sich dann einfach als Superposition.

Wir machen den Ansatz

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}, \quad (9.24)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}. \quad (9.25)$$

Aus $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ folgt

$$i\vec{k} \times \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = i\omega \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \quad (9.26)$$

$$\Rightarrow \vec{B}_0 = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_0 \stackrel{\omega=kc}{=} \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E}_0. \quad (9.27)$$

Aus $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}}$ folgt analog

$$i\vec{k} \times \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = -\frac{i\omega}{c^2} \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \quad (9.28)$$

$$\Rightarrow \vec{E}_0 = -\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \times \vec{B}_0 = -c \hat{k} \times \vec{B}_0. \quad (9.29)$$

Damit stehen \vec{k} (bzw. \hat{k}), \vec{E}_0 und \vec{B}_0 senkrecht aufeinander und bilden ein Rechtssystem. Wir haben damit gefunden, dass das \vec{E} -Feld und das \vec{B} -Feld im ladungsfreien Fall immer senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung \hat{k} stehen. Elektromagnetische Wellen sind somit *transversal*.

Es wird später auch nützlich sein, das Vektorpotential zu kennen. Es ist natürlich eichabhängig. Eine mögliche Wahl für eine ebene Welle ist

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{i\omega} \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{E}_0}{i\omega} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}. \quad (9.30)$$

Beweis:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{i\omega} \vec{\nabla} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \times \vec{E}_0 = \frac{\vec{k} \times \vec{E}_0}{\omega} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = \vec{B}(\vec{r}, t). \quad (9.31)$$

Die verwendete Eichung ist die Coulomb-Eichung:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\vec{k} \cdot \vec{E}_0}{\omega} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = 0. \quad (9.32)$$

Sind \hat{e}_1, \hat{e}_2 zwei Einheitsvektoren senkrecht zueinander und zu \hat{k} , so dass $\hat{k}, \hat{e}_1, \hat{e}_2$ ein Rechtssystem bilden, so erhalten wir als allgemeine elektromagnetische ebene Welle

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = (E_1 \hat{e}_1 + E_2 \hat{e}_2) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}, \quad (9.33)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{E_1 \hat{e}_2 - E_2 \hat{e}_1}{c} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}. \quad (9.34)$$

Sie enthält *zwei* unabhängige Amplituden E_1, E_2 , die den beiden möglichen Richtungen \hat{e}_1, \hat{e}_2 *linearer Polarisation* entsprechen. E_1 und E_2 sind i. A. komplex. Wir können schreiben

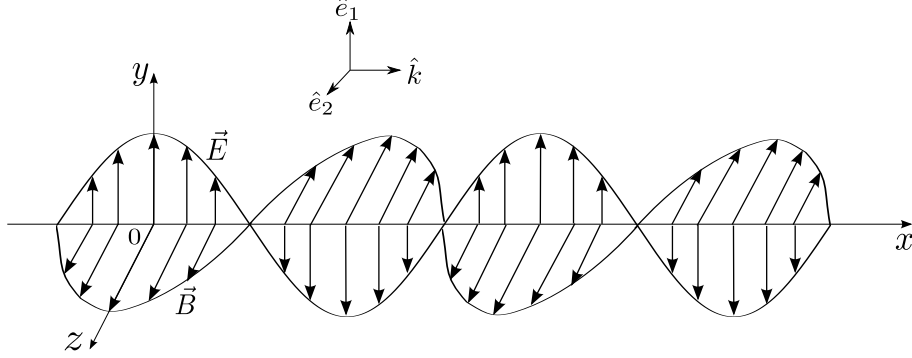
$$E_n = E_n^0 e^{i\varphi_n}, \quad n = 1, 2, \quad (9.35)$$

mit $E_n^0 \geq 0$. Dann lauten die Felder

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_1^0 \hat{e}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1)} + E_2^0 \hat{e}_2 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_2)}, \quad (9.36)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{E_1^0}{c} \hat{e}_2 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1)} - \frac{E_2^0}{c} \hat{e}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_2)}. \quad (9.37)$$

Beachte, dass nur die Realteile physikalisch sind. Für $\varphi_1 = \varphi_2$ ist die Welle *linear* polarisiert. Die Polarisationsebene wird durch E_1^0 und E_2^0 festgelegt. Für den Fall $\hat{k} = \hat{x}$, $\hat{e}_1 = \hat{y}$, $\hat{e}_2 = \hat{z}$ und $E_2^0 = 0$, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ist die Welle zum Zeitpunkt $t = 0$ hier skizziert:



Für $\varphi_2 = \varphi_1 \pm \pi/2$ und $E_1^0 = E_2^0$ ist die Welle *zirkular* polarisiert. Dann ist

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_1^0 \left(\hat{e}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1)} + \hat{e}_2 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1 \pm \pi/2)} \right), \quad (9.38)$$

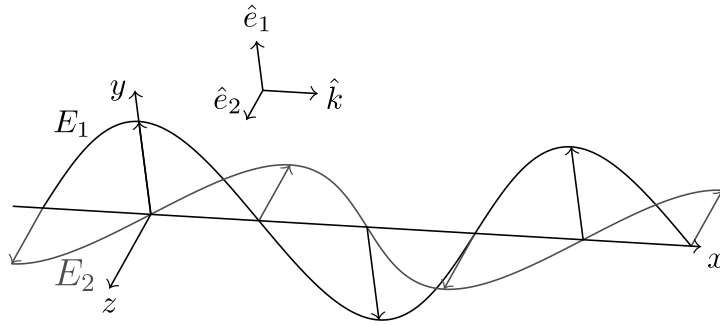
$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{E_1^0}{c} \left(\hat{e}_2 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1)} - \hat{e}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1 \pm \pi/2)} \right). \quad (9.39)$$

Die physikalischen Felder sind die Realteile

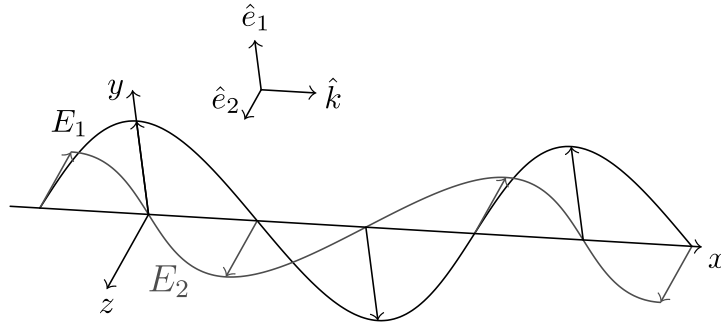
$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_1^0 \left[\hat{e}_1 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1) \mp \hat{e}_2 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1) \right], \quad (9.40)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{E_1^0}{c} \left[\pm \hat{e}_1 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1) + \hat{e}_2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1) \right]. \quad (9.41)$$

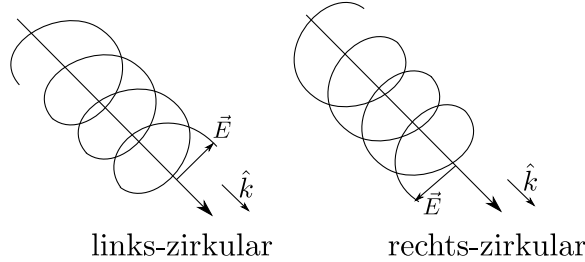
Wir betrachten nun einen Schnappschuss des \vec{E} -Feldes (für das \vec{B} -Feld würden wir dasselbe Ergebnis erhalten). Für das obere Vorzeichen (-):



Der \vec{E} -Vektor bildet offensichtlich eine Linksschraube. In der Konvention „aus Sicht des Empfängers“ bezeichnet man diese Welle daher als links-zirkular polarisiert. Diese Konvention ist in der Optik durchaus üblich, aber in der Physik allgemein wird auch die umgekehrte Konvention verwendet. Für das untere Vorzeichen (+) sieht das \vec{E} -Feld wie folgt aus:



Dies ist eine Rechtsschraube und wir bezeichnen die Welle als rechts-zirkular polarisiert.



9.1.1 Energie, Impuls und Drehimpuls elektromagnetischer Wellen

Wir können nun leicht die Energie-, Impuls- und Drehimpulsdichte der ebenen Wellen bestimmen. Diese Größen oszillieren mit der Kreisfrequenz $\omega = kc$. Im Allgemeinen interessiert man sich aber nur für zeitlich gemittelte Größen, die wir mit einem Überstrich bezeichnen. Bei dieser Rechnung ist wichtig, nur die reellen, physikalischen Felder zu berücksichtigen, da die interessierenden Größen die Felder zur zweiten Ordnung enthalten – daher würde das Produkt der (unphysikalischen) Imaginärteile der Felder einen reellen Beitrag liefern.

Wir betrachten zunächst eine linear polarisierte Welle

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_1^0 \hat{e}_1 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1), \quad (9.42)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{E_1^0}{c} \hat{e}_2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1). \quad (9.43)$$

Die zeitlich gemittelte Energiedichte ist

$$\begin{aligned} \bar{w}_{\text{em}} &= \frac{1}{2} \overline{\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 (E_1^0)^2 \underbrace{\overline{\cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1)}}_{= 1/2} + \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{E_1^0}{c} \right)^2 \underbrace{\overline{\cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1)}}_{= 1/2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\epsilon_0 + \frac{\mu_0 \epsilon_0}{\mu_0} \right) (E_1^0)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 (E_1^0)^2, \end{aligned} \quad (9.44)$$

also quadratisch in der Feldamplitude. Die zeitlich gemittelte Energiestromdichte (Poynting-Vektor) ist

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \overline{\vec{E} \times \vec{B}} = \frac{1}{\mu_0} \frac{(E_1^0)^2}{c} \underbrace{\hat{e}_1 \times \hat{e}_2}_{=\hat{k}} \underbrace{\overline{\cos^2(\hat{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)}}_{= 1/2} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{1}{c} (E_1^0)^2 \hat{k} = \frac{1}{2} c \epsilon_0 (E_1^0)^2 \hat{k} = \bar{w}_{\text{em}} c \hat{k}. \quad (9.45)$$

Das ist sinnvoll, da $c\hat{k}$ die vektorielle Geschwindigkeit der Welle ist. Weiter ist die gemittelte Impulsdichte

$$\vec{\pi} = \frac{\vec{S}}{c^2} = \bar{w}_{\text{em}} \frac{\hat{k}}{c}. \quad (9.46)$$

Um Konvergenzprobleme für den Drehimpuls zu vermeiden, nehmen wir an, dass die Welle auf ein großes, aber endliches Volumen beschränkt ist und schreiben die Drehimpulsdichte gemäß Abschnitt 8.5.3 als

$$\vec{l} = \epsilon_0 \left(\sum_j E_j (\vec{r} \times \vec{\nabla}) A_j + \vec{E} \times \vec{A} \right). \quad (9.47)$$

Für das physikalische, reelle Vektorpotential haben wir

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \text{Re} \frac{1}{i\omega} E_1^0 \hat{e}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1)} = \frac{E_1^0}{\omega} \hat{e}_1 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1). \quad (9.48)$$

Die gemittelte Dichte des Bahndrehimpulses ist also

$$\begin{aligned} \vec{l}_{\text{Bahn}} &= \epsilon_0 \sum_j \overline{E_j(\vec{r} \times \vec{\nabla}) A_j} = \frac{\epsilon_0}{\omega} (E_1^0)^2 \overline{\cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1) \vec{r} \times \vec{\nabla} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1)} \\ &= \frac{\epsilon_0}{\omega} (E_1^0)^2 \vec{r} \times \vec{k} \underbrace{\overline{\cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1)}}_{= 1/2} = \frac{\epsilon_0}{2c} (E_1^0)^2 \vec{r} \times \vec{k} = \frac{\bar{\omega}_{\text{em}}}{c} \vec{r} \times \vec{k} \\ &= \vec{r} \times \vec{\pi} \end{aligned} \quad (9.49)$$

mit der mittleren Impulsdichte $\vec{\pi}$. Das Ergebnis hängt, wie für einen Bahndrehimpuls erwartet, vom Koordinatenursprung ab. Dieser Beitrag ergibt sich aus dem Linearimpuls entlang \vec{k} und dem „Hebelarm“ \vec{r} . Wählen wir den Koordinatenursprung auf der Mittelachse eines Strahls, so ist der gesamte Bahndrehimpuls wegen der Integration über \vec{r} Null. Die gemittelte Dichte des Eigendrehimpulses ist

$$\vec{l}_{\text{Spin}} = \epsilon_0 \overline{\vec{E} \times \vec{A}} = \frac{\epsilon_0}{\omega} (E_1^0)^2 \hat{e}_1 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1) \times \hat{e}_1 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1) = 0. \quad (9.50)$$

Linear polarisierte Wellen tragen also keinen Eigendrehimpuls.

Interessanter ist die Situation für zirkular polarisierte Wellen: Seien

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_1^0 \left[\hat{e}_1 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1) \mp \hat{e}_2 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1) \right], \quad (9.51)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{E_1^0}{c} \left[\pm \hat{e}_1 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1) + \hat{e}_2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1) \right], \quad (9.52)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{E_1^0}{\omega} \left[\hat{e}_1 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1) \pm \hat{e}_2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1) \right] \quad (9.53)$$

(oberes/unteres Vorzeichen bezeichnet rechts/links-zirkulare Polarisation). Die Energiedichte ist

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{\text{em}} &= \frac{1}{2} \overline{\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 (E_1^0)^2 \left[\overline{\cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1)} + \overline{\sin^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1)} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{E_1^0}{c} \right)^2 \left[\overline{\sin^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1)} + \overline{\cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1)} \right] \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 + \frac{\mu_0 \epsilon_0}{\mu_0 \sigma} \right) (E_1^0)^2 = \epsilon_0 (E_1^0)^2. \end{aligned} \quad (9.54)$$

Die Beobachtung, dass die Energiedichte für gleiches E_1^0 doppelt so groß ist, wie für lineare Polarisation, hat keine tiefere Ursache. Hier liegen einfach zwei Komponenten mit derselben Amplitude vor, nicht nur eine.

Der Poynting-Vektor ist

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{1}{\mu_0} \overline{\vec{E} \times \vec{B}} = \frac{1}{\mu_0} \frac{(E_1^0)^2}{c} \left[\underbrace{\hat{e}_1 \times \hat{e}_2}_{=\hat{k}} \overline{\cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1)} - \underbrace{\hat{e}_2 \times \hat{e}_1}_{=-\hat{k}} \overline{\sin^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1)} \right] \\ &= \frac{\epsilon_0}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{1}{c} (E_1^0)^2 \hat{k} = c \epsilon_0 (E_1^0)^2 \hat{k} = \bar{\omega}_{\text{em}} c \hat{k} \end{aligned} \quad (9.55)$$

(wie für linear polarisierte Wellen) und die Impulsdichte ist

$$\vec{\pi} = \frac{\vec{S}}{c^2} = \bar{\omega}_{\text{em}} \frac{\hat{k}}{c}. \quad (9.56)$$

Die Dichte des Bahndrehimpulses ist

$$\begin{aligned}
\vec{l}_{\text{Bahn}} &= \epsilon_0 \sum_j \overline{E_j(\vec{r} \times \vec{\nabla}) A_j} \\
&= \frac{\epsilon_0}{\omega} (E_1^0)^2 \left[\overline{\cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1) \vec{r} \times \vec{\nabla} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1)} \right. \\
&\quad \left. - \overline{\sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1) \vec{r} \times \vec{\nabla} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1)} \right] \\
&= \frac{\epsilon_0}{\omega} (E_1^0)^2 \vec{r} \times \vec{k} \left[\overline{\cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1)} + \overline{\sin^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1)} \right] = \frac{\epsilon_0}{c} (E_1^0)^2 \vec{r} \times \hat{k} = \frac{\bar{\omega}_{\text{em}}}{c} \vec{r} \times \hat{k} \\
&= \vec{r} \times \vec{\pi} \tag{9.57}
\end{aligned}$$

(wie für linear polarisierte Wellen) und die Dichte des Eigendrehimpulses beträgt

$$\begin{aligned}
\vec{l}_{\text{Spin}} &= \epsilon_0 \overline{\vec{E} \times \vec{A}} \\
&= \frac{\epsilon_0}{c} (E_1^0)^2 \left[\pm \overline{\hat{e}_1 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1) \times \hat{e}_2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1)} \right. \\
&\quad \left. \mp \overline{\hat{e}_2 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1) \times \hat{e}_1 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1)} \right] \\
&= \pm \frac{\epsilon_0}{c} (E_1^0)^2 \hat{k} \left[\overline{\cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1)} + \overline{\sin^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1)} \right] = \pm \frac{\epsilon_0}{c} (E_1^0)^2 \hat{k} = \pm \frac{\bar{\omega}_{\text{em}}}{c} \hat{k}. \tag{9.58}
\end{aligned}$$

Zirkular polarisierte Wellen tragen also einen Eigendrehimpuls, wobei die Drehachse parallel zur Ausbreitungsrichtung orientiert ist. Dies bedeutet, dass ein zirkular polarisierter Lichtstrahl, der zentral auf einen absorbierenden Körper trifft, diesen in Rotation um die Strahlachse versetzen kann.

9.1.2 Green-Funktionen und Beugung

Mit Hilfe der Wellengleichungen für \vec{E} und \vec{B} und geeigneten Randbedingungen können wir nun die Bewegung elektromagnetischer Wellen beschreiben. Dabei interessiert uns meist *Dauerstrich*-Licht, im Unterschied zu gepulstem Licht. Im Dauerstrich-Fall können wir für jede Komponente $\psi(\vec{r}, t)$ von \vec{E} und \vec{B} die zeitliche und räumliche Abhängigkeit separieren:

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \tau(t). \tag{9.59}$$

Einsetzen in die Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \psi = 0 \tag{9.60}$$

ergibt

$$\psi(\vec{r}) \frac{1}{c^2} \tau''(t) - \tau(t) \nabla^2 \psi(\vec{r}) = 0 \tag{9.61}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\tau''(t)}{\tau(t)} = \frac{\nabla^2 \psi(\vec{r})}{\psi(\vec{r})} = \text{const} =: -k^2. \tag{9.62}$$

Die Zeitabhängigkeit ist einfach zu lösen:

$$\tau(t) = e^{\pm i\omega t} \quad \text{mit } \omega = kc. \tag{9.63}$$

Man betrachtet konventionell das negative Vorzeichen im Exponenten, wie im Ansatz für ebene Wellen. Also ist

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) e^{-i\omega t} \tag{9.64}$$

und $\psi(\vec{r})$ erfüllt

$$(\nabla^2 + k^2) \psi(\vec{r}) = 0. \tag{9.65}$$

Dies ist die *Helmholtz-Gleichung*.

Die Helmholtz-Gleichung kann analog zur Laplace- und Poisson-Gleichung in 3.6 mittels Green-Funktionen gelöst werden. Eine Green-Funktion für die Helmholtz-Gleichung ist eine in \vec{r} und \vec{r}' symmetrische Lösung der Gleichung

$$(\nabla^2 + k^2) G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (9.66)$$

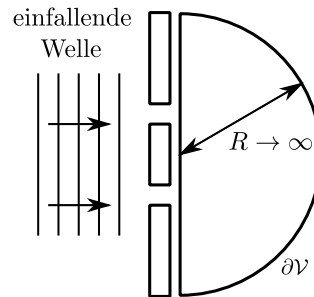
Da wir hier keine Ladungsdichte ρ betrachten, würde es nur unnötige Schreibarbeit produzieren, einen Faktor $1/\epsilon_0$ hinein zu definieren, wie in 3.6. Mit einer solchen Green-Funktion lässt sich die Lösung der Helmholtz-Gleichung schreiben als

$$\psi(\vec{r}) = - \iint_{\partial\mathcal{V}} ds' \left[\psi(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial n'} - G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \psi}{\partial n'} \right] = \iint_{\partial\mathcal{V}} ds' \left[G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \psi}{\partial n'} - \psi(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial n'} \right]. \quad (9.67)$$

Nun erfüllt $\psi(\vec{r})$ gewisse (Dirichlet- oder Neumann-) Randbedingungen auf dem Rand $\partial\mathcal{V}$. Dieser enthält neben dem Unendlichen Flächen (evtl. Oberflächen von Körpern) im Raum, die die Welle nicht durchdringen kann. Wir sollten die Green-Funktionen so wählen, dass auf der rechten Seite von Gl. (9.67) nur Größen übrig bleiben, die wir kennen. Das gelingt aber i. A. nicht; wir kennen weder die Komponenten von \vec{E} und \vec{B} auf der Fläche $\partial\mathcal{V}$, noch deren Normalenableitung. Die geschlossene Fläche besteht typischerweise aus drei Teilen:

- einem Abschnitt im Unendlichen, der für hinreichend schnell abfallende Felder und Green-Funktion nichts beiträgt und ignoriert wird,
- einem Abschnitt auf der Oberfläche von realen Körpern, die für die Welle undurchsichtig sind und
- einem Abschnitt im Endlichen, der nicht mit realen Oberflächen zusammenfällt, aber für die Vervollständigung einer geschlossenen Fläche notwendig ist.

Alle Abschnitte können aus mehreren unzusammenhängenden Teilen bestehen. Zum Beispiel für einen Doppelspalt im Querschnitt:



Kirchhoff hat nun folgende Näherung vorgeschlagen:

1. ψ und $\partial\psi/\partial n$ verschwinden an den Oberflächen der realen Körper und im Unendlichen,
2. auf den übrig bleibenden Teilen der Fläche sind ψ und $\partial\psi/\partial n$ allein durch die einfallende Welle gegeben.

Diese Forderungen sind mathematisch inkonsistent: Die Lösung der Helmholtz-Gleichung ist, wie die der Laplace-Gleichung, durch die Angabe von ψ oder $\partial\psi/\partial n$ auf der Oberfläche eindeutig bestimmt. Beide Angaben zusammen überbestimmen die Lösung und i. A. existiert keine. Man kann sogar zeigen, dass $\psi = 0$ und $\partial\psi/\partial n = 0$ auf irgendeiner endlichen Fläche erzwingt, dass $\psi \equiv 0$ im gesamten Volumen gilt, im Widerspruch zur zweiten Forderung. Andererseits ist die Näherung physikalisch nicht unvernünftig – sind die realen Körper Leiter, so fällt die elektromagnetische Welle in ihrem Inneren exponentiell ab, wie wir noch sehen werden. Auf Längenskalen groß gegenüber der entsprechenden Eindringtiefe liefert die Näherung sinnvolle Ergebnisse.

Dank der Kirchhoffschen Annahmen müssen wir die Green-Funktionen in Gl. (9.67) nicht mehr so wählen, dass uns unbekannte Größen verschwinden. Kirchhoffs Wahl für $G(\vec{r}, \vec{r}')$ resultiert aus seinem Wunsch, das *Huygenssche Prinzip* – jeder Punkt der Wellenfront ist Ausgangspunkt einer Kugelwelle – quantitativ zu fassen. Er wählte daher die Lösung, die einer auslaufenden Kugelwelle entspricht,

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}. \quad (9.68)$$

Wir zeigen noch, dass G die Gl. (9.66) erfüllt, also tatsächlich eine Green-Funktion für die Helmholtz-Gleichung ist:

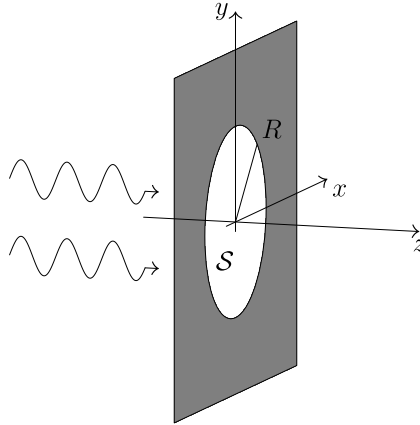
$$\begin{aligned}
(\nabla^2 + k^2)G(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{1}{4\pi} (\nabla^2 + k^2) \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \vec{R}} \right)^2 + k^2 \right] \frac{e^{ikR}}{R} \quad \left| \text{mit } \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' \right. \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{R} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{R}} \right)^2 e^{ikR} + 2 \left(\frac{\partial}{\partial \vec{R}} \frac{1}{R} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{R}} e^{ikR} + e^{ikR} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \vec{R}} \right)^2 \frac{1}{R}}_{=-4\pi \delta(\vec{R})} + k^2 \frac{e^{ikR}}{R} \right] \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{R^3} \frac{\partial}{\partial R} R^2 \frac{\partial}{\partial R} e^{ikR} + 2 \hat{R} \left(\frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \right) \cdot \hat{R} \frac{\partial}{\partial R} e^{ikR} + k^2 \frac{e^{ikR}}{R} \right] - \delta(\vec{R}) \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{ik}{R^3} \frac{\partial}{\partial R} R^2 e^{ikR} - 2 \frac{ik}{R^2} e^{ikR} + k^2 \frac{e^{ikR}}{R} \right] - \delta(\vec{R}) \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[\cancel{\frac{2ik}{R^2} e^{ikR}} - \cancel{\frac{k^2}{R} e^{ikR}} - \cancel{\frac{2ik}{R^2} e^{ikR}} + \cancel{\frac{k^2}{R} e^{ikR}} \right] - \delta(\vec{R}) \\
&= -\delta(\vec{r} - \vec{r}').
\end{aligned} \tag{9.69}$$

Einsetzen in Gl. (9.67) ergibt das *Kirchhoff-Integral* (hier wählt man den Normalenvektor konventionell nach *innen*, daher kehrt sich das Vorzeichen um)

$$\begin{aligned}
\psi(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi} \iint ds' \left(\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \hat{n}' \cdot \vec{\nabla}' \psi(\vec{r}') - \psi(\vec{r}') \hat{n}' \cdot \vec{\nabla}' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \\
&= -\frac{1}{4\pi} \iint ds' \hat{n}' \cdot \left(\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{\nabla}' \psi(\vec{r}') - \psi(\vec{r}') \frac{-ik(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|} - \psi(\vec{r}') e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|} \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi} \iint \underbrace{ds'}_{\text{nach innen}} \cdot \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \left[\vec{\nabla}' \psi(\vec{r}') + ik \left(1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \psi(\vec{r}') \right],
\end{aligned} \tag{9.70}$$

wobei das Integral wegen der ersten Forderung nur über die „freien“ Flächen im Endlichen geführt werden darf, also im Beispiel des Doppelspalts über die Spaltquerschnitte.

■ **Beispiel:** Bewegung an einer kreisförmigen Öffnung mit dem Radius R . Eine ebene Welle falle von links ein.



S bezeichne die Querschnittsfläche der Öffnung. Gemäß Kirchhoffs zweiter Annahme ist $\psi = E_x, E_y, B_x, B_y$ auf S räumlich konstant. Die Normalenableitung auf S ist

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial}{\partial z} \psi_0 e^{ikz} \right|_{z=0} = ik\psi_0 \tag{9.71}$$

(eine Phase wurde in ψ_0 absorbiert). Das Kirchhoff-Integral ergibt daher für den rechten Halbraum ($z > 0$):

$$\psi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S ds' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \left[ik\psi_0 + ik \left(1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \frac{\hat{z} \cdot (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \psi_0 \right]. \tag{9.72}$$

In Zylinderkoordinaten ρ, φ, z und unter Ausnutzung der Rotationssymmetrie finden wir

$$\psi(\vec{r}) = \psi(\rho, \varphi = 0, z) = -\frac{1}{4\pi} ik\psi_0 \int_0^R d\rho' \int_0^{2\pi} d\varphi' \rho' \frac{e^{ik\Delta r}}{\Delta r} \left[1 + \left(1 + \frac{i}{k\Delta r} \right) \frac{z}{\Delta r} \right] \quad (9.73)$$

mit

$$\Delta r = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\rho - \rho' \cos \varphi')^2 + (\rho' \sin \varphi')^2 + z^2} = \sqrt{\underbrace{\rho^2 + z^2}_{=r^2} - 2\rho\rho' \cos \varphi' + (\rho')^2}. \quad (9.74)$$

Das Integral ist schwierig allgemein auszuwerten. Wir betrachten hier als Grenzfall das *Fernfeld* für $r \gg \lambda = \frac{2\pi}{k}$ und $r \gg R$. Aus der letzten Ungleichung folgt $\rho' \ll r$ im gesamten Integrationsbereich. Wir können daher für kleine ρ'/r entwickeln:

$$\Delta r = r \sqrt{1 - \frac{2\rho\rho' \cos \varphi'}{r^2} + \frac{(\rho')^2}{r^2}} \cong r \left(1 - \frac{\rho\rho' \cos \varphi'}{r^2} \right) \quad (9.75)$$

und

$$\frac{1}{\Delta r} \cong \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\rho\rho' \cos \varphi'}{r^2} \right). \quad (9.76)$$

Außerdem können wir den Term mit $i/k\Delta r$ vernachlässigen, da $k\Delta r \cong kr \gg 1$. Das Kirchhoff-Integral lässt sich nun auswerten und ergibt, unter Fortlassung kleiner Terme,

$$\psi(\vec{r}) \cong -\psi_0 R \frac{ie^{ikr}(r+z)}{2r\rho} J_1 \left(\frac{kR\rho}{r} \right) \quad (9.77)$$

mit einer *Bessel-Funktion* $J_1(x)$. Wir fügen die Zeitableitung wieder hinzu und mitteln die Intensität der Welle über die Zeit:

$$\begin{aligned} \bar{I} &:= \overline{(\text{Re } \psi(\vec{r}, t))^2} \cong \left[\psi_0 R \frac{\sin(kr - \omega t)(r+z)}{2r\rho} J_1 \left(\frac{kR\rho}{r} \right) \right]^2 = \frac{\psi_0^2 R^2 (r+z)^2}{8r^2 \rho^2} J_1^2 \left(\frac{kR\rho}{r} \right) \\ &= \frac{\psi_0^2 R^2 (\sqrt{\rho^2 + z^2} + z)^2}{8(\rho^2 + z^2)\rho^2} J_1^2 \left(\frac{kR\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right). \end{aligned} \quad (9.78)$$

Wir betrachten zunächst zwei Grenzfälle:

1. $\rho \ll z$:

$$\bar{I} \cong \frac{\psi_0^2 R^2}{2\rho^2} J_1^2 \left(\frac{kR\rho}{z} \right). \quad (9.79)$$

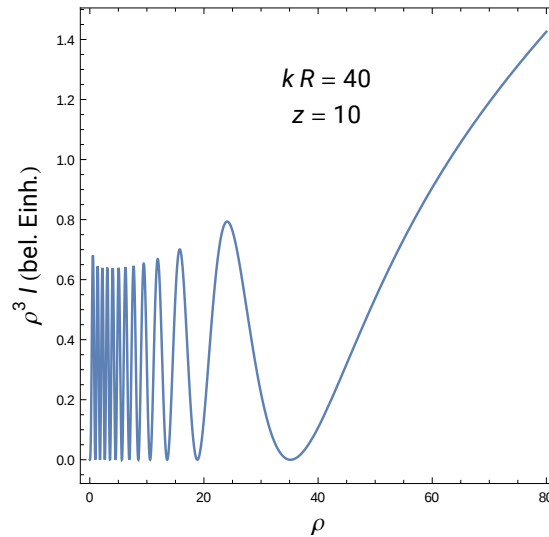
Die Bessel-Funktionen $J_n(x)$ oszillieren und die Einhüllende fällt mit $1/\sqrt{x}$ ab. Daher oszilliert \bar{I} als Funktion der radialen Koordinate ρ und fällt wie $1/\rho^3$ ab. Die Oszillationen sind umso schneller, je größer R ist; die Abstände der Beugungsmaxima gehen wie $1/R$.

2. $\rho \gg z$:

$$\bar{I} \cong \frac{\psi_0^2 R^2}{8\rho^2} J_1^2(kR). \quad (9.80)$$

Für große ρ fällt \bar{I} also ohne Oszillationen wie $1/\rho^3$ ab.

Um mehrere Maxima zu sehen, ist es günstig, $\rho^3 \bar{I}$ statt \bar{I} zu plotten:



9.2 Elektromagnetische Wellen in linearen Isolatoren

Die Herleitung für lineare, isotrope Medien startet von den Maxwell-Gleichungen (ohne freie Ladungen und Ströme) in Materie und ist sonst weitgehend analog. Die Gleichungen lauten unter Verwendung von $\vec{B} = \mu\vec{H}$ und $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (9.81)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}, \quad (9.82)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (9.83)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\epsilon\dot{\vec{E}}. \quad (9.84)$$

Nur das Ampère-Maxwell-Gesetz ist unterschiedlich; $\mu_0\epsilon_0$ ist durch $\mu\epsilon$ ersetzt. Wir schreiben

$$\mu\epsilon = \mu_r\mu_0\epsilon_r\epsilon_0 = \frac{\mu_r\epsilon_r}{c^2}. \quad (9.85)$$

In den Wellengleichungen für \vec{E} und \vec{B} ist einfach überall c durch

$$c_m := \frac{c}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} \quad (9.86)$$

ersetzt. Die *Lichtgeschwindigkeit im Medium* ist also c_m . In der Optik definiert man den *Brechungsindex* n durch

$$c_m =: \frac{c}{n}, \quad (9.87)$$

also finden wir

$$n = \sqrt{\mu_r\epsilon_r}. \quad (9.88)$$

In linearen, isotropen Medien verhalten sich elektromagnetische Wellen also ganz wie im Vakuum, nur propagieren sie mit der reduzierten Geschwindigkeit $c/\sqrt{\mu_r\epsilon_r}$. Für die meisten Isolatoren gilt bei optischen Frequenzen $\mu_r \approx 1$, also $n \approx \sqrt{\epsilon_r}$. Die Ergebnisse aus dem vorigen Abschnitt lassen sich leicht übertragen. So ist die Energiedichte

$$\omega_{\text{em}} = \frac{1}{2} \left(\epsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2 \right) \quad (9.89)$$

und der Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B}. \quad (9.90)$$

Das Ergebnis, dass sich lineare Nichtleiter hinsichtlich der Propagation elektromagnetischer Wellen so verhalten wie das Vakuum, nur mit geänderter Lichtgeschwindigkeit, ist nichttrivial. Mikroskopisch haben wir

es mit einer großen Zahl elektrischer und magnetischer Dipole zu tun, die vom Feld periodisch erzeugt oder ausgerichtet werden, und die selbst wieder \vec{E} - und \vec{B} -Felder abstrahlen, die die vorigen Dipole polarisieren. Dieses komplizierte System lässt sich dennoch leicht – nämlich durch Einstrahlung von Licht – in einen wohlorganisierten Wellenzustand bringen.

9.2.1 Brechung und Reflexion: Grundgesetze der geometrischen Optik

Unter Verwendung der Anschlussbedingungen für die Felder \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} , \vec{H} können wir jetzt herleiten, wie sich elektromagnetische Wellen an Grenzflächen zwischen linearen Isolatoren verhalten. In Abwesenheit freier Ladungen und Ströme an der Grenzfläche lauten die Anschlussbedingungen

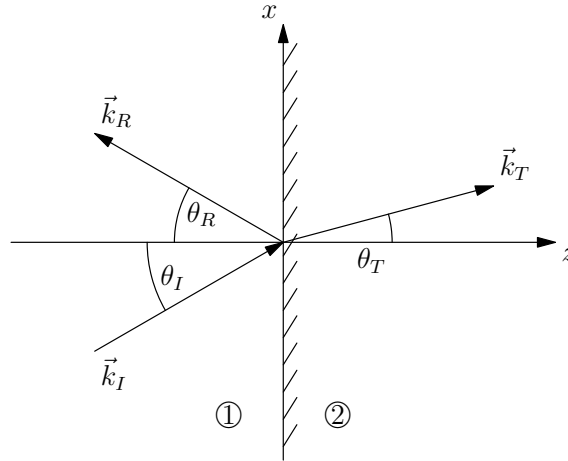
$$D_{n2} = D_{n1} \Rightarrow \epsilon_2 E_{n2} = \epsilon_1 E_{n1}, \quad (9.91)$$

$$\vec{E}_{t2} = \vec{E}_{t1}, \quad (9.92)$$

$$B_{n2} = B_{n1}, \quad (9.93)$$

$$\vec{H}_{t2} = \vec{H}_{t1} \Rightarrow \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_{t2} = \frac{1}{\mu_1} \vec{B}_{t1}. \quad (9.94)$$

Wir beschränken uns hier auf eine ebene Grenzfläche und einlaufende ebene linear polarisierte Wellen. O. b. d. A. liege die Grenzfläche in der xy -Ebene und sei der Halbraum $z < 0$ ($z > 0$) mit Medium 1 (2) gefüllt.



Aus Experimenten wissen wir, dass die Welle i. A. teilweise reflektiert und teilweise transmittiert wird. Wir setzen daher eine aus Medium 1 einlaufende Welle (Subskript „I“), eine reflektierte Welle („R“) und eine transmittierte Welle („T“) an. Alle drei müssen dieselbe Frequenz ω haben, da sonst die Anschlussbedingungen nicht für alle Zeiten t erfüllt werden können. Wir schreiben die drei Wellen als

$$\vec{E}_I(\vec{r}, t) = \vec{E}_I^0 e^{i(\vec{k}_I \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (9.95)$$

$$\vec{B}_I(\vec{r}, t) = \frac{1}{c_1} \hat{k}_I \times \vec{E}_I(\vec{r}, t), \quad (9.96)$$

$$\vec{E}_R(\vec{r}, t) = \vec{E}_R^0 e^{i(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (9.97)$$

$$\vec{B}_R(\vec{r}, t) = \frac{1}{c_1} \hat{k}_R \times \vec{E}_R(\vec{r}, t), \quad (9.98)$$

$$\vec{E}_T(\vec{r}, t) = \vec{E}_T^0 e^{i(\vec{k}_T \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (9.99)$$

$$\vec{B}_T(\vec{r}, t) = \frac{1}{c_2} \hat{k}_T \times \vec{E}_T(\vec{r}, t), \quad (9.100)$$

wobei $c_1 = c/n_1$ und $c_2 = c/n_2$ die Lichtgeschwindigkeiten in den beiden Medien sind. Es muss gelten

$$k_I c_1 = k_R c_1 = k_T c_2 = \omega \quad (9.101)$$

$$\Rightarrow k_I = k_R = \frac{c_2}{c_1} k_T = \frac{n_1}{n_2} k_T. \quad (9.102)$$

Damit wissen wir schon, wie sich die Wellenzahlen und die Wellenlängen in den beiden Medien zueinander verhalten.

Da der Faktor $e^{-i\omega t}$ in allen Feldkomponenten auftaucht, können wir ihn aus den Anschlussbedingungen heraus kürzen. Die Bedingung für \vec{E}_t lautet dann zum Beispiel

$$\vec{E}_{It}^0 e^{i\vec{k}_I \cdot \vec{r}} \Big|_{z=0} + \vec{E}_{Rt}^0 e^{i\vec{k}_R \cdot \vec{r}} \Big|_{z=0} = \vec{E}_{Tt}^0 e^{i\vec{k}_T \cdot \vec{r}} \Big|_{z=0} \quad (9.103)$$

$$\Rightarrow \hat{z} \times \vec{E}_I^0 e^{i\vec{k}_I \cdot \vec{r}} \Big|_{z=0} + \hat{z} \times \vec{E}_R^0 e^{i\vec{k}_R \cdot \vec{r}} \Big|_{z=0} = \hat{z} \times \vec{E}_T^0 e^{i\vec{k}_T \cdot \vec{r}} \Big|_{z=0}. \quad (9.104)$$

Dies muss für alle Punkte auf der Grenzfläche gelten, d. h. für alle x, y . Dafür müssen die Phasenfaktoren $e^{i\vec{k}_I \cdot \vec{r}}$, $e^{i\vec{k}_R \cdot \vec{r}}$ und $e^{i\vec{k}_T \cdot \vec{r}}$ für $z = 0$, aber beliebige x, y gleich sein. Dies erfordert

$$\vec{k}_I \cdot \vec{r} = \vec{k}_R \cdot \vec{r} = \vec{k}_T \cdot \vec{r} \quad (9.105)$$

für $z = 0$ und alle x, y . Daraus folgt Gleichheit der Koeffizienten

$$k_{Ix} = k_{Rx} = k_{Tx}, \quad (9.106)$$

$$k_{Iy} = k_{Ry} = k_{Ty}. \quad (9.107)$$

Nun können wir o. B. d. A. das Koordinatensystem so legen, dass der einfallende Wellenvektor \vec{k}_I in der xz -Ebene liegt (die Ebene, die von der Grenzflächennormale und \vec{k}_I aufgespannt wird, nennt man *Einfallsebene*). Also gilt $k_{Iy} = 0$ und es folgt $k_{Ry} = k_{Ty} = 0$; \vec{k}_R und \vec{k}_T liegen ebenfalls in der *Einfallsebene*.

Mit Hilfe der in der Skizze definierten positiven Winkel können wir nun schreiben

$$k_{Ix} = k_I \sin \theta_I, \quad (9.108)$$

$$k_{Rx} = k_R \sin \theta_R, \quad (9.109)$$

$$k_{Tx} = k_T \sin \theta_T. \quad (9.110)$$

Es folgt

$$k_I \sin \theta_I = k_R \sin \theta_R = k_T \sin \theta_T \quad (9.111)$$

und aus der ersten Gleichung, mit $k_I = k_R$,

$$\sin \theta_I = \sin \theta_R \quad (9.112)$$

$$\Rightarrow \theta_I = \theta_R, \quad (9.113)$$

da o. B. d. A. $\theta_I, \theta_R \in [0, \pi/2]$. Also gilt: *Der Reflexionswinkel ist gleich dem Einfallswinkel.*

Aus Gl. (9.111) folgt außerdem

$$\frac{\sin \theta_T}{\sin \theta_I} = \frac{k_I}{k_T} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (9.114)$$

Dies ist das bekannte *Snelliussche Brechungsgesetz*. Aus diesem ergibt sich die Möglichkeit der *Totalreflexion*: Falls $n_1 < n_2$ gilt, ist

$$\sin \theta_T = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_I < \sin \theta_I \leq 1 \quad (9.115)$$

und es existiert immer ein Transmissionswinkel θ_T . Ist dagegen $n_1 > n_2$ (Einfall aus dem optisch dichteren Medium), so existiert eine Lösung, und damit eine transmittierte Welle, nur, wenn

$$\sin \theta_T = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_I \leq 1 \quad (9.116)$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta_I \leq \frac{n_2}{n_1} \quad (9.117)$$

gilt. Der *Grenzwinkel* θ_G für *Totalreflexion* erfüllt also

$$\sin \theta_G = \frac{n_2}{n_1}. \quad (9.118)$$

Im Limes $\theta_I \rightarrow \theta_G^-$ wird $\sin \theta_T \rightarrow 1$, also $\theta_T \rightarrow \pi/2$, die transmittierte Welle läuft dann parallel zur Grenzfläche, wie bekannt.

Wir haben jetzt die drei Grundgesetze der geometrischen Optik im Rahmen der Elektrodynamik hergeleitet. Diese folgen auch schon aus den schwächeren Postulaten (a) der Wellengleichung mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten c_1, c_2 in den beiden Medien und (b) Stetigkeit an der Grenzfläche. Sie gelten also auch für andere lineare Wellen, z. B. Schallwellen.

9.2.2 Brechung und Reflexion: Polarisierte Wellen

Aus den spezifischen Eigenschaften *elektromagnetischer* Wellen ergeben sich zusätzliche Folgerungen: Wir setzen unseren Ansatz in die Anschlussbedingungen (9.91)–(9.94) ein und kürzen die identischen Exponentialfaktoren $e^{i(\vec{k}_I \cdot \vec{r} - \omega t)}$ usw. heraus. Es folgt

$$\epsilon_1(E_{Iz}^0 + E_{Rz}^0) = \epsilon_2 E_{Tz}^0, \quad (9.119)$$

$$(E_{Ix}^0 + E_{Rx}^0) = E_{Tx}^0, \quad (9.120)$$

$$(E_{Iy}^0 + E_{Ry}^0) = E_{Ty}^0, \quad (9.121)$$

$$(B_{Iz}^0 + B_{Rz}^0) = B_{Tz}^0, \quad (9.122)$$

$$\frac{1}{\mu_1} (B_{Ix}^0 + B_{Rx}^0) = \frac{1}{\mu_2} B_{Tx}^0, \quad (9.123)$$

$$\frac{1}{\mu_1} (B_{Iy}^0 + B_{Ry}^0) = \frac{1}{\mu_2} B_{Ty}^0. \quad (9.124)$$

Für alle Komponenten gilt $\vec{B}_0 = (1/c_{1,2}) \hat{k} \times \vec{E}_0$ und $\vec{E}_0 = -c_{1,2} \hat{k} \times \vec{B}_0$. Es ist sinnvoll, die beiden Polarisationskomponenten in der Einfallsebene (d. h. \vec{E}_I^0 in der Einfallsebene; *p-polarisiert*) und senkrecht zur Einfallsebene (d. h. \vec{E}_I^0 senkrecht zur Einfallsebene; *s-polarisiert*) getrennt zu untersuchen.

1. Fall: p-polarisierte Welle. Wir haben

$$E_{Iy}^0 = 0 \quad \text{und} \quad B_{Ix}^0 = B_{Iz}^0 = 0. \quad (9.125)$$

Dadurch vereinfachen sich die drei Anschlussbedingungen

$$E_{Ry}^0 = E_{Ty}^0, \quad (9.126)$$

$$B_{Rz}^0 = B_{Tz}^0, \quad (9.127)$$

$$\frac{1}{\mu_1} B_{Rx}^0 = \frac{1}{\mu_2} B_{Tx}^0. \quad (9.128)$$

Die \vec{B} -Amplitude der reflektierten Welle ist

$$\frac{1}{c_1} \hat{k}_R \times E_{Ry}^0 \hat{y} = \frac{E_{Ry}^0}{c_1} \begin{pmatrix} \sin \theta_R \\ 0 \\ -\cos \theta_R \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{E_{Ry}^0}{c_1} \begin{pmatrix} \cos \theta_R \\ 0 \\ \sin \theta_R \end{pmatrix} \quad (9.129)$$

$$\Rightarrow B_{Rx}^0 = \frac{E_{Ry}^0}{c_1} \cos \theta_R \quad \wedge \quad B_{Rz}^0 = \frac{E_{Ry}^0}{c_1} \sin \theta_R \quad (9.130)$$

und der transmittierten Welle

$$\frac{1}{c_2} \hat{k}_T \times E_{Ty}^0 \hat{y} = \frac{E_{Ty}^0}{c_2} \begin{pmatrix} \sin \theta_T \\ 0 \\ \cos \theta_T \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{E_{Ty}^0}{c_2} \begin{pmatrix} -\cos \theta_T \\ 0 \\ \sin \theta_T \end{pmatrix} \quad (9.131)$$

$$\Rightarrow B_{Tx}^0 = -\frac{E_{Ty}^0}{c_2} \cos \theta_T \quad \wedge \quad B_{Tz}^0 = \frac{E_{Ty}^0}{c_2} \sin \theta_T. \quad (9.132)$$

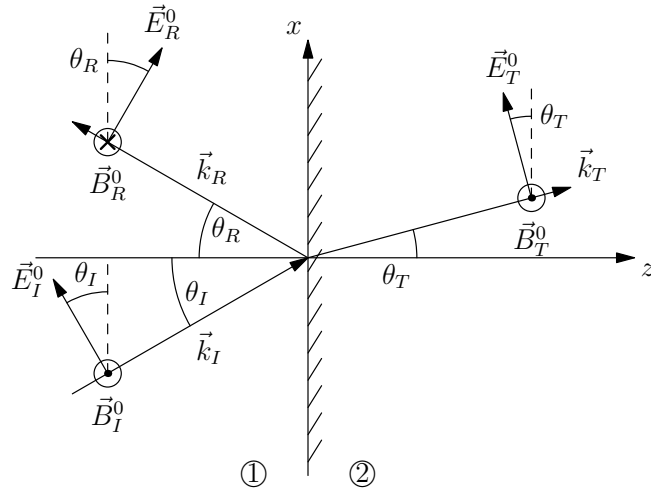
Aus Gl. (9.128) folgt damit

$$\frac{E_{Ry}^0}{\mu_1 c_1} \cos \theta_R = -\frac{E_{Ty}^0}{\mu_2 c_2} \cos \theta_T \quad (9.133)$$

und mit Gl. (9.126)

$$\frac{E_{Ry}^0}{\mu_1 c_1} \cos \theta_R = -\frac{E_{Ry}^0}{\mu_2 c_2} \cos \theta_T. \quad (9.134)$$

Da aber $\theta_R, \theta_T \in [0, \pi/2]$ per Konstruktion und $\mu_1, \mu_2, c_1, c_2 > 0$ gelten, muss $E_{Ry}^0 = 0$ folgen. Damit sind sofort auch $E_{Ty}^0 = 0$ und $B_{Rx}^0 = B_{Rz}^0 = B_{Tx}^0 = B_{Tz}^0 = 0$. Die reflektierte und die transmittierte Welle sind also ebenfalls p-polarisiert.



Gleichung (9.119) können wir schreiben als

$$\epsilon_1 (-E_I^0 \sin \theta_I + E_R^0 \sin \theta_R) = \epsilon_2 (-E_T^0 \sin \theta_T) \quad (9.135)$$

$$\Rightarrow \epsilon_1 (-E_I^0 \sin \theta_I + E_R^0 \sin \theta_I) = \epsilon_2 \left(-E_T^0 \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_I \right) \quad (9.136)$$

$$\Rightarrow E_I^0 - E_R^0 = \frac{\epsilon_2 n_1}{\epsilon_1 n_2} E_T^0 =: \beta E_T^0 \quad (9.137)$$

mit

$$\beta = \frac{\epsilon_2 n_1}{\epsilon_1 n_2} = \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_2}{\mu_2 \epsilon_1}} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}. \quad (9.138)$$

Gleichung (9.120) lässt sich schreiben als

$$E_I^0 \cos \theta_I + E_R^0 \cos \theta_R = E_T^0 \cos \theta_T \quad (9.139)$$

$$\Rightarrow E_I^0 \cos \theta_I + E_R^0 \cos \theta_I = E_T^0 \cos \theta_T \quad (9.140)$$

$$\Rightarrow E_I^0 + E_R^0 = \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I} E_T^0 =: \alpha E_T^0 \quad (9.141)$$

mit

$$\alpha = \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I}. \quad (9.142)$$

Wir haben nun zwei Gleichungen (9.137) und (9.141), die die drei Amplituden E_I^0 , E_R^0 und E_T^0 verknüpfen. Die Lösung für E_R^0 und E_T^0 ergibt die *Fresnel-Gleichungen* für p-polarisierte Wellen,

$$E_R^0 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} E_I^0, \quad (9.143)$$

$$E_T^0 = \frac{2}{\alpha + \beta} E_I^0. \quad (9.144)$$

Die transmittierte Welle ist immer in Phase mit der einfallenden, da $2/(\alpha + \beta) > 0$ gilt. Die reflektierte Welle kann in Phase (für $\alpha > \beta$) oder gegenphasig (für $\alpha < \beta$) zur einfallenden sein. Wichtiger ist die Beobachtung,

dass die Amplitude E_R^0 der reflektierten Welle verschwinden kann. Dies ist der Fall für

$$\alpha = \beta \quad (9.145)$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 \quad (9.146)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I} \equiv \frac{1 - \sin^2 \theta_T}{1 - \sin^2 \theta_I} \equiv \frac{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_I}{1 - \sin^2 \theta_I} = \beta^2 \quad (9.147)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_I = \beta^2 - \beta^2 \sin^2 \theta_I \quad (9.148)$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 - \beta^2 \right] \sin^2 \theta_I = 1 - \beta^2 \quad (9.149)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \theta_I = \frac{1 - \beta^2}{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 - \beta^2}. \quad (9.150)$$

Der Einfallswinkel, für den die reflektierte Amplitude E_R^0 verschwindet, ist der *Brewster-Winkel* θ_B . Wir haben also gefunden

$$\sin \theta_B = \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 - \beta^2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\mu_1 \epsilon_2}{\mu_2 \epsilon_1}}{\frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2} - \frac{\mu_1 \epsilon_2}{\mu_2 \epsilon_1}}} = \sqrt{\frac{(\mu_2 \epsilon_1 - \mu_1 \epsilon_2) \epsilon_2}{\mu_1 (\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)}}. \quad (9.151)$$

Diese Gleichung hat nicht immer eine Lösung für θ_B , z. B. nicht für

$$\epsilon_1 = 2, \mu_1 = 4, \epsilon_2 = 1, \mu_2 = 1, \quad (9.152)$$

denn dann folgt

$$\sin \theta_B = \sqrt{\frac{2 - 4}{4(4 - 1)}} = \sqrt{-\frac{1}{6}} \notin \mathbb{R}. \quad (9.153)$$

Ein anderes Gegenbeispiel ist

$$\epsilon_1 = 2, \mu_1 = 1, \epsilon_2 = 1, \mu_2 = 4, \quad (9.154)$$

so dass

$$\sin \theta_B = \sqrt{\frac{8 - 1}{4 - 1}} = \sqrt{\frac{7}{3}} > 1. \quad (9.155)$$

Das Brewster-Phänomen tritt aber nur dann *nicht* auf, wenn mindestens eines der Medien wie in den Beispielen stark magnetisch ist. Bei optischen Frequenzen haben aber praktisch alle überhaupt durchsichtigen Medien eine relative Permeabilität nahe bei 1. Falls $\mu_1 \approx \mu_2 \approx 1$, folgt aber $\beta \approx n_2/n_1$ und

$$\sin \theta_B \approx \sqrt{\frac{1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}}{\frac{n_1^2}{n_2^2} - \frac{n_2^2}{n_1^2}}} = \sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{\frac{n_1^4 - n_2^4}{n_2^2}}} = \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \quad (9.156)$$

$$\Rightarrow \cos \theta_B \approx \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \quad (9.157)$$

$$\Rightarrow \tan \theta_B \approx \frac{n_2}{n_1}. \quad (9.158)$$

Diese Gleichung hat für *alle* n_1, n_2 eine Lösung.

Da die p-polarisierte reflektierte Welle für $\theta_I = \theta_B$ verschwindet, die s-polarisierte aber nicht, wie wir noch sehen werden, ist die reflektierte Welle vollständig linear (s-) polarisiert.

Die Leistung einer elektromagnetischen Welle, die pro Flächeneinheit auf eine Fläche mit der Normalen \hat{n} trifft, ist $\vec{S} \cdot \hat{n}$ mit dem Poynting-Vektor \vec{S} . Für die Grenzfläche ist $\hat{n} = \hat{z}$. Die zeitgemittelte Leistung pro Flächeneinheit ist die Intensität

$$I = \overline{\vec{S}} \cdot \hat{n}. \quad (9.159)$$

Im gegebenen Fall sind die Intensitäten der Teilwellen

$$I_I = \frac{\epsilon_1 c_1}{2} (E_I^0)^2 \cos \theta_I, \quad (9.160)$$

$$I_R = \frac{\epsilon_1 c_1}{2} (E_R^0)^2 \cos \theta_R, \quad (9.161)$$

$$I_T = \frac{\epsilon_2 c_2}{2} (E_T^0)^2 \cos \theta_T. \quad (9.162)$$

Die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten sind über die Intensitäten definiert:

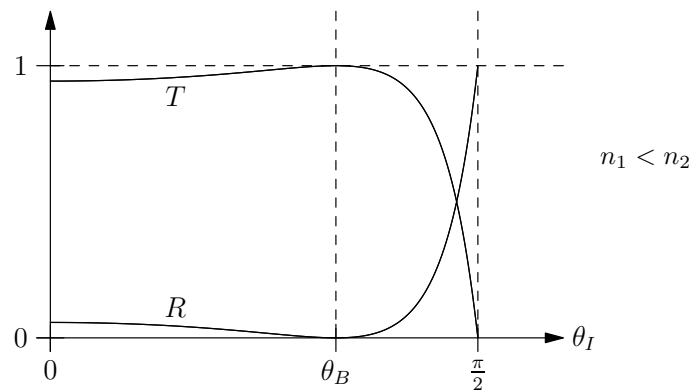
$$R := \frac{I_R}{I_I} = \left(\frac{E_R^0}{E_I^0} \right)^2 = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2, \quad (9.163)$$

$$T := \frac{I_T}{I_I} = \frac{\epsilon_2 c_2}{\epsilon_1 c_1} \left(\frac{E_T^0}{E_I^0} \right)^2 \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I} = \alpha \beta \left(\frac{2}{\alpha + \beta} \right)^2. \quad (9.164)$$

Diese Beziehungen werden auch manchmal Fresnel-Gleichungen genannt. Sie geben an, welcher Anteil der Welle, gemessen an der Energie, reflektiert bzw. transmittiert wird. Beachte

$$R + T = \frac{(\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2}{(\alpha + \beta)^2} = 1. \quad (9.165)$$

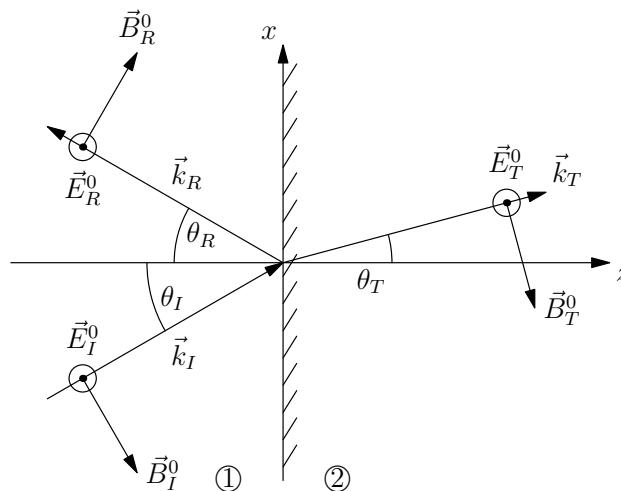
Diese Identität drückt aus, dass keine Energie verloren geht. Wir skizzieren noch die Koeffizienten R, T als Funktion des Einfallswinkels, hier für den Fall $n_1 < n_2$, also ohne Totalreflexion:



2. Fall: s-polarisierte Welle. Wir haben

$$E_{Ix}^0 = E_{Iz}^0 = 0 \quad \text{und} \quad B_{Iy}^0 = 0. \quad (9.166)$$

Analog zum 1. Fall kann man zeigen, dass auch die reflektierte und die transmittierte Welle s-polarisiert sind.



Gleichung (9.121) ergibt nun einfach

$$E_I^0 + E_R^0 = E_T^0 \quad (9.167)$$

und Gl. (9.123) ergibt

$$\frac{1}{\mu_1} (-B_I^0 \cos \theta_I + B_R^0 \cos \theta_R) = \frac{1}{\mu_2} (-B_T^0 \cos \theta_T) \quad (9.168)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu_1} (-B_I^0 \cos \theta_I + B_R^0 \cos \theta_I) = \frac{1}{\mu_2} (-B_T^0 \cos \theta_T) \quad (9.169)$$

$$\Rightarrow B_I^0 - B_R^0 = \frac{\mu_1}{\mu_2} \underbrace{\frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I}}_{=\alpha} B_T^0 \quad (9.170)$$

$$\Rightarrow E_I^0 - E_R^0 = c_1 \frac{\mu_1}{\mu_2} \alpha \frac{E_T^0}{c_2} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1} \alpha E_T^0 = \alpha \beta E_T^0. \quad (9.171)$$

Die Lösung ergibt die *Fresnel-Gleichungen* für s-polarisierte Wellen,

$$E_R^0 = \frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} E_I^0, \quad (9.172)$$

$$E_T^0 = \frac{2}{1 + \alpha\beta} E_I^0. \quad (9.173)$$

Die transmittierte Welle ist in Phase mit der einlaufenden, die reflektierte ist in Phase für $\alpha\beta < 1$ und gegenphasig für $\alpha\beta > 1$. Kann die reflektierte Welle verschwinden, d. h. existiert ein Brewster-Winkel? Dies würde erfordern, dass gilt

$$\alpha\beta = 1 \quad (9.174)$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{1}{\beta^2}. \quad (9.175)$$

Eine zum 1. Fall analoge Herleitung ergibt dann

$$\sin^2 \theta_B = \frac{1 - \frac{1}{\beta^2}}{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 - \frac{1}{\beta^2}} \quad (9.176)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^2 \theta_B} = \frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 - \frac{1}{\beta^2}}{1 - \frac{1}{\beta^2}} = \frac{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \beta^2}{1 - \beta^2}. \quad (9.177)$$

Hier ist die Situation umgekehrt zum 1. Fall: Eine Lösung für θ_B existiert *nur* für unrealistisch stark magnetische Medien. Ist $\mu_1 \approx \mu_2 \approx 1$, so wird wieder $\beta \approx n_2/n_1$ und damit

$$\frac{1}{\sin^2 \theta_B} \approx \frac{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{n_2^2}{n_1^2}}{1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}} = 0. \quad (9.178)$$

Da eine Lösung nur für $1/\sin^2 \theta_B \geq 1$ existiert, ist dies für realistische μ_1, μ_2 nicht der Fall, außer, wenn $n_1 = n_2$, aber dann existiert gar keine Grenzfläche und daher auch keine reflektierte Welle. Als Fazit stellen wir fest, dass in der Praxis die s-polarisierte reflektierte Welle immer auftritt.

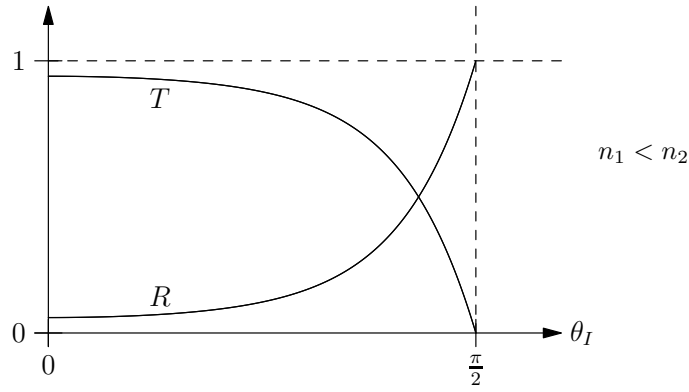
Für die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten erhalten wir

$$R = \left(\frac{E_R^0}{E_I^0}\right)^2 = \left(\frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta}\right)^2, \quad (9.179)$$

$$T = \frac{\epsilon_2 c_2}{\epsilon_1 c_1} \left(\frac{E_T^0}{E_I^0}\right)^2 \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I} = \alpha\beta \left(\frac{2}{1 + \alpha\beta}\right)^2. \quad (9.180)$$

Probe:

$$R + T = \frac{(1 - \alpha\beta)^2 + 4\alpha\beta}{(1 + \alpha\beta)^2} = \frac{(1 + \alpha\beta)^2}{(1 + \alpha\beta)^2} = 1. \quad (9.181)$$



Für den Fall von Totalreflexion scheinen unsere Überlegungen nicht zuzutreffen, da der Ansatz

$$\vec{E}_T(\vec{r}, t) = \vec{E}_T^0 e^{i(\vec{k}_T \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (9.182)$$

für die transmittierte Welle versagt. Es existiert kein reeller Wellenvektor \vec{k}_T in Medium 2! Es zeigt sich aber, dass der Ansatz auch dann funktioniert, nur werden einige zuvor reelle Größen nun komplex, was kein Problem darstellt, da wir ohnehin mit komplexen Lösungen gerechnet haben. Für die physikalischen Lösungen müssen wir immer am Ende den Realteil der Felder nehmen. (Der Ansatz hätte versagen können, da er aber durchgeht, wissen wir wegen der Eindeigkeitseigenschaft, dass er die richtige Lösung liefert.)

Totalreflexion tritt auf für $n_1 > n_2$ und $\theta_I > \theta_G$ mit $\sin \theta_G = \frac{n_2}{n_1} < 1$. Dann wird

$$\sin \theta_T = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_I = \frac{\sin \theta_I}{\sin \theta_G} > 1 \quad (9.183)$$

und damit existiert keine reelle Lösung für θ_T , wohl aber eine im Komplexen. Wir müssen θ_T nicht ausrechnen; neben $\sin \theta_T$ benötigen wir nur

$$\cos \theta_T = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_T} = \sqrt{1 - \underbrace{\left(\frac{\sin \theta_I}{\sin \theta_G}\right)^2}_{< 0}} = i \sqrt{\left(\frac{\sin \theta_I}{\sin \theta_G}\right)^2 - 1}, \quad (9.184)$$

was rein imaginär ist. Im Prinzip könnten wir als Teil unseres Ansatzes auch das umgekehrte Vorzeichen wählen. Dies würde im Folgenden zu unbeschränkten und daher unphysikalischen Lösungen führen. Der Wellenvektor \vec{k}_T wird nun

$$\begin{aligned} \vec{k}_T &= k_T \cos \theta_T \hat{z} + k_T \sin \theta_T \hat{x} \quad \left| \text{vgl. Skizze Seite 145} \right. \\ &= i k_T \sqrt{\left(\frac{\sin \theta_I}{\sin \theta_G}\right)^2 - 1} \hat{z} + k_T \frac{\sin \theta_I}{\sin \theta_G} \hat{x}. \end{aligned} \quad (9.185)$$

Das \vec{E} -Feld in Medium 2 erfüllt also

$$\vec{E}_T(\vec{r}, t) = \vec{E}_T^0 \exp\left(-\sqrt{\left(\frac{\sin \theta_I}{\sin \theta_G}\right)^2 - 1} k_T z\right) \exp\left(i \left[\frac{\sin \theta_I}{\sin \theta_G} k_T x - \omega t\right]\right). \quad (9.186)$$

Wir finden, dass die Welle in Medium 2 exponentiell gedämpft ist. Die Fresnel-Gleichungen behalten ihre Gültigkeit. Z. B. findet man für p-polarisierte Wellen

$$\frac{E_R^0}{E_I^0} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{\frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I} - \beta}{\frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I} + \beta} = -\frac{\beta \cos \theta_I - i \sqrt{\left(\frac{\sin \theta_I}{\sin \theta_G}\right)^2 - 1}}{\beta \cos \theta_I + i \sqrt{\left(\frac{\sin \theta_I}{\sin \theta_G}\right)^2 - 1}}. \quad (9.187)$$

Da $\beta = \mu_1 n_2 / \mu_2 n_1 \in \mathbb{R}$, sind Zähler und Nenner komplex konjugiert zueinander und haben daher denselben Betrag. Die reflektierte Welle hat dieselbe reelle Feldamplitude wie die einlaufende, wie für Totalreflexion erwartet. Weiter zeigt man leicht, dass für p- und s-polarisierte Wellen unter den Bedingungen der Totalreflexion immer $R = 1$ und $T = 0$ gilt.

Wir haben nun im Wesentlichen die gesamte klassische Optik auf die Elektrodynamik zurückgeführt. Damit haben wir das Ziel erreicht, die historisch getrennten Gebiete Elektrizität, Magnetismus und Optik im Rahmen einer vereinigten Theorie zu beschreiben.

9.3 Elektromagnetische Wellen in linearen Leitern

In diesem Abschnitt betrachten wir die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in linearen, isotropen Leitern. Diese sind durch die Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (9.188)$$

charakterisiert. Die elektrische und magnetische Polarisation sollen ebenfalls linear und isotrop von den entsprechenden Feldern abhängen. Dann lauten die Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}, \quad (9.189)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}, \quad (9.190)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (9.191)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\sigma \vec{E} + \mu\epsilon \dot{\vec{E}}, \quad (9.192)$$

wobei ρ und $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ freie Ladungen bzw. Ströme bezeichnen. Liegt nun zur Zeit $t = 0$ eine gewisse freie Ladungsdichte ρ vor, so entwickelt sie sich in der Zeit gemäß

$$\dot{\rho} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\sigma \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon} \rho \quad (9.193)$$

mit der Lösung

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, 0) e^{-(\sigma/\epsilon)t} = \rho(\vec{r}, 0) e^{-t/\tau}, \quad (9.194)$$

wobei

$$\tau := \frac{\epsilon}{\sigma} \quad (9.195)$$

eine charakteristische Zeit ist. Die anfangs vorhandene Ladung relaxiert also auf der Zeitskala τ gegen Null. Auch für komplizierte Phänomene wie Wellen erwarten wir, dass transiente Effekte auf der Zeitskala τ verschwinden. Eine naive Rechnung ergibt für ein gutes Metall $\tau \approx 10^{-19}$ s $\ll T$, wobei $T = 2\pi/\omega \approx 1,3 \times 10^{-15}$ s bis $2,3 \times 10^{-15}$ s die Periode sichtbaren Lichts ist. In Wirklichkeit bricht die makroskopische Elektrodynamik auf der Skala τ zusammen, dennoch können wir in guter Näherung annehmen, dass die freie Ladungsdichte verschwindet: $\rho \equiv 0$. Das Gaußsche Gesetz lautet dann $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ und die Maxwell-Gleichungen haben dieselbe Form wie in Isolatoren, bis auf das Ampère-Maxwell-Gesetz

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\sigma \vec{E} + \mu\epsilon \dot{\vec{E}}. \quad (9.196)$$

Der erste Term auf der rechten Seite tritt offensichtlich nur in Leitern auf.

Analog zu Abschnitt 9.1 erhalten wir aus den Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_0 - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \dot{\vec{B}} = -\mu\sigma \dot{\vec{E}} - \mu\epsilon \ddot{\vec{E}}, \quad (9.197)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}_0 - \vec{\nabla}^2 \vec{B} = \mu\sigma \vec{\nabla} \times \vec{E} + \mu\epsilon \vec{\nabla} \times \dot{\vec{E}} = -\mu\sigma \dot{\vec{B}} - \mu\epsilon \ddot{\vec{B}}. \quad (9.198)$$

Es folgen die *Telegraphengleichungen*

$$\left(\mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \vec{E} = 0, \quad (9.199)$$

$$\left(\mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \vec{B} = 0, \quad (9.200)$$

die im Vergleich zu den Wellengleichungen eine zusätzliche erste Zeitableitung enthalten. Wir machen wieder einen Ansatz ebener Wellen:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (9.201)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (9.202)$$

Einsetzen ergibt

$$-\mu\epsilon\omega^2 - i\mu\sigma\omega + \tilde{k}^2 = 0 \quad (9.203)$$

$$\Rightarrow \tilde{k}^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega. \quad (9.204)$$

Der Wellenvektor \tilde{k} ist also i. A. komplex. Wir setzen

$$\tilde{k} = \vec{k} + i\vec{\kappa} \quad (9.205)$$

mit $\vec{k}, \vec{\kappa} \in \mathbb{R}^3$. Dann ist

$$\tilde{k}^2 \equiv \tilde{k} \cdot \tilde{k} = k^2 - \kappa^2 + 2i\vec{k} \cdot \vec{\kappa} \quad (9.206)$$

$$\Rightarrow k^2 - \kappa^2 = \mu\epsilon\omega^2 \quad \wedge \quad 2\vec{k} \cdot \vec{\kappa} = \mu\sigma\omega \quad (9.207)$$

und

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-\vec{\kappa} \cdot \vec{r}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (9.208)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{-\vec{\kappa} \cdot \vec{r}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (9.209)$$

Für einen unendlich großen Leiter ist nur die triviale Lösung $\vec{E}_0, \vec{B}_0 = 0$ sinnvoll, da jede andere in gewisse Richtungen exponentiell anwächst. Relevant sind die Gleichungen also für den Fall, dass eine Welle aus einem Nichtleiter in den Leiter eindringt oder durch eine (von den Gleichungen nicht beschriebene) Quelle erzeugt wird.

Aus Gl. (9.207) folgt, dass $\vec{k} \cdot \vec{\kappa} > 0$ sein muss, aber i. A. gilt nicht $\vec{k} \parallel \vec{\kappa}$, z. B. wenn eine Welle schräg auf eine Leiteroberfläche fällt. Wir betrachten hier aber nur den Spezialfall $\vec{k} \parallel \vec{\kappa}$, der für senkrechten Einfall relevant ist. Wir wählen o. B. d. A. $\vec{k} = k\hat{z}$, $\vec{\kappa} = \kappa\hat{z}$, $k, \kappa > 0$. Dann folgt

$$k^2 - \kappa^2 = \mu\epsilon\omega^2 \quad \wedge \quad 2k\kappa = \mu\sigma\omega \quad (9.210)$$

$$\Rightarrow k^4 - k^2\kappa^2 = \mu\epsilon\omega^2 k^2 \quad \wedge \quad k^2\kappa^2 = \left(\frac{\mu\sigma\omega}{2}\right)^2 \quad (9.211)$$

$$\Rightarrow k^4 - \mu\epsilon\omega^2 k^2 - \left(\frac{\mu\sigma\omega}{2}\right)^2 = 0 \quad (9.212)$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{\mu\epsilon}{2} \omega^2 + \sqrt{\left(\frac{\mu\epsilon}{2}\right)^2 \omega^4 + \left(\frac{\mu\sigma}{2}\right)^2 \omega^2}$$

(Lösung mit $-$ ergibt $k^2 < 0$)

$$= \frac{\mu\epsilon}{2} \omega^2 + \frac{\mu\epsilon}{2} \omega^2 \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} = \frac{\mu\epsilon}{2} \omega^2 \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2}\right] \quad (9.213)$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \omega \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2}} \quad (9.214)$$

(andere Lösung ergibt $k < 0$)

und

$$\kappa^2 = k^2 - \mu\epsilon\omega^2 = \frac{\mu\epsilon}{2} \omega^2 \left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2}\right] \quad (9.215)$$

$$\Rightarrow \kappa = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \omega \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2}}. \quad (9.216)$$

Probe: Für $\sigma \rightarrow 0$ erhalten wir $k \rightarrow \sqrt{\mu\epsilon}\omega = \omega/c_{\text{Isolator}}$ und $\kappa \rightarrow 0$. Die Wellen

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)}, \quad (9.217)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)} \quad (9.218)$$

werden exponentiell abgeschwächt auf einer typischen Längenskala von

$$\delta = \frac{1}{\kappa}, \quad (9.219)$$

der *Skin-Tiefe* (oder „äquivalenten Leitschichtdicke“). Der Realteil k der Wellenzahl ist gegenüber Nichtleitern vergrößert, die Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ und die Phasengeschwindigkeit $c_{\text{Leiter}} = \omega/k$ sind also verringert. Insbesondere finden wir

$$c_{\text{Leiter}} = \sqrt{\frac{2}{\mu\epsilon}} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} \right]^{-1/2} = c_{\text{Isolator}} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} \right]^{-1/2}. \quad (9.220)$$

Der Brechungsindex $n = c/c_{\text{Leiter}}$ ist vergrößert. Im Grenzfall idealer Leiter ($\sigma \rightarrow \infty$) erhalten wir

$$\delta \cong \sqrt{\frac{2}{\mu\epsilon}} \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\epsilon\omega}{\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma}} \frac{1}{\sqrt{\omega}} \rightarrow 0, \quad (9.221)$$

$$k \cong \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \omega \sqrt{\frac{\sigma}{\epsilon\omega}} = \sqrt{\frac{\mu\sigma}{2}} \sqrt{\omega} \rightarrow \infty, \quad (9.222)$$

also $k\delta \cong 1$ und $\delta \cong \lambda/2\pi$ in diesem Limes, sowie

$$c_{\text{Leiter}} \cong \sqrt{\frac{2}{\mu\epsilon}} \sqrt{\frac{\epsilon\omega}{\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma}} \sqrt{\omega} \rightarrow 0. \quad (9.223)$$

Wegen $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ und $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ ist die Welle weiterhin transversal. Aus dem Faradayschen Gesetz erhalten wir

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)} = -\vec{B}_0 \frac{\partial}{\partial t} e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)} \quad (9.224)$$

$$\Rightarrow (-\kappa + ik)\hat{z} \times \vec{E}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)} = i\omega \vec{B}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)} \quad (9.225)$$

$$\Rightarrow \vec{B}_0 = \frac{k + i\kappa}{\omega} \hat{z} \times \vec{E}_0 = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E}_0. \quad (9.226)$$

Die \vec{E} - und \vec{B} -Felder stehen also weiterhin senkrecht aufeinander. Aber der Term $i\kappa$ sorgt für eine Phasenverschiebung zwischen \vec{E} und \vec{B} :

$$\vec{B}_0 = \frac{\sqrt{k^2 + \kappa^2}}{\omega} e^{i\phi} \hat{z} \times \vec{E}_0, \quad (9.227)$$

wobei

$$\tan \phi = \frac{\kappa}{k}. \quad (9.228)$$

Da $0 \leq \kappa < k$ ist $0 \leq \phi < \pi/4$. \vec{B} hinkt also gegenüber \vec{E} hinterher, aber höchstens um 45° . Diese maximale Phasenverschiebung tritt für $\sigma \gg \epsilon\omega$, also $\kappa \approx k$ auf.

Brechung und Reflexion können analog zu Grenzflächen zwischen Nichtleitern behandelt werden. Wir können aber die Existenz freier Flächenladungen und -ströme an der Grenzfläche nicht *a priori* ausschließen. Die Anschlussbedingungen lauten damit

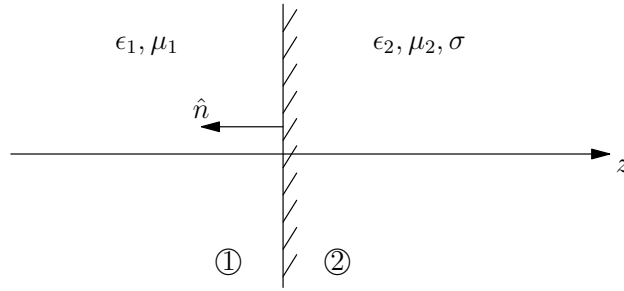
$$\epsilon_1 E_{n1} - \epsilon_2 E_{n2} = \sigma_t, \quad (9.229)$$

$$\vec{E}_{t2} = \vec{E}_{t1}, \quad (9.230)$$

$$B_{n2} = B_{n1}, \quad (9.231)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \vec{B}_{t1} - \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_{t2} = \vec{K}_f \times \hat{n}, \quad (9.232)$$

wobei $\hat{n} = -\hat{z}$ vom Medium 2 (Leiter) zum Medium 1 (Isolator) zeigt.



Für einen linearen Leiter muss $\vec{K}_f = 0$ gelten, sonst müsste \vec{E} unendlich groß sein, um eine divergente Volumenstromdichte $\vec{j}_f(\vec{r}, t) = \delta(z)\vec{K}_f(x, y, t)$ zu erzeugen. Wir betrachten nur senkrechten Einfall und wählen o. B. d. A. $\hat{k} = \hat{z}$ und $\vec{E}_1^0 = E_1^0 \hat{x}$. Zumindest nach Abklingen transientser Effekte ist dann $\sigma_f = 0$ und $\vec{E}_2^0 = E_2^0 \hat{x}$. Wir machen die Ansätze

$$\vec{E}_I(\vec{r}, t) = E_I^0 \hat{x} e^{i(k_I z - \omega t)}, \quad (9.233)$$

$$\vec{E}_R(\vec{r}, t) = E_R^0 \hat{x} e^{i(-k_R z - \omega t)}, \quad (9.234)$$

$$\vec{E}_T(\vec{r}, t) = E_T^0 \hat{x} e^{i(k_T z - \omega t)} \equiv E_T^0 \hat{x} e^{-\kappa z} e^{i(k_T z - \omega t)}. \quad (9.235)$$

Eine zu 9.2.1 analoge Herleitung liefert die Fresnel-Gleichungen

$$E_R^0 = \frac{\alpha - \tilde{\beta}}{\alpha + \tilde{\beta}} E_I^0 = \frac{1 - \tilde{\beta}}{1 + \tilde{\beta}} E_I^0, \quad (9.236)$$

$$E_T^0 = \frac{2}{\alpha + \tilde{\beta}} E_I^0 = \frac{2}{1 + \tilde{\beta}} E_I^0, \quad (9.237)$$

wobei, wegen des senkrechten Einfalls,

$$\alpha = \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I} = \frac{1}{1} = 1 \quad (9.238)$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{\beta} &= \frac{\mu_1 c_1}{\mu_2 \frac{\omega}{k_T}} = \frac{\mu_1 c_1}{\mu_2} \frac{k_T + i\kappa}{\omega} = \frac{1}{\mu_2} \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \sqrt{\frac{\mu_2 \epsilon_2}{2}} \left[\sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon_2 \omega}\right)^2}} + i \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon_2 \omega}\right)^2}} \right] \\ &= \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_2}{2 \mu_2 \epsilon_1}} \left[\sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon_2 \omega}\right)^2}} + i \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon_2 \omega}\right)^2}} \right]. \end{aligned} \quad (9.239)$$

Diese Größe ist komplex, was eine zusätzliche Phasenverschiebung der reflektierten und transmittierten Wellen impliziert. Für einen idealen Leiter ($\sigma \gg \epsilon_2 \omega$) folgern wir

$$\tilde{\beta} \cong \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_2}{\mu_2 \epsilon_1}} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sigma}{\epsilon_2 \omega}} = \sqrt{\frac{\mu_1 \sigma}{\mu_2 \epsilon_1}} \underbrace{\frac{1+i}{\sqrt{2}}}_{= e^{i\pi/4}} \frac{1}{\sqrt{\omega}} \rightarrow e^{i\pi/4} \infty \quad (9.240)$$

und damit aus den Fresnel-Gleichungen

$$E_R^0 \cong -E_I^0, \quad (9.241)$$

$$E_T^0 \cong 2 \sqrt{\frac{\mu_2 \epsilon_1}{\mu_1 \sigma}} e^{-i\pi/4} \sqrt{\omega} \rightarrow 0. \quad (9.242)$$

In diesem Fall finden wir also perfekte Reflexion mit einem Phasensprung von 180° . Aus diesem Grund stellt man Spiegel mit Hilfe guter Leiter her. Der Leiter muss nicht besonders dick sein, da die Skin-Tiefe δ sehr klein ist ($\approx 100 \text{ \AA}$). Eine dünne Silberschicht auf der Rückseite einer Glasplatte ergibt einen sehr guten Spiegel. Dabei hat die Glasplatte zum einen die Funktion, die dünne Schicht zu tragen (eine so dünne Metallfolie wäre sehr empfindlich), und sie schützt zum anderen die Silberoberfläche vor Oxidation (Anlaufen).

Kapitel 10

Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

In diesem Kapitel wollen wir die relativistische Formulierung der Elektrodynamik besprechen. Wir werden sehen, dass dies ein kleinerer Schritt ist als in der Mechanik. Die Maxwellsche Elektrodynamik ist nämlich schon mit der Speziellen Relativitätstheorie vereinbar, d. h. sie ist *Lorentz-invariant*, wenn wir die Felder \vec{E} , \vec{B} und die Quellterme ρ , \vec{j} korrekt transformieren. Es geht also hauptsächlich darum, dies zu zeigen und die Elektrodynamik „kovariant“, also unter Verwendung von Lorentz-Skalaren, Vierervektoren usw., zu formulieren. Historisch war die Maxwellsche Elektrodynamik die erste Lorentz-invariante (relativistische) Theorie. Die Erkenntnis dieser Invarianz war eine wesentliche Motivation für die Einsteinschen Postulate und die Entwicklung der relativistischen Mechanik, die zusammen mit der Elektrodynamik die spezielle Relativitätstheorie ausmachen. Das Ziel, nicht nur das elektromagnetische, sondern auch das Gravitationsfeld relativistisch zu beschreiben, führte schließlich auf die Allgemeine Relativitätstheorie. Wir werden zunächst wesentliche Konzepte und Schreibweisen der Speziellen Relativitätstheorie wiederholen, die schon in der Theoretischen Mechanik eingeführt wurden.

10.1 Spezielle Relativitätstheorie

Ein zentraler Begriff ist der des *Inertialsystems*. Ein Inertialsystem ist ein Bezugssystem, d. h. ein Koordinatensystem in der vierdimensionalen Raumzeit (dem *Minkowski-Raum*), in dem sich kräftefreie Körper geradlinig und gleichförmig bewegen. Die Existenz von Inertialsystemen wird von Newtons 1. Axiom postuliert. Einstein formulierte nun sinngemäß folgende Postulate:

1. *Äquivalenzpostulat*: Die physikalischen Gesetze sind in allen Inertialsystemen identisch. (Dieses Postulat ist noch nicht auf die relativistische Physik beschränkt.)
2. *Konstanz der Lichtgeschwindigkeit*: Die Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum ist zu allen Zeiten, an allen Orten und in jeder Raumrichtung gleich groß und insbesondere unabhängig von der Bewegung der Quelle. Damit ist $c = \text{const}$ ein physikalisches Gesetz im Sinne des Äquivalenzpostulats. Das 2. Postulat geht sogar darüber hinaus, da es $c = \text{const}$ auch für beschleunigte Bezugssysteme fordert. Es ist klar, dass die Elektrodynamik notwendig ist, um die Konsequenzen der Einsteinschen Postulate zu verstehen, da sie sich explizit auf elektromagnetische Wellen (Licht) beziehen.

In der Vorlesung Theoretische Mechanik wurde gezeigt, dass aus diesen Postulaten schon die Spezielle Relativitätstheorie konstruiert werden kann.

Die Transformation zwischen verschiedenen Inertialsystemen wird durch *allgemeine Lorentz-Transformationen* vermittelt. Diese bilden die *Lorentz-Gruppe* mit 6 Generatoren:

- Lorentz-Boosts für die Relativgeschwindigkeit \vec{v} in 3 unabhängigen Richtungen (bilden die *speziellen Lorentz-Transformationen*),
- räumliche Drehungen in 3 unabhängigen Ebenen.

Für Koordinaten \vec{r}, t im Inertialsystem \mathcal{S} und \vec{r}, \underline{t} im Inertialsystem $\underline{\mathcal{S}}$ lautet die spezielle Lorentz-Transformation (d. h. der Boost) für Relativgeschwindigkeit $\vec{v} = v \hat{x}$ (o. B. d. A.)

$$\underline{x} = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (10.1)$$

$$\underline{t} = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (10.2)$$

$$\underline{y} = y, \quad \underline{z} = z \quad (10.3)$$

und die Rücktransformation

$$x = \frac{\underline{x} + v\underline{t}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (10.4)$$

$$t = \frac{\underline{t} + \frac{v}{c^2}\underline{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (10.5)$$

Die Lorentz-Transformationen lassen sich als verallgemeinerte Rotationen von Vierervektoren auffassen. Den Viererortsvektor schreiben wir als

$$(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r}). \quad (10.6)$$

Wir verwenden hier die Schreibweise (x^μ) , wenn wir den *Vektor* meinen, und x^μ für die μ -te *Komponente*. Damit ist die obige spezielle Lorentz-Transformation

$$\underline{x}^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (10.7)$$

wobei wir die Einsteinsche Summenkonvention verwendet haben: Über identische obere und untere Indizes in Produkten wird summiert, hier über $\nu = 0, 1, 2, 3$. Konkret ist

$$(L^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.8)$$

mit

$$\beta := \frac{v}{c}, \quad (10.9)$$

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (10.10)$$

Die Reihenfolge der oberen und unteren Indizes ist wichtig, wie wir sehen werden; „ $L^\mu{}_\nu$ “ wäre uneindeutig und ist daher nicht wohlgeformt.

Weitere Definitionen:

- *Kontravarianter Vektor* $(a^\mu) = (a^0, a^1, a^2, a^3)$: Transformiert sich wie der Ortsvektor (x^μ) ,

$$\underline{a}^\mu = \frac{\partial \underline{x}^\mu}{\partial x^\nu} a^\nu \equiv L^\mu{}_\nu a^\nu. \quad (10.11)$$

- *Kovarianter Vektor* $(a_\mu) = (a_0, a_1, a_2, a_3)$: Transformiert sich gemäß

$$\underline{a}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \underline{x}^\mu} a_\nu =: L_\mu{}^\nu a_\nu. \quad (10.12)$$

Es folgt mit Hilfe der Kettenregel

$$L^\mu{}_\nu L_\lambda{}^\nu = \frac{\partial \underline{x}^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \underline{x}^\lambda} = \frac{\partial \underline{x}^\mu}{\partial \underline{x}^\lambda} = \delta_\lambda^\mu, \quad (10.13)$$

wobei δ_λ^μ bis auf die Stellung der Indizes das gewöhnliche Kronecker-Symbol ist. In diesem Sinne sind die Matrizen $(L^\mu{}_\nu)$ und $(L_\mu{}^\nu)$ Inverse voneinander.

- Allgemeiner definiert man Tensoren 2., 3., usw. Stufe, wobei jeder Index kontra- oder kovariant sein kann. Z. B. transformiert sich $(A^{\mu\nu})$ gemäß

$$\underline{A}^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\sigma} A^{\rho\sigma} \equiv L^\mu{}_\rho L^\nu{}_\sigma A^{\rho\sigma} \quad (10.14)$$

und analog

$$\underline{A}_{\mu\nu} = L^\mu{}_\rho L^\nu{}_\sigma A_{\rho\sigma}, \quad (10.15)$$

$$\underline{A}^\mu{}_\nu = L^\mu{}_\rho L^\nu{}_\sigma A^\rho{}_\sigma, \quad (10.16)$$

$$\underline{A}_\mu{}^\nu = L^\mu{}_\rho L^\nu{}_\sigma A_\rho{}^\sigma. \quad (10.17)$$

Die Reihenfolge der Indizes ist wesentlich. Tensoren höherer Stufe benötigen wir hier nicht; die Transformation sind aber analog, z. B. $\underline{B}^{\lambda\mu\nu} = L^\lambda{}_\rho L^\mu{}_\sigma L^\nu{}_\tau B^{\rho\sigma\tau}$. Zu jedem kontravarianten Vektor existiert ein kovarianter Vektor und umgekehrt. Allgemeiner kann man alle Indizes von Tensoren zwischen kontravariant und kovariant umwandeln („heben“ oder „senken“). Dies erfolgt mit Hilfe des *metrischen Tensors* $(g_{\mu\nu})$:

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu, \quad (10.18)$$

$$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu, \quad (10.19)$$

$$A_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} A^\rho{}_\nu = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} A^{\rho\sigma} = g_{\nu\sigma} A_\mu{}^\sigma \quad (10.20)$$

usw. In der Speziellen Relativitätstheorie ist

$$(g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (10.21)$$

konstant in Raum und Zeit. Aus $(x^\mu) = (ct, \vec{r})$ folgt also

$$(x_\mu) = (ct, -\vec{r}). \quad (10.22)$$

In der Allgemeinen Relativitätstheorie ist $(g^{\mu\nu}(x^\lambda))$ hingegen ein dynamisches Feld.

- Das (verallgemeinerte) *Skalarprodukt* ist definiert durch

$$a^\mu b_\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = g_{\nu\mu} a^\mu b^\nu = a_\nu b^\nu. \quad (10.23)$$

Man findet

$$\underline{a}^\mu \underline{b}_\mu = L^\mu{}_\nu L_\mu{}^\lambda a^\nu b_\lambda \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\mu} a^\nu b_\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\nu} a^\nu b_\lambda = a^\nu b_\nu. \quad (10.24)$$

Das Skalarprodukt ist also invariant unter Lorentz-Transformationen (*Lorentz-invariant*).

- *Lorentz-Skalare* sind Größen, die sich unter Lorentz-Transformationen nicht ändern, z. B. Skalarprodukte.
- *Betragsquadrat*:

$$a^\mu a_\mu = g_{\mu\nu} a^\mu a^\nu = (a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2, \quad (10.25)$$

z. B. $x^\mu x_\mu = c^2 t^2 - \vec{r} \cdot \vec{r}$. Beachte, dass dieses (verallgemeinerte) Betragsquadrat negativ werden kann. Wir nennen einen Vierervektor (a^μ)

- *zeitartig*, wenn $a^\mu a_\mu > 0$,
- *lichtartig*, wenn $a^\mu a_\mu = 0$,
- *raumartig*, wenn $a^\mu a_\mu < 0$.

- *Vierergredient*:

$$\left(\frac{\partial}{\partial a^\mu} \right), \quad (10.26)$$

dieser Vektoroperator transformiert sich gemäß der Kettenregel wie

$$\frac{\partial}{\partial a^\mu} = \frac{\partial a^\nu}{\partial a^\mu} \frac{\partial}{\partial a^\nu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial a^\nu} = L_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial a^\nu}. \quad (10.27)$$

Vergleich mit Gl. (10.12) zeigt, dass sich die Ableitung nach einem *kontravarianten* Vektor wie ein *kovarianter* Vektor transformiert. Umgekehrt ist $\left(\frac{\partial}{\partial a^\mu}\right)$ ein *kontravarianter* Vektor. Speziell für raumzeitliche Gradienten schreiben wir

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (\text{kovariant}), \quad (10.28)$$

$$\partial^\mu := \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad (\text{kontravariant}). \quad (10.29)$$

Es ist

$$(\partial_\mu) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right), \quad (10.30)$$

$$(\partial^\mu) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right). \quad (10.31)$$

Beachte die umgekehrten Vorzeichen im Vergleich zu $(x_\mu) = (ct, -\vec{r})$, $(x^\mu) = (ct, \vec{r})$.

- *D'Alembert-Operator*:

$$\square := \partial_\mu \partial^\mu = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (10.32)$$

- Die *Eigenzeit* τ ist die von einer Uhr angezeigte Zeit, die von einem Massenpunkt mitgeführt wird. Diese Uhr befindet sich daher i. A. nicht in einem Inertialsystem. Für das Differential $d\tau$ der Eigenzeit gilt

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} \quad (10.33)$$

mit $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, wobei $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ hier die *momentane* Geschwindigkeit des Massenpunktes in einem gegebenen Inertialsystem (z. B. dem Laborsystem) mit den Koordinaten ct, \vec{r} ist. Die Beziehung beschreibt die *Zeitdilatation*: Es ist $\gamma > 1$ für $\vec{v} \neq 0$, daher läuft die mitgeführte Uhr (Eigenzeit) langsamer als die Laboruhr.

- Die *Vierergeschwindigkeit* ist

$$(u^\mu) := \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \left(\gamma \frac{dct}{dt}, \gamma \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = (\gamma c, \gamma \vec{v}). \quad (10.34)$$

- Der *Viererimpuls* ist

$$(p^\mu) := (mu^\mu). \quad (10.35)$$

Mit m bezeichnen wir immer die Ruhemasse, wir verwenden kein Konzept einer „geschwindigkeitsabhängigen Masse“. Man findet leicht

$$p^\mu p_\mu = m^2 u^\mu u_\mu = \gamma^2 m^2 (c^2 - \vec{v}^2) = \gamma^2 m^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = m^2 c^2. \quad (10.36)$$

Wir schreiben

$$(p^\mu) = (p^0, \vec{p}), \quad (10.37)$$

dann ist

$$p^\mu p_\mu = (p^0)^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2 \quad (10.38)$$

$$\Rightarrow (p^0)^2 = m^2 c^2 + \vec{p}^2 \quad (10.39)$$

$$\Rightarrow p^0 c = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}. \quad (10.40)$$

Der Limes für $v \ll c$ ergibt

$$p^0 c = mc^2 \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2 c^2}} \cong mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m}, \quad (10.41)$$

also die Ruheenergie mc^2 plus die nichtrelativistische kinetische Energie. Es liegt daher nahe, $p^0 c$ als relativistische Verallgemeinerung der Gesamtenergie des freien Teilchens zu betrachten:

$$E := \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2} \Rightarrow E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2. \quad (10.42)$$

Beachte, dass E die 0-Komponente eines Vierervektors ist und kein Lorentz-Skalar. E hängt also vom Inertialsystem ab, wie man auch erwartet.

Allgemein sollten physikalische Gesetze *kovariant formuliert* werden, d. h., sie sollten nur Lorentz-Skalare, Vierervektoren und entsprechende höhere Tensoren enthalten. Dann erfüllen sie automatisch die Einsteinschen Postulate. Es ist eine Schwäche der relativistischen Newton-Mechanik, dass sie mit nicht kovarianten Größen, wie der Energie E , operiert. Die Formulierung der Elektrodynamik, die wir nun besprechen werden, leidet nicht unter diesem Problem.

10.2 Viererdarstellung der Elektrodynamik

Die Maxwell-Gleichungen allein gestatten noch keine Entscheidung, ob die Maxwellsche Elektrodynamik Lorentz-invariant ist. Zusätzlich müssen wir ermitteln, wie sich die darin vorkommenden Felder \vec{E} , \vec{B} , ρ und \vec{j} Lorentz-transformieren. Mit anderen Worten, wir müssen diese Größen als Lorentz-Skalare, Vierervektoren und evtl. höhere Tensoren identifizieren. Wir verwenden weiterhin SI-Einheiten. Manche Autoren, wie J. D. Jackson, bevorzugen Gaußsche Einheiten für die relativistische Formulierung, da dann weniger Faktoren $1/c$ auftreten.

10.2.1 Die Kontinuitätsgleichung

Wir starten mit der für die Elektrodynamik grundlegenden Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0; \quad (10.43)$$

Ladungserhaltung sollte ja sicherlich in jedem Inertialsystem gleichermaßen gelten (1. Postulat). Die linke Seite hat die Form einer *Viererdivergenz*, wir können nämlich schreiben

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (10.44)$$

mit der *Viererstromdichte*

$$(j^\mu) := (\rho c, \vec{j}). \quad (10.45)$$

Die Kontinuitätsgleichung ist demnach Lorentz-invariant, wenn sich ρ und \vec{j} tatsächlich wie die zeitlichen bzw. räumlichen Komponenten eines Vierervektors transformieren, d. h. wenn

$$\underline{j}^\mu = L^\mu_\nu j^\nu \quad (10.46)$$

gilt. Dass das so ist, können wir uns wie folgt plausibel machen: Wir betrachten eine sich mit der lokalen Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r}, t)$ gegenüber dem Laborsystem \mathcal{S} bewegende Ladungsdichte

$$\rho = \frac{dQ}{dV}. \quad (10.47)$$

Die Stromdichte ist, unter der Annahme *einer* Teilchensorte (das Argument lässt sich verallgemeinern),

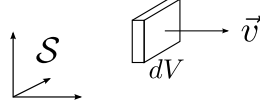
$$\vec{j} = \rho \vec{v}. \quad (10.48)$$

Wir wollen nun ρ und \vec{j} durch die *mitbewegte* Ladungsdichte ρ_0 ausdrücken, d. h. durch die Ladungsdichte in dem Bezugssystem, in dem dQ ruht. Es sei

$$\rho_0 = \frac{dQ}{dV_0}. \quad (10.49)$$

Aus Sicht des Laborsystems ist das Volumenelement in Bewegungsrichtung längenkontrahiert. Daher ist

$$dV = \frac{dV_0}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dV_0. \quad (10.50)$$



Damit ist die Dichte im Laborsystem erhöht:

$$\rho = \frac{dQ}{dV} = \gamma \frac{dQ}{dV_0} = \gamma \rho_0. \quad (10.51)$$

Es folgt auch

$$\vec{j} = \gamma \rho_0 \vec{v}. \quad (10.52)$$

Also ist

$$(j^\mu) = (\rho c, \vec{j}) = \rho_0 (\gamma c, \gamma \vec{v}) = \rho_0 (u^\mu) \quad (10.53)$$

mit der Vierergeschwindigkeit (u^μ). Da ρ_0 vorgegeben ist, transformiert sich (j^μ) wie (u^μ), also als Vierervektor.

10.2.2 Potentiale

Das Transformationsverhalten der sechs Feldkomponenten \vec{E} , \vec{B} ist nicht offensichtlich – wie sollen wir *sechs* Größen in Skalaren (eine Komponente), Vektoren (vier Komponenten) und Tensoren (16 Komponenten) unterbringen? Es ist günstig, zunächst die Potentiale ϕ , \vec{A} zu betrachten. Da dies vier Größen sind, von denen drei einen räumlichen Vektor bilden, liegt es nahe zu vermuten, dass sich ϕ und \vec{A} als Vierervektor schreiben lassen.

Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen lauten, ausgedrückt durch Potentiale, siehe Abschnitt 8.4,

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (10.54)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \dot{\phi} \right) = -\mu_0 \vec{j}. \quad (10.55)$$

Etwas umgeschrieben erhalten wir

$$-\frac{1}{\mu_0 c} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi + \dot{\vec{A}}) = \rho c, \quad (10.56)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \partial_\mu \partial^\mu \vec{A} + \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c^2} \dot{\phi} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) = \vec{j}. \quad (10.57)$$

Da die rechten Seiten einen Vierervektor $(\rho c, \vec{j})$ bilden, müssen dies auch die linken Seiten tun. Der Term $\dot{\phi}/c^2 + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ legt nahe, ein *Viererpotential*

$$(A^\mu) := \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right) \quad (10.58)$$

einzuführen, denn dann ist

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\phi}{c} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{c^2} \dot{\phi} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}. \quad (10.59)$$

Wir wollen die Gleichungen (10.56) und (10.57) mit (∂^μ) und (A^μ) ausdrücken. Wir betrachten dazu die spezielle zweite Ableitung $\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu$. Die zeitliche Komponente ($\nu = 0$) lautet

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu \frac{\phi}{c} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \dot{\phi} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) &= \cancel{\frac{1}{c^3} \dot{\phi}} - \frac{1}{c} \nabla^2 \phi - \cancel{\frac{1}{c^3} \dot{\phi}} - \frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{A}} \\ &= -\frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi + \dot{\vec{A}}) \stackrel{(10.56)}{=} \mu_0 \rho c \end{aligned} \quad (10.60)$$

und die räumlichen Komponenten ($\nu = 1, 2, 3$)

$$\partial_\mu \partial^\mu \vec{A} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c^2} \dot{\phi} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) \stackrel{(10.57)}{=} \mu_0 \vec{j}. \quad (10.61)$$

Damit haben wir gefunden

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \mu_0 j^\nu. \quad (10.62)$$

Wie schon gesagt, steht auf der rechten Seite ein Vierervektor und daher ist auch die linke Seite ein Vierervektor. Außerdem sind die Gradienten (∂_μ) und (∂^μ) Vierervektoren. Daraus folgt, dass sich $(A^\mu) = (\phi/c, \vec{A})$ ebenfalls als Vierervektor transformiert, evtl. bis auf einen Term, der unter den Ableitungen wegfällt. Aber auf jeden Fall können wir die Lösung für (A^μ) als Vierervektor *wählen*.

Wir können auch leicht die allgemeine Eichtransformation kovariant ausdrücken:

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\chi, \quad (10.63)$$

$$\phi \rightarrow \phi - \dot{\chi} \quad (10.64)$$

ist einfach

$$A^\mu \rightarrow A^\mu - \partial^\mu \chi. \quad (10.65)$$

Allgemeine Eichtransformationen sind also mit der Lorentz-Invarianz verträglich, solange sich χ als Lorentz-Skalar transformiert, d. h. unter Lorentz-Transformation invariant bleibt.

Die speziellen Eichungen, die wir im letzten Kapitel besprochen hatten, sehen in Viererschreibweise wie folgt aus:

1. Coulomb-Eichung: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ bedeutet

$$\partial_1 A^1 + \partial_2 A^2 + \partial_3 A^3 = 0. \quad (10.66)$$

Das ist nicht Lorentz-invariant, da die 0-Komponente fehlt. Die Coulomb-Eichung in einem Inertialsystem ist also i. A. keine Coulomb-Eichung in einem anderen Inertialsystem.

2. Lorenz-Eichung: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \dot{\phi}/c^2 = 0$ lässt sich schreiben als

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (10.67)$$

Das ist offensichtlich Lorentz-invariant. Die Lorenz-Eichung bleibt also unter Lorentz-Transformation erhalten.

10.2.3 Der Feldstärketensor

Der in der (nun einzigen) inhomogenen Maxwell-Gleichung

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \mu_0 j^\nu \quad (10.68)$$

aufretende Tensor

$$F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (10.69)$$

wird *Feldstärketensor* genannt. Damit lautet die Gleichung

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu. \quad (10.70)$$

Dies impliziert wieder die Kontinuitätsgleichung und damit Ladungserhaltung: Aus der inhomogenen Gleichung folgt

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 \partial_\nu j^\nu. \quad (10.71)$$

Auf der linken Seite ist $(\partial_\mu \partial_\nu)$ symmetrisch und $(F^{\mu\nu})$ nach der Definition (10.69) antisymmetrisch. Daher gilt $\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = -\partial_\nu \partial_\mu F^{\nu\mu} = -\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu}$ (Umbenennung der Summationsindizes!) und die linke Seite muss verschwinden. Es folgt die Kontinuitätsgleichung $0 = \partial_\nu j^\nu$.

Wir bestimmen die Komponenten von $(F^{\mu\nu})$ explizit:

- Es ist offensichtlich

$$F^{00} = F^{11} = F^{22} = F^{33} = 0. \quad (10.72)$$

- Für die gemischt zeitlich-räumlichen Komponenten erhalten wir

$$\begin{aligned} F^{0i} &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A^i + \nabla_i \frac{\phi}{c} \quad \Big| \quad i = 1, 2, 3 \\ &= \frac{1}{c} (\nabla_i \phi + \dot{A}^i) = -\frac{1}{c} E_i \end{aligned} \quad (10.73)$$

und analog

$$\begin{aligned} F^{i0} &= -\nabla_i \frac{\phi}{c} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A^i \quad \Big| \quad i = 1, 2, 3 \\ &= -\frac{1}{c} (\nabla_i \phi + \dot{A}^i) = \frac{1}{c} E_i. \end{aligned} \quad (10.74)$$

- Für die rein räumlichen, nicht diagonalen Komponenten finden wir

$$\begin{aligned} F^{ij} &= -\nabla_i A^j + \nabla_j A^i \quad \Big| \quad i = 1, 2, 3, i \neq j \\ &= -\sum_k \epsilon_{ijk} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = -\sum_k \epsilon_{ijk} B_k. \end{aligned} \quad (10.75)$$

Das ist leichter an einem Beispiel zu verstehen:

$$F^{12} = -\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} = -B_z. \quad (10.76)$$

(Die Komponenten von Dreiervektoren bezeichnen wir immer mit *unteren* Indizes.)

Damit erhalten wir insgesamt

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.77)$$

Die zusammen mit \vec{E} auftretenden Faktoren $1/c$ sind dem (SI-) Einheitensystem geschuldet. In Gaußschen Einheiten treten sie nicht auf. Jedenfalls wäre es falsch, zu folgern, dass die \vec{E} enthaltenden Terme wegen dieser Faktoren „klein“ seien. Der Feldstärketensor ist per Definition antisymmetrisch, wie wir jetzt auch explizit sehen. Eine antisymmetrische 4×4 -Matrix hat sechs unabhängige Komponenten, was erklärt, warum \vec{E} und \vec{B} zusammen in drei Raumdimensionen sechs Komponenten haben. Allgemein in d Raumdimensionen wären es nicht $2d$ Komponenten, sondern $d(d+1)/2$ mit d im elektrischen Feld und $d(d-1)/2$ im magnetischen Feld. $d = 3$ Dimensionen sind also dadurch ausgezeichnet, dass \vec{E} - und \vec{B} -Feld gleich viele Komponenten haben. (Dies erinnert an die nicht relativistische klassische Mechanik, in der der Impuls d Komponenten hat, der Drehimpuls aber $d(d-1)/2$. Dies liegt daran, dass Translationen in d Raumrichtungen existieren, aber Rotationen in $d(d-1)/2$ Ebenen.)

Damit wissen wir jetzt, wie sich \vec{E} und \vec{B} Lorentz-transformieren, nämlich als Komponenten des Tensors 2. Stufe ($F^{\mu\nu}$):

$$\underline{F}^{\mu\nu} = L^\mu_\rho L^\nu_\sigma F^{\rho\sigma}. \quad (10.78)$$

Mit etwas Rechnung findet man für einen Boost in x -Richtung

$$\underline{E}_x = E_x, \quad (10.79)$$

$$\underline{E}_y = \gamma (E_y - \beta c B_z), \quad (10.80)$$

$$\underline{E}_z = \gamma (E_z - \beta c B_y), \quad (10.81)$$

$$\underline{B}_x = B_x, \quad (10.82)$$

$$\underline{B}_y = \gamma \left(B_y + \frac{\beta}{c} E_z \right), \quad (10.83)$$

$$\underline{B}_z = \gamma \left(B_z - \frac{\beta}{c} E_y \right) \quad (10.84)$$

mit $\beta = v/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, wie üblich.

Wir betrachten nun das Feld einer sich gleichförmig bewegendes Punktladung. Im Laborsystem $\underline{\mathcal{S}}$ bewege sich eine Punktladung q mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v} = v \hat{x}$. \mathcal{S} sei das mitbewegte System. In diesem soll die Ladung im Ursprung ruhen. Für $t = \underline{t} = 0$ sollen die Koordinatenursprünge zusammenfallen. Es ist also, in \mathcal{S} ,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (10.85)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = 0. \quad (10.86)$$

Das Laborsystem $\underline{\mathcal{S}}$ bewegt sich gegenüber \mathcal{S} mit der Geschwindigkeit $-v \hat{x}$. Es folgt

$$\underline{E}_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{r^3}, \quad (10.87)$$

$$\underline{E}_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma \frac{y}{r^3}, \quad (10.88)$$

$$\underline{E}_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma \frac{z}{r^3}, \quad (10.89)$$

$$\underline{B}_x = 0, \quad (10.90)$$

$$\underline{B}_y = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma\beta}{c} \frac{z}{r^3}, \quad (10.91)$$

$$\underline{B}_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma\beta}{c} \frac{y}{r^3}. \quad (10.92)$$

Also gilt

$$\underline{\vec{B}} = \beta \hat{x} \times \frac{\underline{\vec{E}}}{c} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \underline{\vec{E}}. \quad (10.93)$$

Die Gleichungen (10.79)–(10.84) zeigen, dass dies im Fall $\vec{B} = 0$ ganz allgemein gilt.

Gleichungen (10.87)–(10.92) geben das Feld im Laborsystem als Funktion der Koordinaten \vec{r} , t im mitbewegten System an – keine sehr nützliche Darstellung. Ausgedrückt durch Koordinaten im Laborsystem erhalten wir

$$\underline{E}_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma \frac{x - vt}{[\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}, \quad (10.94)$$

$$\underline{E}_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma \frac{y}{[\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}, \quad (10.95)$$

$$\underline{E}_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma \frac{z}{[\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}. \quad (10.96)$$

Zum Zeitpunkt $\underline{t} = 0$ (o. B. d. A.) ist

$$\underline{E}_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma \frac{x}{[\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}, \quad (10.97)$$

$$\underline{E}_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma \frac{y}{[\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}, \quad (10.98)$$

$$\underline{E}_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma \frac{z}{[\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}, \quad (10.99)$$

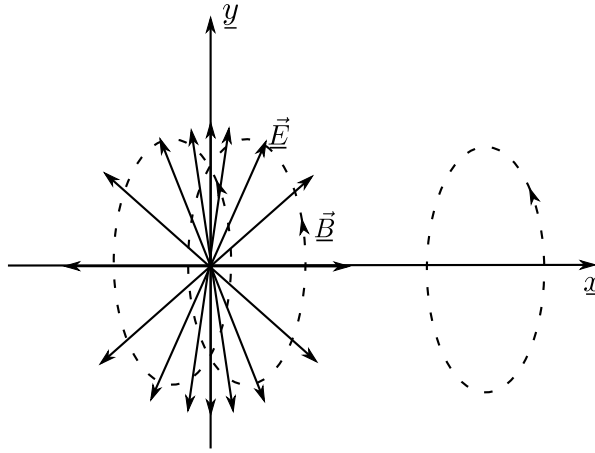
also

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma \frac{\vec{r}}{[\gamma^2 \underline{x}^2 + \underline{y}^2 + \underline{z}^2]^{3/2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{[\gamma^{4/3} \underline{x}^2 + \gamma^{-2/3} \underline{y}^2 + \gamma^{-2/3} \underline{z}^2]^{3/2}}.\end{aligned}\quad (10.100)$$

Das \vec{E} -Feld ist also *radial*, da parallel zu \vec{r} gerichtet. Es ist aber in Bewegungsrichtung gestaucht (wegen $\gamma^{4/3} > 1$) und in y - und z -Richtung gestreckt (wegen $\gamma^{-2/3} < 1$). Das \vec{B} -Feld ergibt sich am einfachsten aus

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} \quad \Bigg| \quad \frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0 \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{[\gamma^{4/3} \underline{x}^2 + \gamma^{-2/3} \underline{y}^2 + \gamma^{-2/3} \underline{z}^2]^{3/2}}.\end{aligned}\quad (10.101)$$

\vec{B} ist also *tangential* an Kreisen senkrecht zur Teilchenbahn und mit Mittelpunkten auf der Bahn. Diese Orientierungen von \vec{B} und \vec{E} hatten wir bei der Diskussion des 3. Newtonschen Axioms (Reaktionsprinzips) in 8.5.2 bereits vorweg genommen.



Beachte, dass \vec{B} im Vergleich zu \vec{E} den einheitenlosen Faktor $\beta = v/c$ enthält. Daher ist es sinnvoll, für $v \ll c$ zu sagen, dass das magnetische Feld klein im Vergleich zum elektrischen sei. In diesem Sinne ist \vec{B} eine „relativistische Korrektur“ zum Coulomb-Feld. Im stark relativistischen Limes $v \approx c$ sind \vec{B} und \vec{E} in der Ebene konzentriert, die die Ladung enthält und senkrecht auf \vec{v} steht. Ein relativistisches Teilchen trägt gewissermaßen eine harte Wand mit sich. Dies ist verwandt mit der Schockwelle eines sich ungefähr mit der Schallgeschwindigkeit bewegenden Flugzeugs.

Wir können natürlich auch den *kovarianten* Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} F^{\rho\sigma} \quad (10.102)$$

konstruieren. In ihm sind die Vorzeichen der \vec{E} -Komponenten umgekehrt. Aus $F^{\mu\nu}$ und $F_{\mu\nu}$ können wir einen Lorentz-Skalar bilden, also eine unter Lorentz-Transformation invariante Größe:

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} F^{\rho\sigma} F^{\mu\nu} = 2 \left(B^2 - \frac{E^2}{c^2} \right). \quad (10.103)$$

Diese *Invariante des elektromagnetischen Feldes* bedeutet u. a., dass man nie ein reines elektrisches Feld ($F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} < 0$) in ein reines magnetisches Feld ($F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} > 0$) Lorentz-transformieren kann.

Zum Schluss wollen wir noch die *homogenen* Maxwell-Gleichungen kovariant ausdrücken. Wir haben einerseits

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (10.104)$$

$$\Rightarrow \partial_1 F^{32} + \partial_2 F^{13} + \partial_3 F^{21} = 0 \quad (10.105)$$

$$\Rightarrow \partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} = 0. \quad (10.106)$$

Andererseits ist

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0. \quad (10.107)$$

Wir betrachten die x -Komponente:

$$\frac{\partial}{\partial y} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_y + \frac{\partial}{\partial t} B_x = 0 \quad (10.108)$$

$$\Rightarrow \partial_2 F^{30} + \partial_3 F^{02} + \partial_0 F^{32} = 0 \quad (10.109)$$

$$\Rightarrow -\partial^2 F^{30} - \partial^3 F^{02} - \partial^0 F^{23} = 0 \quad (10.110)$$

$$\Rightarrow \partial^2 F^{30} + \partial^3 F^{02} + \partial^0 F^{23} = 0. \quad (10.111)$$

Die übrigen beiden Komponenten ergeben sich analog. Zusammengefasst erhalten wir

$$\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{für } \alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1, 2, 3\} \text{ verschieden.} \quad (10.112)$$

Sind zwei der Indizes α, β, γ gleich, so erhalten wir eine Tautologie:

$$\partial^\alpha F^{\alpha\gamma} + \partial^\alpha F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma \underbrace{F^{\alpha\alpha}}_0 = \partial^\alpha \underbrace{(F^{\alpha\gamma} + F^{\gamma\alpha})}_0 = 0. \quad (10.113)$$

Wir müssen also den Fall mit gleichen Indizes nicht weiter beachten. Da sich die Gleichung (10.112) unter zyklischer Vertauschung nicht ändert, gibt es nur *vier* wesentlich verschiedene Wahlmöglichkeiten. Diese ergeben genau die vier Komponenten von $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ und $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$.

10.2.4 Der duale Feldstärketensor

Man kann die homogenen Maxwell-Gleichungen noch kompakter formulieren: Wir definieren den *dualen Feldstärketensor*

$$\tilde{F}^{\mu\nu} := \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (10.114)$$

mit dem antisymmetrischen Einheitstensor (Levi-Civita-Symbol) vierter Stufe

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{für } (\mu\nu\rho\sigma) \text{ gerade Permutationen von } (0123), \\ -1 & \text{für } (\mu\nu\rho\sigma) \text{ ungerade Permutationen von } (0123), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (10.115)$$

Man findet leicht

$$(\tilde{F}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & \frac{E_z}{c} & -\frac{E_y}{c} \\ B_y & -\frac{E_z}{c} & 0 & \frac{E_x}{c} \\ B_z & \frac{E_y}{c} & -\frac{E_x}{c} & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.116)$$

Im Vergleich zu $(F^{\mu\nu})$ sind also $\vec{E} \rightarrow c\vec{B}$ und $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}/c$ ersetzt worden. Die homogenen Maxwell-Gleichungen lauten jetzt

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (10.117)$$

Dies sehen wir wie folgt: Die Gleichung ist äquivalent zu

$$0 = \partial^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = \partial^\mu \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} = -\frac{1}{2} \epsilon_{\nu\mu\rho\sigma} \partial^\mu F^{\rho\sigma} \quad (10.118)$$

$$\Leftrightarrow \epsilon_{\nu\mu\rho\sigma} \partial^\mu = 0 F^{\rho\sigma}. \quad (10.119)$$

Dies ist äquivalent zu Gl. (10.112). Die homogene Maxwell-Gleichung (10.117) ist nun von derselben Form wie die inhomogene Gleichung $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$. Die (verschwindenden) Quellen des dualen Feldes $\tilde{F}^{\mu\nu}$ wären die Komponenten der *magnetischen* (Monopol-) Viererstromdichte.

Mit dem dualen Feld können wir eine weitere Invariante konstruieren:

$$F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = -\frac{4}{c}\vec{E}\cdot\vec{B}. \quad (10.120)$$

Das gewöhnliche Skalarprodukt $\vec{E}\cdot\vec{B}$ ist also Lorentz-invariant. Das bedeutet z.B., dass, wenn in einem Inertialsystem das Feld rein magnetisch oder rein elektrisch ist, in jedem Inertialsystem \vec{E} und \vec{B} orthogonal sind.

Keine unabhängige Invariante ergibt sich aus $\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$, denn es gilt

$$\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = 2\left(\frac{E^2}{c^2} - B^2\right) = -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (10.121)$$

Beachte auch, dass die Energiedichte

$$w_{\text{em}} = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{E^2}{c^2} + B^2\right) \quad (10.122)$$

keine Invariante des Feldes ist. Beweis: Angenommen, w_{em} ist eine Invariante. Da $E^2/c^2 - B^2$ wie gesehen eine Invariante ist, so müssen es dann auch E^2 und B^2 separat sein. Das steht aber im Widerspruch zum expliziten Resultat für die gleichförmig bewegte Punktladung, für die $\vec{B} \equiv 0$ im mitbewegten System gilt, $\vec{B} \neq 0$ im Laborsystem.

10.2.5 Elektromagnetische Wellen

Zum Schluss formulieren wir noch die Wellengleichung kovariant. In Abwesenheit von Ladungen und Strömen gilt

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad \wedge \quad \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} + \partial^\rho F^{\mu\nu} = 0. \quad (10.123)$$

Wir wollen $\partial_\mu\partial^\mu F^{\rho\sigma}$ mit Hilfe dieser Maxwell-Gleichungen berechnen. Beispielhaft betrachten wir die Komponente F^{01} :

$$\begin{aligned} \partial_\mu\partial^\mu F^{01} &= \partial_0\partial^0 F^{01} + \partial_1\partial^1 F^{01} + \partial_2\partial^2 F^{01} + \partial_3\partial^3 F^{01} \\ &= \partial^0\left(-\partial_1\underbrace{F^{11}}_{=0} - \partial_2 F^{21} - \partial_3 F^{31}\right) + \partial^1\left(-\partial_0\underbrace{F^{00}}_{=0} - \partial_2 F^{02} - \partial_3 F^{03}\right) \\ &\quad + \partial_2\left(-\partial^0 F^{12} - \partial^1 F^{20}\right) + \partial_3\left(-\partial^0 F^{13} - \partial^1 F^{30}\right) \\ &= -\left[\partial^0\partial_2(F^{21} + F^{12}) + \partial^0\partial_3(F^{31} + F^{13}) + \partial^1\partial_2(F^{02} + F^{20}) + \partial^1\partial_3(F^{03} + F^{30})\right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (10.124)$$

Analog finden wir für alle Außerdiagonalkomponenten $F^{\rho\sigma}$, dass $\partial_\mu\partial^\mu F^{\rho\sigma} = 0$. Die Diagonalkomponenten verschwinden ohnehin. Damit folgt

$$\partial_\mu\partial^\mu F^{\rho\sigma} \equiv \square F^{\rho\sigma} = 0. \quad (10.125)$$

Da die Komponenten $F^{\rho\sigma}$ i. W. die Komponenten von \vec{E} und \vec{B} sind, erhalten wir wieder Wellengleichungen für alle diese Komponenten.

In Abschnitt 9.1 hatten wir gefunden, dass für ebene Wellen im Laborsystem gilt

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\hat{k} \times \vec{E}. \quad (10.126)$$

Daraus können wir sofort die beiden Invarianten des Feldes für den Fall einer ebenen Welle ablesen:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2\left(B^2 - \frac{E^2}{c^2}\right) = \frac{2}{c^2}(E^2 - E^2) = 0, \quad (10.127)$$

$$F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -\frac{4}{c}\vec{E}\cdot\vec{B} = -\frac{4}{c^2}\vec{E}\cdot(\hat{k} \times \vec{E}) = 0. \quad (10.128)$$

Die erste Gleichung bedeutet, dass das elektrische und das Induktionsfeld einer elektromagnetischen Welle in jedem Inertialsystem in natürlichen Einheiten gleich groß sind. Die zweite Gleichung zeigt, dass \vec{E} und \vec{B} für eine Welle in jedem Inertialsystem senkrecht aufeinander stehen.

Kapitel 11

Retardierte Felder

Wirkungen breiten sich mit der Lichtgeschwindigkeit aus. Daher kann das elektromagnetische Feld an einem Ort \vec{r} zur Zeit t nicht von der instantanen Ladungs- und Stromverteilung zur Zeit t abhängen, sondern nur von Ladungen und Strömen zu früheren Zeiten $t' < t$. In diesem Kapitel bestimmen und untersuchen wir die resultierenden *retardierte* Felder quantitativ.

11.1 Felder bewegter Ladungen

Wir verwenden die Lorenz-Eichung, da sie Lorentz-invariant und damit am besten geeignet für die Beschreibung schneller Teilchen ist. Wie in 8.4 gesehen, erfüllen die Potentiale dann

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \mu_0 j^\nu \quad (11.1)$$

oder ausführlicher

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (11.2)$$

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{A} = \mu_0 \vec{j}. \quad (11.3)$$

Im *statischen* Fall sind die Potentiale (für freie Randbedingungen) durch die Poisson-Integrale

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (11.4)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (11.5)$$

gegeben. Da sich Wirkungen mit der Lichtgeschwindigkeit c ausbreiten, ist es *plausibel*, für die zeitabhängigen Lösungen anzusetzen

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \frac{\rho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (11.6)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (11.7)$$

mit

$$t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \equiv t - \frac{\Delta r}{c}. \quad (11.8)$$

Wir überprüfen, ob der Ansatz die Lorenz-Eichbedingung und die inhomogenen Wellengleichungen erfüllt:

1. Eichbedingung:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \dot{\phi} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{c^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (11.9)$$

Nun beachte, dass t' von \vec{r}' und t abhängt. Es ist

$$\vec{\nabla}' t' = -\frac{1}{c} \vec{\nabla}' |\vec{r} - \vec{r}'| = -\frac{1}{c} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \equiv -\frac{1}{c} \widehat{\Delta r} = -\vec{\nabla}' t', \quad (11.10)$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = 1. \quad (11.11)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \dot{\phi} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \left[\frac{\frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t')}{\partial t'} \cdot \vec{\nabla}' t'}{\Delta r} + \vec{j}(\vec{r}', t') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{\Delta r} + \frac{\partial \rho(\vec{r}', t')}{\partial t'} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \left[-\frac{\frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t')}{\partial t'} \cdot \vec{\nabla}' t'}{\Delta r} - \vec{j}(\vec{r}', t') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{\Delta r} + \frac{1}{\Delta r} \frac{\partial \rho(\vec{r}', t')}{\partial t'} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \left[-\frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t')}{\Delta r} + \underbrace{\frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', \tau)}{\Delta r}}_{\substack{t' \text{ nicht nach } \vec{r}' \text{ ableiten} \\ \tau=t'}} - \vec{j}(\vec{r}', t') \cdot \vec{\nabla}' \cdot \frac{1}{\Delta r} + \frac{1}{\Delta r} \frac{\partial \rho(\vec{r}', t')}{\partial t'} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \left[-\vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}', t')}{\Delta r} + \underbrace{\frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', \tau)}{\Delta r}}_{\substack{\tau=t' \\ = 0 \text{ (Kontinuitätsgleichung)}}} + \frac{1}{\Delta r} \frac{\partial \rho(\vec{r}', t')}{\partial t'} \right] \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \oiint d\vec{s}' \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}', t')}{\Delta r} = 0 \end{aligned} \quad (11.12)$$

unter der üblichen Annahme, dass die Felder im Unendlichen schnell genug abfallen.

2. Inhomogene Wellengleichungen:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \left[\frac{\frac{\partial \rho(\vec{r}', t')}{\partial t'} \vec{\nabla}' t'}{\Delta r} + \rho(\vec{r}', t') \vec{\nabla}' \frac{1}{\Delta r} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \left[-\frac{1}{c} \frac{\partial \rho(\vec{r}', t')}{\partial t'} \frac{\widehat{\Delta r}}{\Delta r} - \rho(\vec{r}', t') \frac{\widehat{\Delta r}}{(\Delta r)^2} \right] \\ \Rightarrow \nabla^2 \phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \left[-\frac{1}{c} \frac{\partial^2 \rho(\vec{r}', t')}{\partial (t')^2} (\vec{\nabla}' t') \cdot \frac{\widehat{\Delta r}}{\Delta r} - \frac{1}{c} \frac{\partial \rho(\vec{r}', t')}{\partial t'} \vec{\nabla}' \cdot \frac{\widehat{\Delta r}}{\Delta r} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \rho(\vec{r}', t')}{\partial t'} (\vec{\nabla}' t') \cdot \frac{\widehat{\Delta r}}{(\Delta r)^2} - \rho(\vec{r}', t') \vec{\nabla}' \cdot \frac{\widehat{\Delta r}}{(\Delta r)^2} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho(\vec{r}', t')}{\partial (t')^2} \frac{1}{\Delta r} - \frac{1}{c} \frac{\partial \rho(\vec{r}', t')}{\partial t'} \frac{1}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial \rho(\vec{r}', t')}{\partial t'} \frac{1}{(\Delta r)^2} \right. \\ &\quad \left. - \rho(\vec{r}', t') 4\pi \delta(\vec{\Delta r}) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \frac{1}{c^2} \underbrace{\frac{\partial^2 \rho(\vec{r}', t')}{\partial t^2}}_{\text{Ableitung nach } t!} \frac{1}{\Delta r} - \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\rho}{\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (11.14)$$

Die inhomogene Wellengleichung (11.2) für ϕ ist also erfüllt. Eine analoge Rechnung zeigt, dass auch \vec{A} Gl. (11.3) erfüllt.

Aus den retardierten Potentialen können wir nun die retardierten Felder \vec{E} und \vec{B} bestimmen. Dabei ist wieder zu beachten, dass t' von \vec{r}' und t abhängt. Die Rechnung ist etwas mühsam, aber nicht schwierig.

Die Ergebnisse wurden laut D. J. Griffiths erst 1966 von O. Jefimenko publiziert und er nennt sie daher *Jefimenko-Gleichungen*. Sie lauten

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \left[\rho(\vec{r}', t') \frac{\widehat{\Delta r}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial \rho(\vec{r}', t')}{\partial t'} \frac{\widehat{\Delta r}}{\Delta r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t')}{\partial t'} \frac{1}{\Delta r} \right], \quad (11.15)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \left[\vec{j}(\vec{r}', t') \times \frac{\widehat{\Delta r}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t')}{\partial t'} \times \frac{\widehat{\Delta r}}{\Delta r} \right]. \quad (11.16)$$

Im statischen Grenzfall ergeben sich offensichtlich das Coulomb- und das Biot-Savart-Gesetz. Beachte, dass die allgemeinen Ausdrücke für \vec{E} und \vec{B} *nicht* einfach durch die Ersetzung $t \rightarrow t' = t - \Delta r/c$ in ρ und \vec{j} aus den statischen Gesetzen hervorgehen, im Unterschied zu den Potentialen.

11.1.1 Liénard-Wiechert-Potentiale

Ein wichtiger Spezialfall betrifft die Felder bewegter Punktladungen. Für eine Punktladung mit der Trajektorie $\vec{R}(t)$ gilt

$$\rho(\vec{r}) = q \delta(\vec{r} - \vec{R}(t)), \quad (11.17)$$

$$\vec{j}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \vec{v} = q \dot{\vec{R}}(t) \delta(\vec{r} - \vec{R}(t)). \quad (11.18)$$

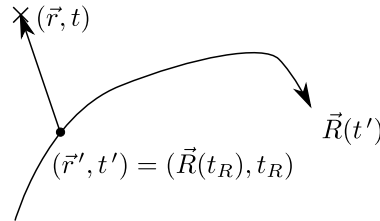
Das skalare Potential ist also

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \frac{\delta(\vec{r}' - \vec{R}(t'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \frac{\delta(\vec{r}' - \vec{R}(t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c))}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (11.19)$$

Beachte, dass die Integrationsvariable \vec{r}' an zwei Stellen im Argument der δ -Funktion auftritt. Diese Konsequenz der Retardierung macht die Rechnung schwieriger. Wir suchen zunächst die Nullstellen des Arguments der δ -Funktion:

$$\vec{r}' - \vec{R}\left(t - \underbrace{|\vec{r} - \vec{r}'|}_{=t'} / c\right) = 0. \quad (11.20)$$

Diese Gleichung bestimmt die Orte $\vec{r}' = \vec{R}(t_R)$ und zugehörigen Zeiten $t_R = t' = t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c$ der Punktladung, an deren sie eine Wirkung auf das Feld am Ort \vec{r} zur Zeit t ausübt. Das ist genau dann der Fall, wenn $|\vec{r} - \vec{R}(t_R)| = c(t - t_R)$ gilt.



Interessanterweise existiert für gegebene \vec{r}, t *höchstens eine* Lösung. Denn wären \vec{r}'_1 und \vec{r}'_2 Lösungen, so müsste gelten

$$\vec{r}'_1 = \vec{R}(t'_1), \quad (11.21)$$

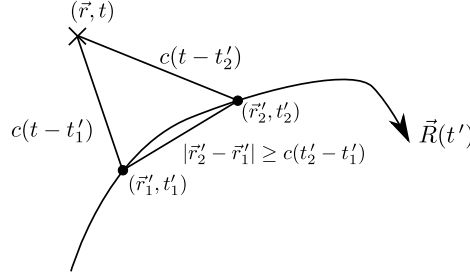
$$\vec{r}'_2 = \vec{R}(t'_2), \quad (11.22)$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'_1| = c(t - t'_1), \quad (11.23)$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'_2| = c(t - t'_2). \quad (11.24)$$

Daraus folgt mit der Dreiecksungleichung

$$|\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1| \geq \left| |\vec{r} - \vec{r}'_2| - |\vec{r} - \vec{r}'_1| \right| = c|t - t'_2 - t + t'_1| = c|t'_1 - t'_2| \quad (11.25)$$



$$\Rightarrow |\vec{R}(t_2') - \vec{R}(t_1')| \geq c|t_2' - t_1'|. \quad (11.26)$$

Wenn $t_2' \neq t_1'$ gilt, muss sich die Punktladung also mit Lichtgeschwindigkeit oder schneller bewegen. Nach der Speziellen Relativitätstheorie ist das aber unmöglich; massive Teilchen bewegen sich nur mit Geschwindigkeiten $v < c$ und alle geladenen Teilchen sind, nach heutigem Wissen, massiv.

Gleichung (11.20) hat somit gar keine oder eine eindeutige Lösung, die wir dann mit $r' = \vec{R}(t_R), t' = t_R$ bezeichnen. Nun entwickeln wir das Argument der δ -Funktion in r' um diese Nullstelle:

$$\begin{aligned} \vec{r}' - \vec{R}(t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c) &\cong 0 + \sum_i \frac{\partial}{\partial r'_i} \left(\vec{r}' - \vec{R}(t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c) \right) \Big|_{\vec{r}' = \vec{R}(t_R)} (r'_i - R_i(t_R)) \\ &= \sum_i \left[\hat{r}_i + \dot{\vec{R}}(t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c) \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial r'_i} |\vec{r} - \vec{r}'| \right] \Big|_{\vec{r}' = \vec{R}(t_R)} (r'_i - R_i(t_R)) \\ &= \sum_i \left[\hat{r}_i - \frac{1}{c} \dot{\vec{R}}(t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c) \frac{\Delta r_i}{\Delta r} \right]_{\vec{r}' = \vec{R}(t_R)} (r'_i - R_i(t_R)) \\ &= \sum_i \left[\hat{r}_i - \frac{1}{c} \dot{\vec{R}}(t_R) \frac{r_i - R_i(t_R)}{|\vec{r} - \vec{R}(t_R)|} \right] (r'_i - R_i(t_R)), \end{aligned} \quad (11.27)$$

($\hat{r}_i \in \{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ sind feste Koordinateneinheitsvektoren) oder komponentenweise:

$$r'_j - R_j(t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c) \cong \sum_i \left[\underbrace{(\hat{r}_i)_j}_{\substack{i\text{-te Komponente} \\ \text{des } i\text{-ten kartesischen} \\ \text{Einheitsvektors} = \delta_{ji}}}} - \frac{1}{c} \dot{R}_j(t_R) \frac{r_i - R_i(t_R)}{|\vec{r} - \vec{R}(t_R)|} \right] (r'_i - R_i(t_R)) =: \sum_i J_{ji} (r'_i - R_i(t_R)). \quad (11.28)$$

Nun gilt für die mehrdimensionale δ -Funktion

$$\delta(\overleftarrow{\mathcal{J}} \vec{r}) = \frac{1}{|\det \overleftarrow{\mathcal{J}}|} \delta(\vec{r}) \quad (11.29)$$

in Verallgemeinerung von Eigenschaft 4 in A.4.1. Dies zeigt man leicht durch Substitution. Im konkreten Fall zeigt explizite Rechnung

$$\det \overleftarrow{\mathcal{J}} = 1 - \frac{1}{c} \dot{\vec{R}}(t_R) \cdot \frac{\vec{r} - \vec{R}(t_R)}{|\vec{r} - \vec{R}(t_R)|}. \quad (11.30)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \frac{1}{1 - \frac{1}{c} \dot{\vec{R}}(t_R) \cdot \frac{\vec{r} - \vec{R}(t_R)}{|\vec{r} - \vec{R}(t_R)|}} \frac{\delta(\vec{r}' - \vec{R}(t_R))}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{1 - \frac{1}{c} \dot{\vec{R}}(t_R) \cdot \frac{\vec{r} - \vec{R}(t_R)}{|\vec{r} - \vec{R}(t_R)|}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}(t_R)|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{R}(t_R)| - \frac{1}{c} \dot{\vec{R}}(t_R) \cdot (\vec{r} - \vec{R}(t_R))}. \end{aligned} \quad (11.31)$$

Im Vergleich zum statischen Potential ist offenbar ein Term im Nenner hinzugekommen, der den β -Parameter $|\dot{\vec{R}}|/c \equiv v/c$ der Punktladung enthält.

Für das Vektorpotential erhalten wir ganz analog

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} q \iiint dV' \frac{\dot{\vec{R}}(t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c) \delta(\vec{r}' - \vec{R}(t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c))}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \dot{\vec{R}}(t_R)}{|\vec{r} - \vec{R}(t_R)| - \frac{1}{c} \dot{\vec{R}}(t_R) \cdot (\vec{r} - \vec{R}(t_R))}.\end{aligned}\quad (11.32)$$

Gleichungen (11.31) und (11.32) nennt man die *Liénard-Wiechert-Potentiale*. Für den Spezialfall einer *gleichförmig* bewegten Punktladung können wir dieselben Ergebnisse einfacher durch Lorentz-Transformation der statischen Potentiale im mitbewegten Inertialsystem ins Laborsystem erhalten. Das Ergebnis hier ist aber viel allgemeiner, es gilt für *beliebige* Bewegungen der Punktladung. Wir können noch einen einfachen Zusammenhang zwischen den Potentialen ϕ und \vec{A} finden: Mit $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$ folgt

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{q \dot{\vec{R}}(t_R)}{|\vec{r} - \vec{R}(t_R)| - \frac{1}{c} \dot{\vec{R}}(t_R) \cdot (\vec{r} - \vec{R}(t_R))} = \frac{\dot{\vec{R}}(t_R)}{c^2} \phi(\vec{r}, t).\quad (11.33)$$

Die Felder $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{B}(\vec{r}, t)$ erhalten wir wie üblich aus $\phi(\vec{r}, t)$ und $\vec{A}(\vec{r}, t)$:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{A}},\quad (11.34)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.\quad (11.35)$$

Die Rechnung wird dadurch erschwert, dass die retardierte Zeit t_R in ϕ und \vec{A} von \vec{r} und t abhängt, und zwar als Lösung der impliziten Gleichung

$$|\vec{r} - \vec{R}(t_R)| = c(t - t_R).\quad (11.36)$$

Die Rechnung findet sich im Buch von Griffiths, eine elegantere Methode im Buch von Jackson. Hier geben wir nur die Ergebnisse an:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta r}{(\Delta \vec{r} \cdot \vec{u})^3} \left[(c^2 - v^2)\vec{u} + \Delta \vec{r} \times (\vec{u} \times \vec{a}) \right]\quad (11.37)$$

mit

$$\Delta \vec{r} := \vec{r} - \vec{R}(t_R),\quad (11.38)$$

$$\vec{v} := \dot{\vec{R}}(t_R),\quad (11.39)$$

$$\vec{a} := \ddot{\vec{R}}(t_R)\quad (11.40)$$

und der Abkürzung

$$\vec{u} := c \widehat{\Delta r} - \vec{v}\quad (11.41)$$

mit $\widehat{\Delta r} = \Delta \vec{r} / \Delta r$, wie üblich. Für das Induktionsfeld findet man

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \widehat{\Delta r} \times \vec{E}(\vec{r}, t).\quad (11.42)$$

Es steht also senkrecht auf \vec{E} und auf $\vec{r} - \vec{R}(t_R)$. Wenn die Geschwindigkeit *und* die Beschleunigung der Punktladung verschwinden, erhalten wir das Coulomb-Feld der Elektrostatik.

11.2 Strahlung

Wir haben bereits die Propagation und auch die Dämpfung elektromagnetischer Wellen diskutiert, aber noch nicht ihre Erzeugung. Dazu kommen wir in diesem Abschnitt. Elektromagnetische Wellen werden, wie elektromagnetische Felder allgemein, von Ladungen und Strömen erzeugt. Wir sprechen dann von der *Strahlung*, die diese Ladungen und Ströme emittieren. Genauer sprechen wir nur dann von Strahlung, wenn das Feld eine Leistung $P > 0$ ins Unendliche trägt. Diese Leistung erhalten wir durch Integration des Poynting-Vektors

über eine Kugelschale mit dem Radius $R \rightarrow \infty$ (die Ladungen und Ströme seien auf einen endlichen Bereich beschränkt):

$$P = \oiint d\vec{s} \cdot \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \oiint d\vec{s} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}). \quad (11.43)$$

Die Oberfläche der Kugel wächst für $R \rightarrow \infty$ wie R^2 . Daher erhalten wir eine von Null verschiedene abgestrahlte Leistung P nur, wenn $\vec{E} \times \vec{B}$ nicht schneller als $1/r^2$ abfällt. Wir wiederholen die Jefimenko-Gleichungen aus 11.1 und ermitteln das Verhalten der einzelnen Terme für große \vec{r} :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint dV' \left[\underbrace{\rho(\vec{r}', t') \frac{\widehat{\Delta r}}{(\Delta r)^2}}_{\mathcal{O}(1/r^2)} + \underbrace{\frac{1}{c} \frac{\partial \rho(\vec{r}', t')}{\partial t'} \frac{\widehat{\Delta r}}{\Delta r}}_{\mathcal{O}(1/r)} - \underbrace{\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t')}{\partial t'} \frac{1}{\Delta r}}_{\mathcal{O}(1/r)} \right], \quad (11.44)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \left[\underbrace{\vec{j}(\vec{r}', t') \times \frac{\widehat{\Delta r}}{(\Delta r)^2}}_{\mathcal{O}(1/r^2)} + \underbrace{\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t')}{\partial t'} \times \frac{\widehat{\Delta r}}{\Delta r}}_{\mathcal{O}(1/r)} \right]. \quad (11.45)$$

Für die abgestrahlte Leistung sind nur die Terme der Ordnung $1/r$ relevant. Beachte, dass diese Terme alle Zeitableitungen von ρ und \vec{j} enthalten. Insbesondere sind für Abstrahlung zeitlich veränderliche Ströme ($\dot{\vec{j}} \neq 0$) erforderlich, da sonst \vec{B} zu schnell abfallen würde. Die Vernachlässigung der schneller abfallenden Terme nennt man die *Fernfeld-Näherung*. Für die praktische Berechnung der Felder ist der Weg über die Potentiale günstiger als die direkte Auswertung der Jefimenko-Gleichungen.

11.2.1 Harmonisch oszillierende Quellen

Wir untersuchen zunächst Ladungen und Ströme, die auf eine endliche Region beschränkt sind und in der Zeit harmonisch oszillieren. Wir schreiben

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}) e^{-i\omega t}, \quad (11.46)$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}) e^{-i\omega t}, \quad (11.47)$$

wobei wie üblich die physikalischen Felder am Ende die Realteile der berechneten Größen sind. Die Betrachtung der harmonischen Zeitabhängigkeit ist keine wirkliche Einschränkung, da wir beliebige ρ und \vec{j} durch zeitliche Fourier-Transformation in die harmonischen Komponenten zerlegen können.

Das Vektorpotential ist

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}') e^{-i\omega t'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}') e^{-i\omega t} \exp\left(i \frac{\omega}{c} |\vec{r} - \vec{r}'|\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} e^{-i\omega t} \iiint dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}') e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned} \quad (11.48)$$

mit $k := \omega/c$. Wir finden also

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (11.49)$$

mit

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{j}(\vec{r}'). \quad (11.50)$$

Daraus erhalten wir

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (11.51)$$

mit

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \quad (11.52)$$

und, außerhalb der Region mit Strömen, aus dem Ampère-Maxwell-Gesetz

$$\dot{\vec{E}} = c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = c^2 e^{-i\omega t} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})) = \frac{\partial}{\partial t} i \frac{c^2}{\omega} e^{-i\omega t} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})). \quad (11.53)$$

Hieraus folgt zunächst nur bis auf eine additive zeitunabhängige Größe

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (11.54)$$

mit

$$\vec{E}(\vec{r}) = i \frac{c^2}{\omega} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})). \quad (11.55)$$

Die additive zeitunabhängige Größe ist aber Null, wie aus

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} e^{-i\omega t} \iiint dV' \frac{\rho(\vec{r}') e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (11.56)$$

und

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{A}} \quad (11.57)$$

folgt. Wir müssen ϕ also gar nicht explizit bestimmen, um \vec{E} auszurechnen.

Für die Bestimmung des Fernfeldes liegt es nahe, in Gl. (11.50) eine Multipolentwicklung für $r \gg r'$ durchzuführen; die Quelle sollte ja auf einen endlichen Bereich beschränkt sein. Bis zur ersten nicht trivialen Ordnung erhalten wir

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} = r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - \frac{2}{r} \hat{r} \cdot \vec{r}'} \cong r \left(1 - \frac{\hat{r} \cdot \vec{r}'}{r}\right) = r - \hat{r} \cdot \vec{r}' \quad (11.58)$$

$$\Rightarrow e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|} \cong e^{ikr} e^{-ik\hat{r} \cdot \vec{r}'}. \quad (11.59)$$

Nun nehmen wir zusätzlich an, dass die Quelle *klein* ist: Für alle \vec{r}' im Bereich der Ströme gilt $r' \ll \lambda \Rightarrow kr' \ll 1$. Dann können wir weiter entwickeln:

$$e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|} \cong e^{ikr} (1 - ik\hat{r} \cdot \vec{r}'). \quad (11.60)$$

Außerdem ist

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - \frac{2}{r} \hat{r} \cdot \vec{r}'\right]^{-1/2} \cong \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\hat{r} \cdot \vec{r}'}{r}\right). \quad (11.61)$$

Es folgt

$$\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \cong \frac{e^{ikr}}{r} \left[1 + \left(\frac{1}{r} - ik\right) \hat{r} \cdot \vec{r}'\right]. \quad (11.62)$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &\cong \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \frac{e^{ikr}}{r} \left[1 + \left(\frac{1}{r} - ik\right) \hat{r} \cdot \vec{r}'\right] \vec{j}(\vec{r}') \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \iiint dV' \vec{j}(\vec{r}') + \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1}{r} - ik\right) \frac{e^{ikr}}{r} \iiint dV' (\hat{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}'). \end{aligned} \quad (11.63)$$

11.2.2 Elektrische Dipolstrahlung

Wir betrachten zunächst den *ersten Term*

$$\vec{A}_{E1}(\vec{r}) := \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \iiint dV' \vec{j}(\vec{r}'), \quad (11.64)$$

wobei der Subskript „E1“ hier für „elektrisch“ und „erste Ordnung“ steht. Der Faktor e^{ikr}/r beschreibt eine auslaufende Kugelwelle. Für die Auswertung des Integrals verwenden wir folgende Identität:

$$\vec{\nabla}' \cdot x'_i \vec{j}(\vec{r}') = \sum_j \frac{\partial}{\partial x'_j} x'_i j_j(\vec{r}') = \sum_j \left(\delta_{ji} j_j(\vec{r}') + x'_i \frac{\partial}{\partial x'_j} j_j(\vec{r}') \right) = j_i(\vec{r}') + x'_i \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}') \quad (11.65)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \iiint dV' j_i(\vec{r}') &= \iiint dV' \vec{\nabla}' \cdot x'_i \vec{j}(\vec{r}') - \iiint dV' x'_i \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}') \stackrel{\text{Gauß}}{=} \underbrace{\iint d\vec{s}' \cdot x'_i \vec{j}(\vec{r}')}_{=0} - \iiint dV' x'_i \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}') \end{aligned} \quad (11.66)$$

$$\Rightarrow \iiint dV' \vec{j}(\vec{r}') = - \iiint dV' \vec{r}' [\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}')]. \quad (11.67)$$

(Von rechts nach links gelesen ist dies plausibel als partielle Integration.) Aus der Kontinuitätsgleichung erhalten wir weiter

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (11.68)$$

$$\Rightarrow -i\omega\rho(\vec{r}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}) = 0 \quad (11.69)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}) = i\omega\rho(\vec{r}) \quad (11.70)$$

$$\Rightarrow \iiint dV' \vec{j}(\vec{r}') = -i\omega \iiint dV' \vec{r}' \rho(\vec{r}') = -i\omega\vec{p} \quad (11.71)$$

mit dem bekannten elektrischen Dipolmoment \vec{p} der Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$. Das zeitabhängige Dipolmoment ist $\vec{p}e^{-i\omega t}$ (*Hertzscher Dipol*). Wir erhalten

$$\vec{A}_{E1}(\vec{r}) = -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{p} \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (11.72)$$

Dies ist der ortsabhängige Teil des Vektorpotentials für *elektrische Dipolstrahlung*. Das entsprechende \vec{B} -Feld lautet

$$\begin{aligned} \vec{B}_{E1}(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}_{E1}(\vec{r}) = +i\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{p} \times \vec{\nabla} \frac{e^{ikr}}{r} = i\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{p} \times \hat{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{ikr}}{r} = i\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{p} \times \hat{r} \frac{ike^{ikr}r - e^{ikr}}{r^2} \\ &= -k\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{p} \times \hat{r} \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) = +\frac{\mu_0}{4\pi} ck^2 \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \hat{r} \times \vec{p}. \end{aligned} \quad (11.73)$$

In der Fernfeld-Näherung vernachlässigen wir schneller abfallende Terme, also hier den Term $-1/ikr$. Dies ist offensichtlich erlaubt für $kr \gg 1 \Rightarrow r \gg \lambda$. Dann ist

$$\vec{B}_{E1}(\vec{r}) \cong \frac{\mu_0}{4\pi} ck^2 \frac{e^{ikr}}{r} \hat{r} \times \vec{p}. \quad (11.74)$$

Das \vec{E} -Feld erhalten wir aus

$$\vec{E}_{E1}(\vec{r}) = i \frac{c^2}{\omega} \vec{\nabla} \times \vec{B}_{E1}(\vec{r}). \quad (11.75)$$

In der Fernfeld-Näherung ist dies

$$\vec{E}_{E1}(\vec{r}) \cong i \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{c^3 k^2}{\omega} \vec{\nabla} \times \frac{e^{ikr}}{r} (\hat{r} \times \vec{p}) = i \frac{\mu_0}{4\pi} c^2 k \left[\frac{e^{ikr}}{r} \vec{\nabla} \times (\hat{r} \times \vec{p}) - (\hat{r} \times \vec{p}) \times \vec{\nabla} \frac{e^{ikr}}{r} \right]. \quad (11.76)$$

Hierin ist

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\hat{r} \times \vec{p}) &= (\vec{p} \cdot \vec{\nabla})\hat{r} - \underbrace{(\hat{r} \cdot \vec{\nabla})\vec{p}}_0 + \underbrace{\hat{r}(\vec{\nabla} \cdot \vec{p})}_0 - \vec{p}(\vec{\nabla} \cdot \hat{r}) = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{r}}{r} - \vec{p} \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right) \\ &= \frac{1}{r} \underbrace{(\vec{p} \cdot \vec{\nabla})\vec{r}}_{=\vec{p}} + \vec{r}(\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{r} - \frac{\vec{p}}{r} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{r}}_{=3} - \vec{p}(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{r} \\ &= -\frac{2\vec{p}}{r} + \vec{r}(\vec{p} \cdot \hat{r}) \left(-\frac{1}{r^2}\right) - \vec{p} \underbrace{(\vec{r} \cdot \hat{r})}_{=r} \left(-\frac{1}{r^2}\right) = -\frac{\vec{p}}{r} - \frac{\hat{r}(\vec{p} \cdot \hat{r})}{r} \end{aligned} \quad (11.77)$$

höherer Ordnung in $1/r$, also

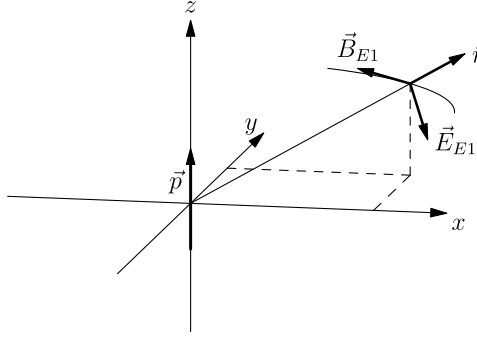
$$\begin{aligned} \vec{E}_{E1}(\vec{r}) &\cong -i \frac{\mu_0}{4\pi} c^2 k (\hat{r} \times \vec{p}) \times \hat{r} \frac{ike^{ikr}r - e^{ikr}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} c^2 k^2 (\hat{r} \times \vec{p}) \times \hat{r} \frac{e^{ikr}}{r} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{ikr}\right)}_{\text{höherer Ordnung}} \\ &\cong \frac{\mu_0}{4\pi} c^2 k^2 (\hat{r} \times \vec{p}) \frac{e^{ikr}}{r} \times \hat{r} \cong c\vec{B}_{E1}(\vec{r}) \times \hat{r}. \end{aligned} \quad (11.78)$$

Beachte, dass auch gilt

$$\vec{B}_{E1} = \frac{1}{c} \hat{r} \times \vec{E}_{E1}, \quad (11.79)$$

analog zum Fall einer bewegten Punktladung.

Für elektrische Dipolstrahlung steht, im Fernfeld, \vec{B}_{E1} senkrecht auf dem Dipolmoment \vec{p} und auf dem Radiusvektor \vec{r} . Wählen wir o. B. d. A. $\hat{z} = \hat{p}$, so ist $\vec{B}_{E1} \parallel \hat{\varphi}$ und damit $\vec{E}_{E1} \parallel \hat{\theta}$. Die vollen, zeitabhängigen Felder tragen einen abstandsabhängigen Faktor $e^{i(kr - \omega t)}/r$, also $\cos(kr - \omega t)/r$ für die physikalischen Felder.



Der Poynting-Vektor ist (für $\hat{z} = \hat{p}$)

$$\begin{aligned} \vec{S}_{E1}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E}_{E1} \times \vec{B}_{E1} \cong \frac{c}{\mu_0} (\vec{B}_{E1} \times \hat{r}) \times \vec{B}_{E1} \cong \frac{\mu_0}{16\pi^2} c^3 k^4 \frac{\cos^2(kr - \omega t)}{r^2} [\underbrace{(\hat{r} \times \vec{p}) \times \hat{r}}_{= -\hat{\varphi} p \sin \theta}] \times \underbrace{(\hat{r} \times \vec{p})}_{= -\hat{\varphi} p \sin \theta} \\ &= \frac{\mu_0}{16\pi^2} c^3 k^4 p^2 \frac{\cos^2(kr - \omega t)}{r^2} \sin^2 \theta \underbrace{\hat{\theta} \times \hat{\varphi}}_{\hat{r}} = \frac{c}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{k^4 p^2}{r^2} \cos^2(kr - \omega t) \sin^2 \theta \hat{r} \end{aligned} \quad (11.80)$$

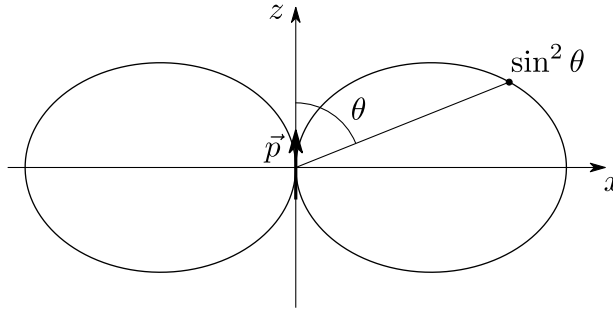
und gemittelt über eine Periode

$$\overline{\vec{S}}_{E1} = \frac{c}{32\pi^2 \epsilon_0} \frac{k^4 p^2}{r^2} \sin^2 \theta \hat{r}. \quad (11.81)$$

Der Energiestrom ist also radial nach außen gerichtet, wächst mit der Wellenzahl und damit mit der Frequenz zur 4. Potenz an und hat die Strahlungscharakteristik

$$\overline{\vec{S}}_{E1} \sim \sin^2 \theta, \quad (11.82)$$

diese nennt man *Dipolcharakteristik*. Der elektrische Dipol strahlt also maximal in der Ebene senkrecht zu \vec{p} ab und überhaupt nicht parallel zu \vec{p} . Die Dipolcharakteristik ist im folgenden skizziert; es handelt sich um einen Rotationskörper mit der z - (Dipol-) Achse als Rotationsachse!



Die mittlere Strahlungsleistung ist nun einfach

$$\overline{P}_{E1} = \oiint d\vec{s} \cdot \overline{\vec{S}}_{E1} = \frac{c}{32\pi^2 \epsilon_0} \frac{k^4 p^2}{r^2} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^3 \theta = \frac{c}{12\pi \epsilon_0} k^4 p^2. \quad (11.83)$$

11.2.3 Elektrische Quadrupol- und magnetische Dipolstrahlung

Die elektrische Dipolstrahlung dominiert meistens, aber sicher nicht, wenn das Dipolmoment verschwindet. Dann müssen wir den zweiten Term in Gl. (11.63) betrachten,

$$\vec{A}_2(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1}{r} - ik \right) \frac{e^{ikr}}{r} \iiint dV' (\hat{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}'). \quad (11.84)$$

Wir verwenden die BAC-CAB-Formel,

$$\hat{r} \times (\vec{r}' \times \vec{j}) = \vec{r}'(\hat{r} \cdot \vec{j}) - \vec{j}(\hat{r} \cdot \vec{r}') \quad (11.85)$$

$$\Rightarrow (\hat{r} \cdot \vec{r}')\vec{j} = (\hat{r} \cdot \vec{j})\vec{r}' - \hat{r} \times (\vec{r}' \times \vec{j}) \quad (11.86)$$

$$\Rightarrow (\hat{r} \cdot \vec{r}')\vec{j} = \frac{1}{2}(\hat{r} \cdot \vec{r}')\vec{j} + \frac{1}{2}(\hat{r} \cdot \vec{r}')\vec{j} = -\frac{1}{2}\hat{r} \times (\vec{r}' \times \vec{j}) + \frac{1}{2}[(\hat{r} \cdot \vec{r}')\vec{j} + (\hat{r} \cdot \vec{j})\vec{r}']. \quad (11.87)$$

Damit zerlegen wir \vec{A}_2 in zwei Summanden:

$$\vec{A}_2(\vec{r}) = \vec{A}_{M1}(\vec{r}) + \vec{A}_{E2}(\vec{r}) \quad (11.88)$$

mit

$$\vec{A}_{M1}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1}{r} - ik \right) \frac{e^{ikr}}{r} \hat{r} \times \frac{1}{2} \iiint dV' [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')]. \quad (11.89)$$

Wir hatten in 5.6 magnetische Multipolmomente nur für Linienströme diskutiert. Aus dem allgemeinen Poisson-Integral

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (11.90)$$

erhalten wir analog durch Multipolentwicklung

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \theta) \quad (11.91)$$

mit dem von \vec{r} und \vec{r}' eingeschlossenen Winkel θ die führenden Terme

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r} \underbrace{\iiint dV' \vec{j}(\vec{r}')}_{=0} + \frac{1}{r^2} \iiint dV' r' \cos \theta \vec{j}(\vec{r}') + \dots \right\} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^2} \iiint dV' (\hat{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (11.92)$$

Für den Dipolterm erhält man (ohne Beweis):

$$\dots = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2} + \dots \right\} \quad (11.93)$$

mit dem magnetischen Dipolmoment

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint dV' \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}'). \quad (11.94)$$

Somit können wir in \vec{A}_{M1} das magnetische Dipolmoment zur Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r}')$ identifizieren (das zeitabhängige Dipolmoment ist wieder $\vec{m}e^{-i\omega t}$) und schreiben

$$\vec{A}_{M1}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1}{r} - ik \right) \frac{e^{ikr}}{r} \hat{r} \times \vec{m}. \quad (11.95)$$

Man spricht von *magnetischer Dipolstrahlung*. Im Fernfeld ist

$$\vec{A}_{M1}(\vec{r}) \cong i \frac{\mu_0}{4\pi} k \frac{e^{ikr}}{r} \hat{r} \times \vec{m}. \quad (11.96)$$

Vergleich mit dem \vec{B} -Feld bei *elektrischer Dipolstrahlung*,

$$\vec{B}_{E1}(\vec{r}) \cong \frac{\mu_0}{4\pi} ck^2 \frac{e^{ikr}}{r} \hat{r} \times \vec{p}, \quad (11.97)$$

ergibt die Analogie

$$\vec{A}_{M1}(\vec{r}) \underset{\vec{m} \leftrightarrow \vec{p}}{\overset{i}{\longleftrightarrow}} \frac{1}{\omega} \vec{B}_{E1}(\vec{r}). \quad (11.98)$$

Durch Bildung der Rotation und der zweifachen Rotation erhalten wir

$$\vec{B}_{M1}(\vec{r}) \xleftrightarrow{\vec{m} \leftrightarrow \vec{p}} \frac{1}{c^2} \vec{E}_{E1}(\vec{r}), \quad (11.99)$$

$$\vec{E}_{M1}(\vec{r}) \xleftrightarrow{\vec{m} \leftrightarrow \vec{p}} -\vec{B}_{E1}(\vec{r}). \quad (11.100)$$

Im Sinne dieser Abbildungen ist die magnetische Dipolstrahlung also das Analogon der elektrischen Dipolstrahlung. Wir finden sofort

$$\vec{S}_{M1} = \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0 c} \frac{k^4 m^2}{r^2} \sin^2 \theta \hat{r} \quad (11.101)$$

und

$$\vec{P}_{M1} = \frac{1}{12\pi\epsilon_0 c} k^4 m^2. \quad (11.102)$$

Das magnetische Dipolmoment \vec{m} enthält im Vergleich zum elektrischen einen zusätzlichen Faktor $\vec{v}(\vec{r}')$ (in $\vec{j} = \rho\vec{v}$). Außerdem enthält die Leistung \vec{P}_{M1} einen zusätzlichen Faktor $1/c^2$. Damit ist die Leistung des magnetischen Dipolstrahlers typischerweise um $\sim v^2/c^2$ kleiner als die des elektrischen Dipolstrahlers. Der zweite Term in Gl. (11.88) lautet

$$\vec{A}_{E2}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{8\pi} \left(\frac{1}{r} - ik \right) \frac{e^{ikr}}{r} \iiint dV' [(\hat{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') + (\hat{r} \cdot \vec{j}(\vec{r}')) \vec{r}']. \quad (11.103)$$

Wir verwenden

$$\begin{aligned} 0 &= \iiint d\vec{s}' \cdot x'_i (\hat{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') \stackrel{\text{Gauß}}{=} \iiint dV' \vec{\nabla}' \cdot [x'_i (\hat{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}')] \\ &= \iiint dV' \left[\underbrace{(\vec{\nabla}' x'_i)}_{= \hat{x}_i} \cdot (\hat{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') + x'_i \hat{r} \cdot \vec{j}(\vec{r}') + x'_i (\hat{r} \cdot \vec{r}') \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}') \right] \end{aligned} \quad (11.104)$$

$$\Rightarrow \iiint dV' [(\hat{r} \cdot \vec{r}') j_i(\vec{r}') + (\hat{r} \cdot \vec{j}(\vec{r}')) x'_i] = \iiint dV' \left[-\cancel{x'_i \hat{r} \cdot \vec{j}(\vec{r}')} - x'_i (\hat{r} \cdot \vec{r}') \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}') + \cancel{(\hat{r} \cdot \vec{j}(\vec{r}')) x'_i} \right] \quad (11.105)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \iiint dV' [(\hat{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') + (\hat{r} \cdot \vec{j}(\vec{r}')) \vec{r}'] &= - \iiint dV' \vec{r}' (\hat{r} \cdot \vec{r}') \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}') \\ &= - \iiint dV' \vec{r}' (\hat{r} \cdot \vec{r}') i\omega \rho(\vec{r}'). \end{aligned} \quad (11.106)$$

Im letzten Schritt wurde die Kontinuitätsgleichung verwendet. Es folgt

$$\vec{A}_{E2}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{8\pi} ck^2 \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \iiint dV' \vec{r}' (\hat{r} \cdot \vec{r}') \rho(\vec{r}'). \quad (11.107)$$

Hierin erscheint der Tensor, in Komponenten,

$$\iiint dV' x'_i x'_j \rho(\vec{r}') = \frac{1}{3} \iiint dV' [3x'_i x'_j - (r')^2 \delta_{ij} + (r')^2 \delta_{ij}] = \frac{1}{3} [Q_{ij} + \delta_{ij} \iiint dV' (r')^2 \rho(\vec{r}')] \quad (11.108)$$

mit den Komponenten Q_{ij} des (elektrischen) Quadrupoltensors zur Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$. Es folgt für den Term \vec{A}_{E2} , der offenbar *elektrische Quadrupolstrahlung* beschreibt,

$$\vec{A}_{E2}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{24\pi} ck^2 \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \left[\overleftrightarrow{Q} \hat{r} + \hat{r} \iiint dV' (r')^2 \rho(\vec{r}') \right]. \quad (11.109)$$

Im Fernfeld mit $r \gg \lambda$ vereinfacht sich dies zu

$$\vec{A}_{E2}(\vec{r}) \cong -\frac{\mu_0}{24\pi} ck^2 \frac{e^{ikr}}{r} \left[\overleftrightarrow{Q} \hat{r} + \hat{r} \iiint dV' (r')^2 \rho(\vec{r}') \right]. \quad (11.110)$$

Die Felder erhalten wir nach einiger Rechnung als

$$\vec{B}_{E2}(\vec{r}) \cong -i \frac{\mu_0}{24\pi} ck^3 \frac{e^{ikr}}{r} \hat{r} \times (\overleftrightarrow{Q} \hat{r}), \quad (11.111)$$

$$\vec{E}_{E2}(\vec{r}) \cong c \vec{B}_{E2}(\vec{r}) \times \hat{r}. \quad (11.112)$$

Im Vergleich zur elektrischen Dipolstrahlung haben wir also zu ersetzen

$$\vec{p} \rightarrow -\frac{i}{6} k \overleftrightarrow{Q} \hat{r}. \quad (11.113)$$

Das ist keine triviale Ersetzung, da $\overleftrightarrow{Q} \hat{r}$ im Gegensatz zu \vec{p} ortsabhängig ist. Für den Poynting-Vektor folgt

$$\vec{S}_{E2}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0}{576\pi^2} c^3 k^6 \frac{\cos^2(kr - \omega t)}{r^2} \left[(\hat{r} \times \overleftrightarrow{Q} \hat{r}) \times \hat{r} \right] \times (\hat{r} \times \overleftrightarrow{Q} \hat{r}). \quad (11.114)$$

Für das vierfache Kreuzprodukt finden wir

$$\begin{aligned} \left[(\hat{r} \times \overleftrightarrow{Q} \hat{r}) \times \hat{r} \right] \times (\hat{r} \times \overleftrightarrow{Q} \hat{r}) &= -(\hat{r} \times \overleftrightarrow{Q} \hat{r}) \times \left[(\hat{r} \times \overleftrightarrow{Q} \hat{r}) \times \hat{r} \right] \\ &\stackrel{\text{BAC-CAB}}{=} -(\hat{r} \times \overleftrightarrow{Q} \hat{r}) \left[\underbrace{(\hat{r} \times \overleftrightarrow{Q} \hat{r}) \cdot \hat{r}}_{=0} \right] + \hat{r} \left[(\hat{r} \times \overleftrightarrow{Q} \hat{r}) \cdot (\hat{r} \times \overleftrightarrow{Q} \hat{r}) \right] \\ &= |\hat{r} \times \overleftrightarrow{Q} \hat{r}|^2 \hat{r}. \end{aligned} \quad (11.115)$$

Damit ist

$$\vec{S}_{E2}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0}{576\pi^2} c^3 k^6 \frac{\cos^2(kr - \omega t)}{r^2} |\hat{r} \times \overleftrightarrow{Q} \hat{r}|^2 \hat{r} \quad (11.116)$$

und zeitgemittelt

$$\overline{\vec{S}}_{E2} = \frac{\mu_0}{1152\pi^2} c^3 \frac{k^6}{r^2} |\hat{r} \times \overleftrightarrow{Q} \hat{r}|^2 \hat{r} = \frac{c}{1152\pi^2 \epsilon_0} \frac{k^6}{r^2} |\hat{r} \times \overleftrightarrow{Q} \hat{r}|^2 \hat{r}. \quad (11.117)$$

Verglichen mit der elektrischen Dipolstrahlung,

$$\overline{\vec{S}}_{E1} = \frac{c}{32\pi^2 \epsilon_0} \frac{k^4 p^2}{r^2} \sin^2 \theta \hat{r}, \quad (11.118)$$

enthält das Quadrupolmoment \overleftrightarrow{Q} einen zusätzlichen Faktor \vec{r}' , von der Größenordnung der linearen Abmessung der Quelle. Außerdem enthält $\overline{\vec{S}}_{E2}$ einen zusätzlichen Faktor $k^2 \sim 1/\lambda^2$. Somit ist die Leistung der elektrischen Quadrupolstrahlung typischerweise um einen Faktor $(\text{Größe der Quelle})^2/\lambda^2$ gegenüber der elektrischen Dipolstrahlung unterdrückt, sofern dieser Faktor klein ist.

Die Strahlungscharakteristik ergibt sich aus dem Faktor

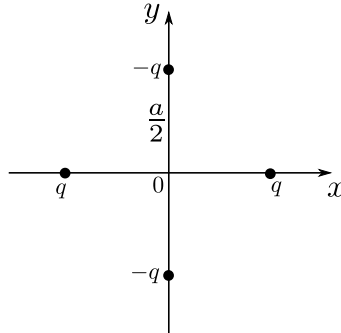
$$|\hat{r} \times \overleftrightarrow{Q} \hat{r}|^2, \quad (11.119)$$

den man natürlich für beliebiges \overleftrightarrow{Q} unter Verwendung von

$$\hat{r} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (11.120)$$

explizit auswerten kann. Das Ergebnis ist aber nicht sehr erhellend.

■ Beispiel: Wir betrachten die Anordnung aus 2.9.1:



Nun ist der Quadrupol jedoch zeitabhängig mit dem Faktor $e^{-i\omega t}$. Wir hatten schon bemerkt, dass

$$\overleftrightarrow{Q} = \frac{3}{2} qa^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11.121)$$

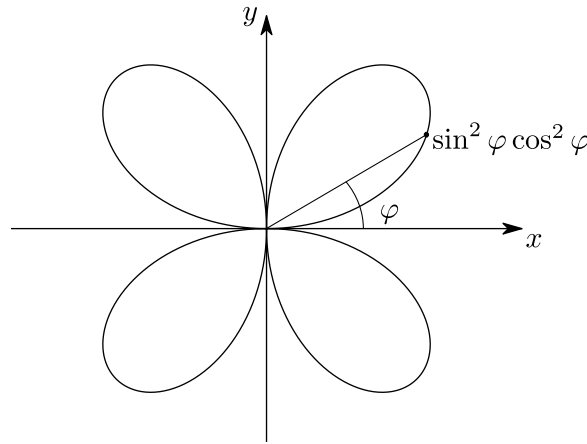
gilt. Damit ist

$$\overleftrightarrow{Q} \hat{r} = \frac{3}{2} qa^2 \sin \theta \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11.122)$$

und

$$\hat{r} \times \overleftrightarrow{Q} \hat{r} = \frac{3}{2} qa^2 \sin^2 \theta \hat{z} (-\cos \varphi \sin \varphi - \sin \varphi \cos \varphi) = -3qa^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi \hat{z} \quad (11.123)$$

$$\Rightarrow |\hat{r} \times \overleftrightarrow{Q} \hat{r}|^2 = 9q^2 a^4 \sin^4 \theta \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi. \quad (11.124)$$



11.2.4 Abstrahlung bewegter Punktladung

Für eine beliebig bewegte Punktladung hatten wir die \vec{E} - und \vec{B} -Felder bereits in 11.1.1 bestimmt. Nun betrachten wir nur das Fernfeld und vernachlässigen alle Terme, die schneller als der inverse Abstand, $1/\Delta r$, abfallen. Dann ist

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \cong \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\Delta r} \frac{\widehat{\Delta r} \times (\vec{u} \times \vec{a})}{(\widehat{\Delta r} \cdot \vec{u})^3} \quad (11.125)$$

mit

$$\widehat{\Delta r} = \vec{r} - \vec{R}(t_R), \quad (11.126)$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{R}}(t_R), \quad (11.127)$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{R}}(t_R), \quad (11.128)$$

$$\vec{u} = c\widehat{\Delta r} - \vec{v} \quad (11.129)$$

und der retardierten Zeit t_R , die

$$|\vec{r} - \vec{R}(t_R)| = c(t - t_R) \quad (11.130)$$

erfüllt. Außerdem ist

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \widehat{\Delta r} \times \vec{E}(\vec{r}, t). \quad (11.131)$$

Wir sehen, dass das Fernfeld nur dann von Null verschieden ist, wenn das Teilchen *beschleunigt* ist, $\vec{a} \neq 0$. Also strahlen nur beschleunigte Teilchen Energie ab und werden dadurch gebremst („Strahlungsdämpfung“). Es ist schon aufgrund der Lorentz-Invarianz klar, dass gleichförmig bewegte Ladungen nicht durch Strahlung abgebremst werden können.

Der Poynting-Vektor ist

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{c}{16\pi^2\epsilon_0} \frac{q^2}{(\Delta r)^2} \frac{1}{(\widehat{\Delta r} \cdot \vec{u})^6} \left[\widehat{\Delta r} \times (\vec{u} \times \vec{a}) \right] \times \left(\widehat{\Delta r} \times \left[\widehat{\Delta r} \times (\vec{u} \times \vec{a}) \right] \right), \quad (11.132)$$

ein sechsfaches Kreuzprodukt! Dieses können wir aber mit der BAC-CAB-Formel leicht vereinfachen:

$$\left[\widehat{\Delta r} \times (\vec{u} \times \vec{a}) \right] \times \left(\widehat{\Delta r} \times \left[\widehat{\Delta r} \times (\vec{u} \times \vec{a}) \right] \right) = \widehat{\Delta r} \left[\widehat{\Delta r} \times (\vec{u} \times \vec{a}) \right]^2 - \underbrace{\left[\widehat{\Delta r} \times (\vec{u} \times \vec{a}) \right] \left(\widehat{\Delta r} \cdot \left[\widehat{\Delta r} \times (\vec{u} \times \vec{a}) \right] \right)}_{=0}, \quad (11.133)$$

so dass

$$\vec{S} = \frac{c}{16\pi^2\epsilon_0} \frac{q^2}{(\Delta r)^2} \frac{\left| \widehat{\Delta r} \times (\vec{u} \times \vec{a}) \right|^2}{(\widehat{\Delta r} \cdot \vec{u})^6} \widehat{\Delta r}. \quad (11.134)$$

Die Abstrahlung erfolgt also entlang des retardierten Abstandsvektors $\vec{\Delta r} = \vec{r} - \vec{R}(t_R)$ und fällt, wie erwartet, mit dem inversen retardierten Abstand zum Quadrat ab. Die Charakteristik der zum Zeitpunkt t_R ausgesandten Strahlung steckt in dem eher undurchsichtigen winkelabhängigen Faktor $|\widehat{\Delta r} \times (\vec{u} \times \vec{a})|^2 / (\widehat{\Delta r} \cdot \vec{u})^6$. Beachte, dass i. A. dieser und auch $\widehat{\Delta r}$ und Δr über t_R von der Zeit t abhängen.

Wir können die Winkelabhängigkeit explizit machen. Der genannte Faktor enthält die drei Vektoren $\widehat{\Delta r}$, \vec{v} und \vec{a} , die drei Winkel einschließen:

$$\alpha := \angle(\widehat{\Delta r}, \vec{v}) \equiv \angle(\vec{\Delta r}, \vec{v}), \quad (11.135)$$

$$\beta := \angle(\widehat{\Delta r}, \vec{a}) \equiv \angle(\vec{\Delta r}, \vec{a}), \quad (11.136)$$

$$\gamma := \angle(\vec{v}, \vec{a}). \quad (11.137)$$

Dabei beschreiben α und β die Charakteristik der Abstrahlung zur Zeit t_R , während γ eine Eigenschaft der Teilchenbewegung wiedergibt. Mit elementarer Vektoralgebra finden wir

$$\begin{aligned} \frac{\left| \widehat{\Delta r} \times (\vec{u} \times \vec{a}) \right|^2}{(\widehat{\Delta r} \cdot \vec{u})^6} &= \frac{\left| c\widehat{\Delta r} \times (\widehat{\Delta r} \times \vec{a}) - \widehat{\Delta r} \times (\vec{v} \times \vec{a}) \right|^2}{(c - \widehat{\Delta r} \cdot \vec{v})^6} \\ &= \frac{\left| c\widehat{\Delta r}(\widehat{\Delta r} \cdot \vec{a}) - c\vec{a} - \vec{v}(\widehat{\Delta r} \cdot \vec{a}) + \vec{a}(\widehat{\Delta r} \cdot \vec{v}) \right|^2}{(c - \widehat{\Delta r} \cdot \vec{v})^6} \\ &= \frac{\left| ca \cos \beta \widehat{\Delta r} - c\vec{a} - a \cos \beta \vec{v} + v \cos \alpha \vec{a} \right|^2}{(c - v \cos \alpha)^6} \\ &= \frac{a^2 \left| \cos \beta \widehat{\Delta r} - \hat{a} - \cos \beta \frac{\vec{v}}{c} + \frac{v}{c} \cos \alpha \hat{a} \right|^2}{c^4 \left(1 - \frac{v}{c} \cos \alpha \right)^6} \\ &= \frac{a^2}{c^4} \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \alpha \right)^6} \left(\cos^2 \beta + 1 + \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \beta + \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \alpha - 2 \cos^2 \beta - 2 \frac{v}{c} \cos \alpha \cos^2 \beta \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{v}{c} \cos \alpha \cos^2 \beta + 2 \frac{v}{c} \cos \beta \cos \gamma - 2 \frac{v}{c} \cos \alpha - 2 \frac{v^2}{c^2} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \right) \\ &= \frac{a^2}{c^4} \frac{\sin^2 \beta + 2 \frac{v}{c} (\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha) + \frac{v^2}{c^2} (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma)}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \alpha \right)^6}. \quad (11.138) \end{aligned}$$

Wir haben jetzt auch Zähler und Nenner explizit in Potenzen von v/c entwickelt. Dies erleichtert die folgende Diskussion des nichtrelativistischen Grenzfalles. Wir betrachten drei Fälle:

1. Nichtrelativistischer Grenzfall $v \ll c$ (also $\vec{u} = c\widehat{\Delta r} - \vec{v} \cong c\widehat{\Delta r}$). Hier können wir alle Terme mit v/c vernachlässigen und erhalten

$$\frac{\left| \widehat{\Delta r} \times (\vec{u} \times \vec{a}) \right|^2}{(\widehat{\Delta r} \cdot \vec{u})^6} \cong \frac{a^2}{c^4} \sin^2 \beta = \frac{a^2}{c^4} \sin^2 \angle(\vec{\Delta r}, \vec{a}). \quad (11.139)$$

Es folgt für den Poynting-Vektor

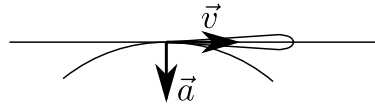
$$\vec{S} \cong \frac{1}{16\pi^2\epsilon_0} \frac{q^2 a^2}{c^3} \frac{1}{(\Delta r)^2} \sin^2 \beta \widehat{\Delta r}. \quad (11.140)$$

Die Winkelabhängigkeit erinnert an Dipolstrahlung. Die momentane Abstrahlung ist maximal in der Ebene senkrecht zur Beschleunigung \vec{a} und Null auf der Achse parallel zu \vec{a} . Es ist nicht überraschend, dass sich eine Ladung, die in einer festen Richtung mit kleiner Amplitude oszilliert, wie ein elektrischer Dipolstrahler verhält.

2. Ultrarelativistischer Grenzfall $v \rightarrow c$. In diesem Limes ist

$$\begin{aligned} \frac{|\widehat{\Delta r} \times (\vec{u} \times \vec{a})|^2}{(\widehat{\Delta r} \cdot \vec{u})^6} &\cong \frac{a^2}{c^4} \frac{\sin^2 \beta + 2 \cos \beta \cos \gamma - 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}{(1 - \cos \alpha)^6} \\ &= \frac{a^2}{c^4} \frac{(1 - \cos \alpha)^2 + 2 \cos \beta \cos \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}{(1 - \cos \alpha)^6} \\ &= \frac{a^2}{c^4} \frac{1 - \cos \alpha + 2 \cos \beta \cos \gamma}{(1 - \cos \alpha)^5} = \frac{a^2}{c^4} \left[\frac{1}{(1 - \cos \alpha)^4} + \frac{2 \cos \beta \cos \gamma}{(1 - \cos \alpha)^5} \right]. \end{aligned} \quad (11.141)$$

Die Abstrahlung divergiert offenbar in Vorwärtsrichtung für $\alpha \rightarrow 0$, d. h. in der Richtung von \vec{v} . Die Divergenz wird für $v < c$ abgeschnitten. Abstrahlung wird also einerseits sehr stark und andererseits ist sie konzentriert in einem schmalen Kegel in Vorwärtsrichtung.



Diese starke Abstrahlung (*Synchrotronstrahlung*) ist bei Ringbeschleunigern in der Hochenergiephysik unerwünscht, da die abgestrahlte Energie nachgeliefert werden muss. Die Bewegung in einem Ringbeschleuniger ist auch für $v = \text{const}$ beschleunigt, da die Teilchen auf einer geschlossenen Bahn gehalten werden müssen. Bei Synchrotronstrahlungsquellen wird der Effekt andererseits ausgenutzt, um intensive, breitbandige und gut kollimierte elektromagnetische Strahlung zu erzeugen.

3. Geradlinige Bewegung, $\vec{a} \parallel \vec{v}$, mit beliebiger Geschwindigkeit. Es kann sich um Beschleunigung ($\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$) oder Abbremsung ($\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$) handeln. Hier gilt

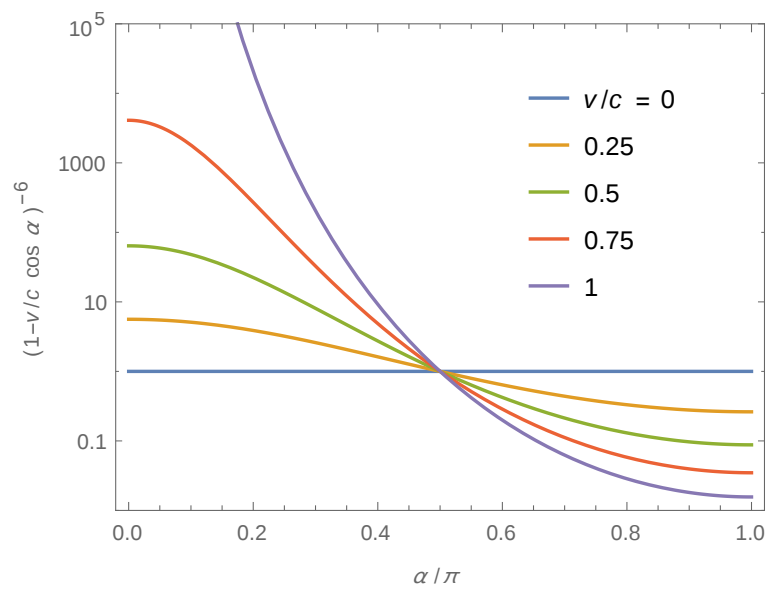
$$\gamma = 0, \beta = \alpha \quad \text{für } \vec{a} \cdot \vec{v} > 0, \quad (11.142)$$

$$\gamma = \pi, \beta = \pi - \alpha \quad \text{für } \vec{a} \cdot \vec{v} < 0. \quad (11.143)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{|\widehat{\Delta r} \times (\vec{u} \times \vec{a})|^2}{(\widehat{\Delta r} \cdot \vec{u})^6} &= \frac{a^2}{c^4} \frac{\sin^2 \alpha + 2 \frac{v}{c} (\cos \alpha - \cos \alpha) + \frac{v^2}{c^2} (\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha)}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \alpha\right)^6} \\ &= \frac{a^2}{c^4} \frac{\sin^2 \alpha}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \alpha\right)^6} \equiv \frac{a^2}{c^4} \frac{\sin^2 \beta}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \alpha\right)^6}. \end{aligned} \quad (11.144)$$

Die typische Dipolcharakteristik wird also multipliziert mit einem Faktor, der in Vorwärtsrichtung groß wird, wenn v nicht klein gegenüber c ist. Wir sehen also für den Fall $\vec{a} \parallel \vec{v}$ besonders deutlich, wie der nichtrelativistische Grenzfall für wachsendes v/c in den ultrarelativistischen übergeht.



Kapitel 12

Variationsprinzip der Elektrodynamik

Die klassische Mechanik lässt sich, zumindest für nicht dissipative Kräfte, elegant durch das Hamiltonsche Prinzip $\delta S = 0$ ausdrücken. Dabei ist die *Wirkung*

$$S[\vec{q}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) \quad (12.1)$$

ein Funktional der Konfigurationsbahnen $\vec{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots)$. Die q_i sind generalisierte Koordinaten, die \dot{q}_i sind die zugehörigen Geschwindigkeiten und L ist die Lagrange-Funktion, vgl. auch 8.4.3. In diesem kurzen Kapitel soll gezeigt werden, dass auch die Elektrodynamik auf ein analoges Variationsprinzip zurückgeführt werden kann. Dies ist eine recht allgemeine Eigenschaft physikalischer Theorien.

12.1 Lagrange-Formalismus für Felder

Wir müssen zunächst verstehen, wie der Lagrange-Formalismus und das Hamiltonsche Prinzip auf *Felder* verallgemeinert werden können. Ein Feld $\varphi(\vec{r}, t)$ ist bekanntlich eine Größe, die an jedem Raumpunkt \vec{r} ein oder mehrere Freiheitsgrade hat. Die Ortsvariable \vec{r} tritt also an die Stelle des Index i der generalisierten Koordinaten $q_i(t)$, oder zu diesen hinzu. Bei der Herleitung der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen aus dem Hamiltonschen Prinzip der Mechanik werden *Funktionalableitungen* verwendet, die den gewöhnlichen Ableitungsregeln gehorchen und außerdem die fundamentalen Relationen

$$\frac{\delta q_i(T)}{\delta q_j(t)} = \delta_{ij} \delta(T - t), \quad (12.2)$$

$$\frac{\delta \dot{q}_i(T)}{\delta q_j(t)} = \delta_{ij} \frac{d}{dT} \delta(T - t) \quad (12.3)$$

und allgemeiner für die n -te Ableitung

$$\frac{\delta q_i^{(n)}(T)}{\delta q_j(t)} = \delta_{ij} \delta^{(n)}(T - t) \quad (12.4)$$

erfüllen.

Die Funktionalableitung zu einem Feld $\varphi(\vec{r}, t)$ ist analog zur Funktionalableitung nach einer zeitabhängigen Funktion $q(t)$ definiert, wobei nur zu beachten ist, dass φ von zusätzlichen Variablen abhängt. Insbesondere gilt

$$\frac{\delta \varphi(\vec{R}, T)}{\delta \varphi(\vec{r}, t)} = \delta(\vec{R} - \vec{r}) \delta(T - t) \quad (12.5)$$

und allgemeiner für einen beliebigen Differentialoperator D , z. B. $\vec{\nabla}_{\vec{R}}, \vec{\nabla}_{\vec{R}}^2, \partial/\partial T, \dots$,

$$\frac{\delta D\varphi(\vec{R}, T)}{\delta \varphi(\vec{r}, t)} = D \delta(\vec{R} - \vec{r}) \delta(T - t). \quad (12.6)$$

Für ein Feld φ schreiben wir die Wirkung als

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(t) = \int dt d^3r \mathcal{L}(\vec{r}, t) \quad (12.7)$$

mit der *Lagrange-Dichte* \mathcal{L} , die (typischerweise lokal) vom Feld, dessen ersten Ableitungen und evtl. explizit von Ort und Zeit abhängt. Also ist

$$S = \int dt d^3r \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \vec{\nabla}\varphi, \vec{r}, t), \quad (12.8)$$

was wir auch in Viererschreibweise als

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi, \partial^0\varphi, \partial^1\varphi, \partial^2\varphi, \partial^3\varphi, x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (12.9)$$

schreiben können. Die Wirkung *kann* also ein Lorentz-Skalar sein. Für eine Lorentz-invariante Theorie ist dies notwendig, sonst nicht.

■ Beispiel: Skalare Wellengleichung. Mit

$$\mathcal{L} = \frac{\gamma}{2} (\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) \quad (12.10)$$

für ein reelles Feld $\varphi(\vec{r}, t)$ lautet das Hamiltonsche Prinzip, mit $\partial'_\mu := \partial/\partial x'^\mu$ und $x \equiv (x^\mu)$,

$$0 = \frac{\delta S}{\delta\varphi(x)} = \int d^4x' \frac{\gamma}{2} \left[\frac{\delta\partial'_\mu\varphi(x')}{\delta\varphi(x)} \partial'^\mu\varphi(x') + \partial'_\mu\varphi(x') \frac{\delta\partial'^\mu\varphi(x')}{\delta\varphi(x)} \right] \quad (12.11)$$

$$= \frac{\gamma}{2} \int d^4x' [(\partial'_\mu\delta(x'-x))(\partial'^\mu\varphi(x')) + (\partial'_\mu\varphi(x'))(\partial'^\mu\delta(x'-x))] \quad (12.12)$$

$$= -\frac{\gamma}{2} \int d^4x' [\delta(x'-x)\partial'_\mu\partial'^\mu\varphi(x') + (\partial'^\mu\partial'_\mu\varphi(x'))\delta(x'-x)] \quad (12.13)$$

$$= -\gamma \partial_\mu\partial^\mu\varphi(x). \quad (12.14)$$

Damit erhalten wir als Euler-Lagrange-Gleichung die Wellengleichung

$$\partial_\mu\partial^\mu\varphi \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \nabla^2\varphi = 0. \quad (12.15)$$

12.2 Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Feldes und Maxwell-Gleichungen

In diesem Abschnitt wird die Lagrange-Dichte des klassischen elektromagnetischen Feldes plausibel gemacht und gezeigt, dass daraus tatsächlich die Maxwell-Gleichungen folgen. Die kovariante Notation ist hier vorteilhaft. Die Lagrange-Dichte \mathcal{L}_0 für das *freie* Feld ohne Ladungen und Ströme ist eingeschränkt durch die Forderungen, dass

1. Lorentz-Invarianz und
2. Eichinvarianz

erfüllt sein sollen. Wegen Forderung 1 muss \mathcal{L}_0 ein Lorentz-Skalar sein (beachte, dass das Raumzeitelement d^4x ein Lorentz-Skalar ist). Wegen Forderung 2 muss sich \mathcal{L}_0 allein durch \vec{E} und \vec{B} , also durch $(F^{\mu\nu})$ ausdrücken lassen. Wie in 10.2.3 und 10.2.4 gesehen, sind die einfachsten Lorentz-Skalare, die aus $(F^{\mu\nu})$ konstruiert werden können,

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2 \left(B^2 - \frac{E^2}{c^2} \right) \quad (12.16)$$

und

$$F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = -\frac{4}{c} \vec{E} \cdot \vec{B}. \quad (12.17)$$

Der zweite Ausdruck ist aber eine Viererdivergenz:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} &= \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) = 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\rho A_\sigma) \\ &= 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu(A_\nu\partial_\rho A_\sigma) - 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu\partial_\mu\partial_\rho A_\sigma\end{aligned}\quad (12.18)$$

und im zweiten Term ist $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ antisymmetrisch unter der Vertauschung $\mu \leftrightarrow \sigma$, während $\partial_\mu\partial_\rho$ symmetrisch ist. Summation über μ und ρ ergibt daher Null. Also ist

$$\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = \partial_\mu 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu\partial_\rho A_\sigma.\quad (12.19)$$

Ein Divergenzterm in der Lagrange-Dichte wird zu einem Randterm in der Wirkung $S = \int d^4x \mathcal{L}$ (Gaußscher Satz) und trägt – wie totale Zeitableitungen in der Mechanik – nichts zu den klassischen Bewegungsgleichungen bei. In der Quantentheorie des Feldes wäre ein solcher sogenannter *Axion-Term* aber sehr wohl relevant.

In der klassischen Feldtheorie bleibt $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ als einfachste Lorentz- und eichinvariante Form. Der Vorfaktor ist irrelevant für die Bewegungsgleichungen, da $\delta S = 0$ mit irgendeinem Faktor multipliziert werden kann. Man wählt üblicherweise

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\quad (12.20)$$

als Ansatz für das freie Feld. Nun sind E_i und B_j keine unabhängigen Freiheitsgrade des Feldes. Die Komponenten A_μ des Viererpotentials sind dagegen unabhängig (wobei eine beliebig geeicht werden kann). Es liegt daher nahe, A_μ als Freiheitsgrad (generalisierte Koordinaten) zu behandeln.

Als nächstes müssen wir die Kopplung des Feldes an Ladungen und Ströme hinzufügen, um die volle Lagrange-Dichte \mathcal{L} zu erhalten. Es scheint zunächst so, als ob wir aus den kovarianten und eichinvarianten Größen ($F^{\mu\nu}$), (j^μ) und (∂^μ) einen Skalar als Beitrag zu \mathcal{L} konstruieren müssen. Es ist interessant, sich mögliche Terme zu überlegen ($F_{\mu\nu}j^\mu j^\nu$ ist z. B. kein geeigneter Ansatz, da gleich Null!). Diese sind ziemlich kompliziert und beschreiben auch nicht die beobachtete Kopplung. Der Ausweg liegt darin, zu erkennen, dass auch das nicht eichinvariante Potential (A^μ) auftreten darf, solange eine Umeichung von (A^μ) die Bewegungsgleichungen des Feldes nicht beeinflusst. Dies gestattet aber den einfachen Term $j_\mu A^\mu$, denn die Umeichung

$$A^\mu \rightarrow A^\mu - \partial^\mu \chi\quad (12.21)$$

führt zu dem Zusatzterm

$$-j_\mu \partial^\mu \chi = -\partial^\mu (j_\mu \chi) + \underbrace{\chi \partial^\mu j_\mu}_{=0} = -\partial^\mu (j_\mu \chi)\quad (12.22)$$

aufgrund der Kontinuitätsgleichung (wir setzen also Ladungserhaltung voraus). Dies ist aber eine Viererdivergenz und somit irrelevant für die Bewegungsgleichungen, ähnlich wie der Axion-Term. Daher ist ein Term proportional zu $j_\mu A^\mu$ in \mathcal{L} erlaubt. Sein Vorfaktor (relativ zum Vorfaktor von $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$) beschreibt die Stärke der Kopplung und lässt sich nicht aus Symmetrieüberlegungen ermitteln. Wir wählen ihn gleich so, dass die korrekten Maxwell-Gleichungen folgen. Dann lautet die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \mu_0 j_\mu A^\mu = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - \mu_0 j_\mu A^\mu.\quad (12.23)$$

Das Hamiltonsche Prinzip lautet nun (wir schreiben Viererortsvektoren als x, x')

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\delta S}{\delta A^\rho(x)} = \int d^4x' \frac{\delta}{\delta A^\rho(x)} \left[-\frac{1}{4}(\partial'_\mu A_\nu(x') - \partial'_\nu A_\mu(x'))(\partial'^\mu A^\nu(x') - \partial'^\nu A^\mu(x')) - \mu_0 j_\mu(x')A^\mu(x') \right] \\ &= \int d^4x' \left[-\frac{1}{2}(\partial'_\mu A_\nu(x') - \partial'_\nu A_\mu(x'))(\partial'^\mu \delta_\rho^\nu \delta(x' - x) - \partial'^\nu \delta_\rho^\mu \delta(x' - x)) - \mu_0 j_\mu(x')\delta_\rho^\mu \delta(x' - x) \right],\end{aligned}\quad (12.24)$$

wobei $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}F^{\rho\sigma}F^{\mu\nu}$ verwendet wurde. Weiter folgt durch Umbenennung

$$\begin{aligned}
\dots &= \int d^4x' \left[-\frac{1}{2}(\partial'_\mu A_\nu(x') - \partial'_\nu A_\mu(x'))\partial'^\mu \delta'_\rho \delta(x' - x) + \frac{1}{2}(\partial'_\nu A_\mu(x') - \partial'_\mu A_\nu(x'))\partial'^\mu \delta'_\rho \delta(x' - x) \right. \\
&\quad \left. - \mu_0 j_\mu(x')\delta'_\rho \delta(x' - x) \right] \\
&= \int d^4x' \left[-(\partial'_\mu A_\nu(x') - \partial'_\nu A_\mu(x'))\partial'^\mu \delta'_\rho \delta(x' - x) - \mu_0 j_\mu(x')\delta'_\rho \delta(x' - x) \right] \\
&\stackrel{\text{partiell}}{=} \int d^4x' \left[+\delta'_\rho \delta(x' - x)\partial'^\mu \underbrace{(\partial'_\mu A_\nu(x') - \partial'_\nu A_\mu(x'))}_{= F_{\mu\nu}(x')} - \mu_0 j_\mu(x')\delta'_\rho \delta(x' - x) \right] \\
&= \delta'_\rho \partial'^\mu F_{\mu\nu} - \mu_0 \delta'_\rho j_\mu = \partial'^\mu F_{\mu\rho} - \mu j_\rho \tag{12.25} \\
&\Rightarrow \partial'^\mu F_{\mu\nu} = \mu_0 j_\nu. \tag{12.26}
\end{aligned}$$

Dies sind die inhomogenen Maxwell-Gleichungen. Wir haben gezeigt, dass sie sich als Euler-Lagrange-Gleichungen zur Lagrange-Dichte (12.23) ergeben. Die homogenen folgen ja ohnehin schon aus der Darstellung durch ein Potential, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, wie in 10.2.3 gezeigt. Als Fazit: Die Elektrodynamik lässt sich, wie die Mechanik, auf ein kompaktes Variationsprinzip $\delta S = 0$ zurückführen. Der hierfür verwendete Lagrange-Formalismus ist auch sehr nützlich, um die Quantentheorie des Feldes aufzustellen – die Quantenelektrodynamik.

Anhang A

Mathematische Grundlagen

In diesem Appendix wiederholen wir die mathematischen Grundlagen, die für die Vorlesung insgesamt von Bedeutung sind. Es handelt sich v. a. um Definitionen und Sätze aus der Analysis im \mathbb{R}^3 .

A.1 Vektoren und Koordinatensysteme

Ein *Vektor* ist, grob gesprochen, eine Größe, die durch einen *Betrag* und eine *Richtung* charakterisiert ist. Beispiele sind der Ort und Ortsdifferenzen (Verschiebungen), Geschwindigkeit und Beschleunigung. Eine exakte Definition folgt später. Ein *Skalar* ist demgegenüber eine Größe ohne Richtungssinn, zum Beispiel die Masse. Wir verwenden hier als Notation für Vektoren einen Vektorpfeil über dem Symbol: \vec{r} . Viele Bücher verwenden für Vektoren Buchstaben in Fettschrift, entweder aufrecht oder kursiv. Für *Einheitsvektoren*, d. h. Vektoren mit dem Betrag eins, verwenden wir einen Zirkumflex über dem Symbol: \hat{r} . Für den Betrag eines Vektors schreiben wir oft das entsprechende Symbol ohne Vektorpfeil, also z. B.:

$$r := |\vec{r}| \quad \text{und damit} \quad \hat{r} := \frac{\vec{r}}{r}. \quad (\text{A.1})$$

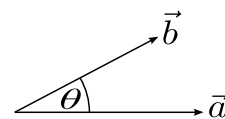
A.1.1 Produkte von Vektoren

Die Regel für die Addition von Vektoren setzen wir als bekannt voraus. Auch die Multiplikation lässt sich auf Vektoren verallgemeinern, jedoch auf mehr als eine Art. Für zwei Vektoren \vec{a} , \vec{b} definiert man folgende Produkte:

(a) Skalarprodukt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \equiv ab \cos \theta, \quad (\text{A.2})$$

wobei θ der eingeschlossene Winkel ist. Das Ergebnis ist ein *Skalar*. In kartesischen Koordinaten lautet es $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$. Eine alternative Schreibweise ist $\vec{a}^T \vec{b}$. T steht für den transponierten Vektor, also den *Zeilenvektor* (Matrix mit einer Zeile) \vec{a}^T zum *Spaltenvektor* (Matrix mit einer Spalte) \vec{a} . In $\vec{a}^T \vec{b}$ ergibt sich das Skalarprodukt als Spezialfall der üblichen Regel für Matrizenmultiplikation („Zeile mal Spalte“). Diese Schreibweise verwenden wir hier nicht; wir unterscheiden nicht zwischen Zeilen- und Spaltenvektoren. Aus dem Skalarprodukt erhalten wir die (übliche) Norm eines Vektors $|\vec{a}| := \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.



(b) Vektorprodukt (Kreuzprodukt):

$$\vec{a} \times \vec{b} := ab \sin \theta \hat{n}, \quad (\text{A.3})$$

wobei θ der eingeschlossene Winkel und \hat{n} der auf der von \vec{a} , \vec{b} aufgespannten Ebene senkrecht stehende Einheitsvektor ist, so dass \vec{a} , \vec{b} , \hat{n} ein *Rechtssystem* bilden. Diese Definition von \hat{n} ist nicht eindeutig, falls

\vec{a} und \vec{b} parallel liegen, aber dann ist ohnehin $\theta = 0$ und damit $\vec{a} \times \vec{b} = 0$. In kartesischen Koordinaten ist

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

$\vec{a} \times \vec{b}$ ist also *antikommutativ*: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. Das Kreuzprodukt können wir mit Hilfe des *Levi-Civita-Symbols* ϵ_{ijk} auch schreiben als

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} a_j b_k. \quad (\text{A.5})$$

Zur Erinnerung:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{für } (i, j, k) \text{ gerade Permutationen von } (1, 2, 3), \\ -1 & \text{für } (i, j, k) \text{ ungerade Permutationen von } (1, 2, 3), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Das Vektorprodukt lässt sich, anders als das Skalarprodukt, nicht leicht auf $n \neq 3$ Dimensionen verallgemeinern.

(c) Äußeres Produkt (Tensorprodukt):

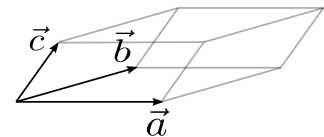
$$\vec{a} \vec{b} = \vec{a} \otimes \vec{b}. \quad (\text{A.7})$$

Das äußere Produkt ist eine Matrix, die in kartesischen Koordinaten lautet:

$$\vec{a} \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Man nennt diese spezielle Form von Matrix auch eine *Dyade*. Eine alternative Schreibweise ist $\vec{a} \vec{b}^T$, man kann sich überzeugen, dass diese Notation unter Beachtung der Regel „Zeile mal Spalte“ sinnvoll ist.

Für drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} ist insbesondere das *Spatprodukt* $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ wichtig. Es ist ein Skalar, dessen Betrag das *Volumen* des durch \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} aufgespannten *Parallelepipeds* ist. Das Vorzeichen ist + (−), wenn \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} ein Rechtssystem (Linkssystem) bilden. Es gilt



$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) & (\text{A.9}) \\ &= -\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) = -\vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = -\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}). & (\text{A.10}) \end{aligned}$$

In kartesischen Koordinaten ist das Spatprodukt eine Determinante:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

Aus drei Vektoren können wir auch den Vektor $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ bilden. Hierfür gilt die „BAC-CAB-Regel“:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}). \quad (\text{A.12})$$

Die Zeichenketten „ $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$ “ und „ $\vec{a} \times (\vec{b} \cdot \vec{c})$ “ sind nicht wohlgeformt und stellen daher keine mathematischen Ausdrücke dar.

A.1.2 Felder und partielle Ableitungen

Wir hatten bereits den Begriff des *Feldes* als vom Ort \vec{r} und evtl. von der Zeit (und weiteren Parametern) abhängiger Größe eingeführt. Ist an jedem Ort ein Skalar definiert, sprechen wir von einem *skalaren Feld*. Ein Beispiel ist die Dichte $\rho(\vec{r})$ einer Flüssigkeit (wir vernachlässigen hier die atomare Struktur, indem wir

über kleine Volumina mitteln, die dennoch groß im Vergleich zu atomaren Abständen sind). Ist die Größe ein Vektor, so sprechen wir von einem *Vektorfeld*, z. B. von der Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r})$ der Flüssigkeit.

In der Mechanik haben wir Bewegungsgleichungen mit Hilfe von (Zeit-) Ableitungen geschrieben. Dies wollen wir auch für Felder tun. Dabei müssen wir beachten, dass Felder von *mehreren* unabhängigen Variablen, z. B. x, y, z, t , abhängen. Bei der Ableitung nach einer davon sollen die übrigen konstant gehalten werden. Das wird durch die *partielle Ableitung* ausgedrückt: Für $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ ist

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho(\vec{r}, t + \Delta t) - \rho(\vec{r}, t)}{\Delta t}. \quad (\text{A.13})$$

Dies ist die Ableitung nach einem Skalar. Die Ableitung nach einer Vektorkomponente sieht genauso aus:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\rho(x + \Delta x, y, z, t) - \rho(x, y, z, t)}{\Delta x}. \quad (\text{A.14})$$

Bisher haben wir nur eine unabhängige Variable geändert. Wie ändert sich ρ , wenn wir vom Ort \vec{r} nach $\vec{r} + \Delta\vec{r}$ gehen und von der Zeit t nach $t + \Delta t$? Die gesuchte Änderung $\Delta\rho$ von ρ ergibt sich aus einer Taylor-Entwicklung in *allen* Variablen:

$$\rho(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t + \Delta t) = \rho(\vec{r}, t) + \frac{\partial \rho}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \rho}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \rho}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta t + \text{Terme höherer Ordnung}. \quad (\text{A.15})$$

Es folgt

$$\Delta\rho = \rho(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t + \Delta t) - \rho(\vec{r}, t) \cong \frac{\partial \rho}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \rho}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \rho}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta t. \quad (\text{A.16})$$

Das Zeichen „ \cong “ bedeutet „bis auf Terme höherer Ordnung“. Machen wir die Änderungen $\Delta\vec{r}, \Delta t$ infinitesimal, so folgt

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial y} dy + \frac{\partial \rho}{\partial z} dz + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt. \quad (\text{A.17})$$

und hier steht „ $=$ “, da die Terme höherer Ordnung im Vergleich zu dx schneller gegen Null gehen (z. B. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x^2 / \Delta x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0$). $d\rho$ heißt *totales Differential* von ρ .

A.1.3 Koordinatensysteme

Es ist oft sinnvoll, Größen in verschiedenen Koordinatensystemen darzustellen, da in geeigneten Koordinatensystemen die Lösung bestimmter Probleme sehr viel einfacher wird. Wir beschränken uns in der folgenden Diskussion auf dreidimensionale Räume, die Verallgemeinerung auf n -dimensionale Räume ist einfach.

Wir betrachten zunächst den Ortsvektor \vec{r} , der einen Raumpunkt beschreibt. Offenbar werden drei reelle Größen benötigt, um einen Punkt im dreidimensionalen Raum eindeutig zu charakterisieren. Verschiedene Arten der Charakterisierung entsprechen verschiedenen Koordinatensystemen. Zum Beispiel können wir \vec{r} durch *kartesische Koordinaten* $(x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$ darstellen. Wir wissen, dass jeder Vektor \vec{r} für ein fest gewähltes kartesisches Koordinatensystem *eindeutig* durch ein Zahlentripel (x, y, z) dargestellt wird, d. h. zu jedem \vec{r} existiert genau ein Tripel (x, y, z) .

Sei $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ eine Darstellung *desselben* Ortsvektors \vec{r} in einem anderen Koordinatensystem. Es scheint sinnvoll zu verlangen, dass diese Darstellung ebenfalls eindeutig ist, d. h., dass zu jedem \vec{r} genau ein Tripel $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$. Diese Forderung ist aber etwas zu streng und schließt daher nützliche Koordinatensysteme aus. So ist in ebenen Polarkoordinaten der Winkel ϕ für $\vec{r} = 0$ offensichtlich nicht eindeutig bestimmt. Also verlangen wir nur, dass die Abbildung *fast überall* eindeutig sein soll. („Fast überall“ bedeutet überall bis auf eine Menge vom Maß Null, d. h. in drei Dimensionen bis auf eine Menge mit verschwindendem Volumen. Das kann z. B. eine Kurve oder eine Menge von Punkten sein.) Für zwei Darstellungen $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ und (χ_1, χ_2, χ_3) desselben Ortsvektors \vec{r} in unterschiedlichen Koordinatensystemen fordern wir entsprechend, dass die *Koordinatentransformation*

$$\chi_1 = \chi_1(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3), \quad (\text{A.18})$$

$$\chi_2 = \chi_2(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3), \quad (\text{A.19})$$

$$\chi_3 = \chi_3(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \quad (\text{A.20})$$

fast überall umkehrbar sein soll.

Diese Transformation ist an einem gegebenen Punkt umkehrbar, wenn infinitesimale Änderungen $d\zeta_i$ von ζ_i ($i = 1, 2, 3$) dort eineindeutig auf infinitesimale Änderungen $d\chi_j$ von χ_j ($j = 1, 2, 3$) abgebildet werden. Es gilt

$$d\chi_j = \chi_j(\zeta_1 + d\zeta_1, \zeta_2 + d\zeta_2, \zeta_3 + d\zeta_3) - \chi_j(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \frac{\partial \chi_j}{\partial \zeta_1} d\zeta_1 + \frac{\partial \chi_j}{\partial \zeta_2} d\zeta_2 + \frac{\partial \chi_j}{\partial \zeta_3} d\zeta_3 = \sum_i \frac{\partial \chi_j}{\partial \zeta_i} d\zeta_i. \quad (\text{A.21})$$

Das können wir auch als Multiplikation mit einer Matrix schreiben,

$$\begin{pmatrix} d\chi_1 \\ d\chi_2 \\ d\chi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial \chi_1}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial \chi_1}{\partial \zeta_3} \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial \chi_2}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial \chi_2}{\partial \zeta_3} \\ \frac{\partial \chi_3}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial \chi_3}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial \chi_3}{\partial \zeta_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\zeta_1 \\ d\zeta_2 \\ d\zeta_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.22})$$

Die hier auftretende Matrix heißt *Funktionalmatrix*. Gleichung (A.22) ist eine lineare Abbildung. Wir wissen, dass sie eineindeutig ist, wenn die Koeffizientenmatrix, also die Funktionalmatrix, invertierbar ist. Das ist genau dann der Fall, wenn ihre Determinante nicht verschwindet, d. h. wenn

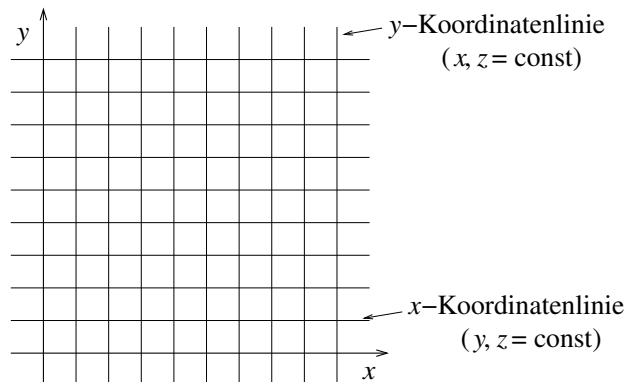
$$\frac{\partial(\chi_1, \chi_2, \chi_3)}{\partial(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)} := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial \chi_1}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial \chi_1}{\partial \zeta_3} \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial \chi_2}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial \chi_2}{\partial \zeta_3} \\ \frac{\partial \chi_3}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial \chi_3}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial \chi_3}{\partial \zeta_3} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial \chi_1}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial \chi_1}{\partial \zeta_3} \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial \chi_2}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial \chi_2}{\partial \zeta_3} \\ \frac{\partial \chi_3}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial \chi_3}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial \chi_3}{\partial \zeta_3} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (\text{A.23})$$

Diese Größe nennt man *Funktionaldeterminante* oder *Jacobi-Determinante*. Wir fordern also, dass diese Jacobi-Determinante fast überall von Null verschieden ist.

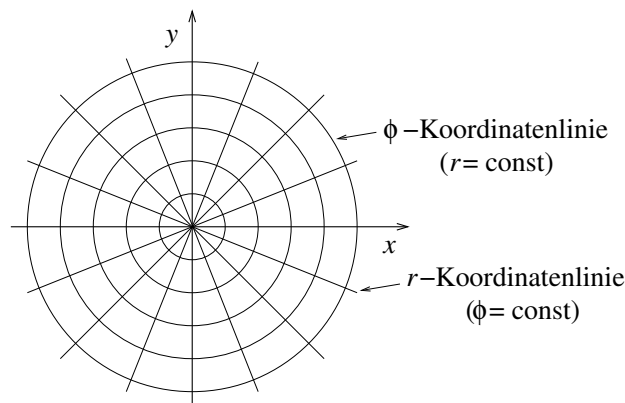
Die Koordinaten $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ überziehen den Raum mit einem Netz, das durch die *Koordinatenlinien* gebildet wird. Die Koordinatenlinien sind Raumkurven, die wir erhalten, indem wir alle bis auf eine Koordinate konstant lassen. Zum Beispiel erhalten wir für jede Wahl von Konstanten ζ_2 und ζ_3 eine ζ_1 -Koordinatenlinie

$$\zeta_1 \rightarrow \vec{r}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3). \quad (\text{A.24})$$

Die Koordinatenlinien für kartesische Koordinaten sind Geraden, die ein rechtwinkliges Netz bilden:



Die r -Koordinatenlinien für ebene Polarkoordinaten sind am Nullpunkt beginnende Halbgeraden (Strahlen), die ϕ -Koordinatenlinien sind konzentrische Kreise um den Nullpunkt:



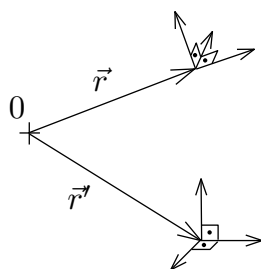
Wir können nun an jedem Punkt lokale Koordinatenachsen einführen. Diese sollen die Richtungen bezeichnen, in denen sich die Koordinaten $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ ändern. Diese Richtungen sind durch die *natürlichen Basisvektoren*

$$\vec{h}_i := \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_i} \quad (\text{A.25})$$

gegeben. Da bei der partiellen Ableitung nach ζ_i die anderen Koordinaten konstant zu halten sind, liegt der Basisvektor \vec{h}_i tangential zur ζ_i -Koordinatenlinie. Es ist oft nützlich, normierte Basisvektoren zu verwenden, diese erhält man einfach aus

$$\hat{e}_i := \frac{\vec{h}_i}{|\vec{h}_i|}. \quad (\text{A.26})$$

Die Einheitsvektoren $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ bilden (fast überall) ein *Dreibein*. Das Dreibein muss nicht an jedem Raumpunkt gleich sein. Es muss auch nicht orthogonal sein. Wir werden allerdings im Folgenden nur solche Koordinatensysteme verwenden, deren Einheitsvektoren (fast überall) orthogonal sind.



Wir ordnen dann die Einheitsvektoren $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ o.B.d.A. so, dass sie ein Rechtssystem bilden. Damit gilt $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$ und $\hat{e}_1 \cdot (\hat{e}_2 \times \hat{e}_3) = 1$.

An einem Ort \vec{r} drücken wir einen beliebigen Vektor \vec{b} , der nicht der Ortsvektor \vec{r} sein muss, durch die Einheitsvektoren $\hat{e}_i(\vec{r})$ am Ort \vec{r} aus:

$$\vec{b} = b_1 \hat{e}_1 + b_2 \hat{e}_2 + b_3 \hat{e}_3. \quad (\text{A.27})$$

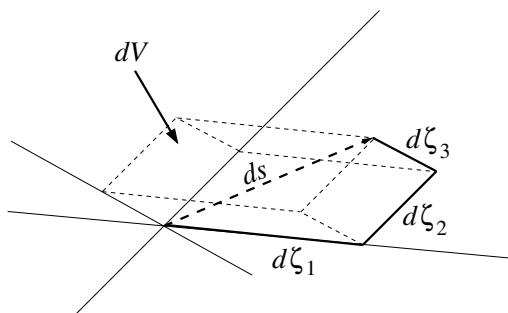
Durch skalare Multiplikation mit \hat{e}_i unter Ausnutzung der Orthonormalität erhalten wir für die Komponenten

$$b_i = \hat{e}_i \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \hat{e}_i. \quad (\text{A.28})$$

Speziell für den Ortsvektor haben wir natürlich

$$r_i = \hat{e}_i \cdot \vec{r} = \vec{r} \cdot \hat{e}_i. \quad (\text{A.29})$$

Es ist zu beachten, dass die *Komponenten* r_i des Ortsvektors in ζ -Koordinaten i. A. nicht mit den *Koordinaten* ζ_i übereinstimmen. Das Beispiel der Kugelkoordinaten wird dies gleich zeigen.



Infinitesimale Änderungen $d\zeta_i$ der Koordinaten ζ_i führen auf zwei weitere wichtige Größen: Zum einen können wir nach dem Abstand des neuen Punktes vom alten fragen. Der *Abstandsvektor* ist

$$d\vec{r} := \vec{r}(\zeta_1 + d\zeta_1, \zeta_2 + d\zeta_2, \zeta_3 + d\zeta_3) - \vec{r}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_i} d\zeta_i = \sum_i \vec{h}_i d\zeta_i. \quad (\text{A.30})$$

Damit ist der Abstand, genannt das *Linielement*,

$$ds := |d\vec{r}| = \left| \sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_i} d\zeta_i \right| = \left| \sum_i \vec{h}_i d\zeta_i \right|. \quad (\text{A.31})$$

Sind die Basisvektoren \vec{h}_i orthogonal, so vereinfacht sich dies zu (Satz von Pythagoras)

$$ds = \sqrt{\sum_i |\vec{h}_i|^2 (d\zeta_i)^2} \quad (\text{A.32})$$

oder

$$ds^2 = \sum_i |\vec{h}_i|^2 (d\zeta_i)^2. \quad (\text{A.33})$$

Das Linielement ist wichtig für die Berechnung von Kurvenintegralen.

Zum anderen spannen die drei Verschiebungen $d\zeta_i$ entlang der Koordinatenlinien ein Parallelepipet auf. Sein Volumen ist das *Volumenelement*

$$dV := \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_1} d\zeta_1 \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_2} d\zeta_2 \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_3} d\zeta_3 \right) = \vec{h}_1 \cdot (\vec{h}_2 \times \vec{h}_3) d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3. \quad (\text{A.34})$$

Sind die \vec{h}_i orthogonal, so wird dies zu

$$dV = |\vec{h}_1| |\vec{h}_2| |\vec{h}_3| d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3. \quad (\text{A.35})$$

Allgemein lässt sich das Spatprodukt mit der Jacobi-Determinante in Verbindung bringen: Sind (x_1, x_2, x_3) die kartesischen Komponenten von \vec{r} , so ist

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_1} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_2} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_3} \right) = \sum_{i,j,k=1,2,3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial \zeta_1} \frac{\partial x_j}{\partial \zeta_2} \frac{\partial x_k}{\partial \zeta_3} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \zeta_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \zeta_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \zeta_3} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)}. \quad (\text{A.36})$$

Damit erhalten wir

$$dV = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)} d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3. \quad (\text{A.37})$$

Diese Darstellung ist wichtig, wenn wir Volumenintegrale in beliebigen Koordinatensystemen ausrechnen wollen.

Den *Gradienten-* oder *Nabla-Operator* $\vec{\nabla}$ definieren wir durch die Forderung, dass für das totale Differential df einer skalaren Funktion $f(\vec{r})$ gelten soll

$$df(\vec{r}) \stackrel{!}{=} d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r}) = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_1} d\zeta_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_2} d\zeta_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_3} d\zeta_3 \right) \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r}) = \left(\sum_i \vec{h}_i d\zeta_i \right) \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r}). \quad (\text{A.38})$$

Nach der Kettenregel gilt andererseits

$$df(\vec{r}) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \zeta_i} d\zeta_i. \quad (\text{A.39})$$

Da die $d\zeta_i$ unabhängig und beliebig sind, folgt

$$\vec{h}_i \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r}) = \frac{\partial f}{\partial \zeta_i}, \quad (\text{A.40})$$

also

$$\hat{e}_i \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{h}_i|} \frac{\partial f}{\partial \zeta_i}. \quad (\text{A.41})$$

Da dies für alle Funktionen $f(\vec{r})$ gelten soll, können wir für die ζ -Komponenten von $\vec{\nabla}$ schreiben

$$\hat{e}_i \cdot \vec{\nabla} = \frac{1}{|\vec{h}_i|} \frac{\partial}{\partial \zeta_i}. \quad (\text{A.42})$$

Da wir angenommen haben, dass die \hat{e}_i orthonormal sind, können wir nun den Nabla-Operator schreiben als

$$\vec{\nabla} \equiv \sum_i \hat{e}_i (\hat{e}_i \cdot \vec{\nabla}) = \sum_i \frac{\hat{e}_i}{|\vec{h}_i|} \frac{\partial}{\partial \zeta_i} \equiv \sum_i \frac{\vec{h}_i}{|\vec{h}_i|^2} \frac{\partial}{\partial \zeta_i}. \quad (\text{A.43})$$

Die Reihenfolge der Faktoren ist hier wesentlich. \hat{e}_i und \vec{h}_i hängen i. A. von den Koordinaten ζ_i ab, so dass wir sie nicht einfach an der Ableitung $\partial/\partial\zeta_i$ vorbei ziehen dürfen.

Kartesische Koordinaten

Für kartesische Koordinaten $(x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$ sind die Koordinatenlinien wie erwähnt Geraden, die ein rechtwinkliges Netz bilden. Die natürlichen Basisvektoren sind orthogonal und bereits normiert, $\vec{h}_i = \hat{e}_i$. Das Dreibein ist im gesamten Raum gleich. Wir schreiben die Einheitsvektoren auch als $\hat{e}_1 = \hat{x}$, $\hat{e}_2 = \hat{y}$, $\hat{e}_3 = \hat{z}$. Die Komponentendarstellung $\vec{b} = b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z}$ schreiben wir auch als $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Wenn nichts anderes gesagt ist, meinen wir damit die Komponenten in kartesischen Koordinaten.

Das Linienelement ist einfach

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (\text{A.44})$$

und das Volumenelement ist

$$dV = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x, y, z)} dx dy dz = dx dy dz. \quad (\text{A.45})$$

Der Gradient lautet

$$\vec{\nabla} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (\text{A.46})$$

Kugelkoordinaten

Es bietet sich an, krummlinige Koordinatensysteme mittels der bereits bekannten kartesischen Koordinaten zu definieren. Für Kugelkoordinaten (sphärische Polarkoordinaten) haben wir die Abbildung

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad (\text{A.47})$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi, \quad (\text{A.48})$$

$$z = r \cos \theta. \quad (\text{A.49})$$

Damit lauten die natürlichen Basisvektoren, ausgedrückt in kartesischen Koordinaten,

$$\vec{h}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{A.50})$$

$$\vec{h}_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{A.51})$$

$$\vec{h}_\phi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = r \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.52})$$

Die Normierung ist einfach, wir erhalten

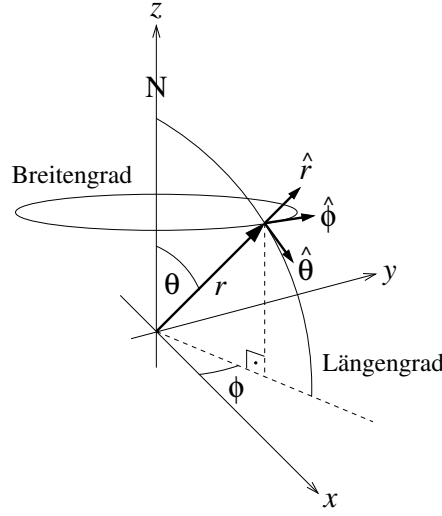
$$\hat{r} = \vec{h}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{A.53})$$

$$\hat{\theta} = \frac{\vec{h}_\theta}{r} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{A.54})$$

$$\hat{\phi} = \frac{\vec{h}_\phi}{r \sin \theta} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.55})$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese Einheitsvektoren orthogonal sind und ein Rechtssystem bilden. Offenbar ist das Dreibein hier vom Ort \vec{r} abhängig. Eine kompaktere Darstellung ist

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}, \quad \hat{\phi} = \frac{\hat{z} \times \hat{r}}{|\hat{z} \times \hat{r}|} = \frac{\hat{z} \times \hat{r}}{\sin \theta}, \quad \hat{\theta} = \hat{\phi} \times \hat{r}. \quad (\text{A.56})$$



Für den Ortsvektor können wir offensichtlich schreiben $\vec{r} = r \hat{r}$. Wir sehen explizit, dass die θ - und ϕ -Komponenten von \vec{r} verschwinden. Sie stimmen also nicht mit den Kugelkoordinaten r, θ, ϕ des durch \vec{r} dargestellten Raumpunktes überein. Hier ist keine Information verloren gegangen, da \hat{r} von θ und ϕ abhängt.

Die Änderung $d\vec{r}$ von \vec{r} können wir ebenfalls nach den Einheitsvektoren zerlegen,

$$d\vec{r} = \vec{h}_r dr + \vec{h}_\theta d\theta + \vec{h}_\phi d\phi = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}, \quad (\text{A.57})$$

wobei wir Glg. (A.53)–(A.55) verwendet haben. Daraus folgt sofort für die Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + r \sin \theta \dot{\phi} \hat{\phi}. \quad (\text{A.58})$$

Während sich \vec{v} unmittelbar aus $d\vec{r}$ ergibt, ist die Beschleunigung $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$ deutlich komplizierter, da die Einheitsvektoren $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ von \vec{r} und damit von t abhängen (siehe Skript zur Theoretischen Mechanik).

Das Linienelement ist

$$ds^2 = |\vec{h}_r|^2 dr^2 + |\vec{h}_\theta|^2 d\theta^2 + |\vec{h}_\phi|^2 d\phi^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (\text{A.59})$$

und das Volumenelement

$$dV = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} dr d\theta d\phi = |\vec{h}_r| |\vec{h}_\theta| |\vec{h}_\phi| dr d\theta d\phi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi. \quad (\text{A.60})$$

Für den Nabla-Operator erhalten wir

$$\vec{\nabla} = \sum_i \frac{\hat{e}_i}{|\vec{h}_i|} \frac{\partial}{\partial \zeta_i} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (\text{A.61})$$

Es ist erhellend, die Gradienten der Koordinaten r, θ, ϕ zu bestimmen. Wir finden

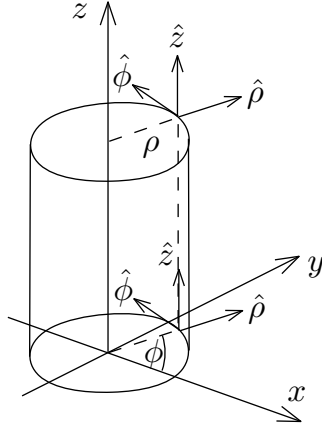
$$\vec{\nabla} r = \hat{r} \frac{\partial r}{\partial r} = \hat{r}. \quad (\text{A.62})$$

Das ist plausibel: \hat{r} ist *definiert* als Einheitsvektor in der Richtung, in der sich r ändert, daher muss $\vec{\nabla} r$ zumindest parallel zu \hat{r} sein. Ebenso sollten $\vec{\nabla} \theta \parallel \hat{\theta}$ und $\vec{\nabla} \phi \parallel \hat{\phi}$ gelten. Das finden wir auch explizit:

$$\vec{\nabla} \theta = \frac{1}{r} \hat{\theta}, \quad (\text{A.63})$$

$$\vec{\nabla} \phi = \frac{1}{r \sin \theta} \hat{\phi}. \quad (\text{A.64})$$

Zylinderkoordinaten



Für Zylinderkoordinaten ρ , ϕ , z fassen wir hier nur die Ergebnisse zusammen, die Herleitungen sind analog. Die kartesischen Koordinaten hängen mit den Zylinderkoordinaten gemäß

$$x = \rho \cos \phi, \quad (\text{A.65})$$

$$y = \rho \sin \phi, \quad (\text{A.66})$$

$$z = z \quad (\text{A.67})$$

zusammen. Es ist $\vec{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z}$ und $d\vec{r} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$, also

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi} + \dot{z} \hat{z}. \quad (\text{A.68})$$

Das Linienelement ist

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2 \quad (\text{A.69})$$

und das Volumenelement

$$dV = \rho d\rho d\phi dz. \quad (\text{A.70})$$

Der Nabla-Operator lautet

$$\vec{\nabla} = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\phi}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (\text{A.71})$$

Ebene Polarkoordinaten erhalten wir natürlich einfach durch die Setzung $z = 0$.

A.1.4 Vektoren und Pseudovektoren

Die mathematisch exakte Definition von Vektoren bezieht sich darauf, wie sie sich unter Änderung des Koordinatensystems transformieren. Kurz gefasst transformieren sich *Vektoren* unter Drehung und Raumspiegelung (Inversion) wie Verschiebungen \vec{r} . Unter Drehungen transformiert sich ein Vektor \vec{a} also gemäß

$$\vec{a} \rightarrow R \vec{a}, \quad (\text{A.72})$$

wobei R eine orthogonale 3×3 -Matrix mit Determinante 1 ist, die *Drehmatrix*, auf die wir hier nicht weiter eingehen müssen. Unter Inversion transformiert sich ein Vektor gemäß

$$\vec{a} \rightarrow -\vec{a}. \quad (\text{A.73})$$

Eine Größe \vec{b} , die sich unter Drehungen wie ein Vektor transformiert, unter Inversion aber ihr Vorzeichen nicht ändert, $\vec{b} \rightarrow \vec{b}$, nennt man *Pseudovektor*. (Anstelle von Vektor und Pseudovektor sagt man auch Radialvektor und Axialvektor.) Zum Beispiel sind Ort \vec{r} und Impuls \vec{p} Vektoren, der Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ rotiert zwar wie ein Vektor, ändert aber unter Inversion sein Vorzeichen nicht:

$$\vec{r} \rightarrow -\vec{r}, \quad (\text{A.74})$$

$$\vec{p} \rightarrow -\vec{p}, \quad (\text{A.75})$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \rightarrow (-\vec{r}) \times (-\vec{p}) = \vec{L}. \quad (\text{A.76})$$

\vec{L} ist also ein Pseudovektor. Ein *Skalar* ändert sich unter Drehungen oder Inversionen überhaupt nicht. Ein *Pseudoskalar* ändert sich nicht unter Drehungen, wechselt unter Inversion aber sein Vorzeichen. Es ist wichtig zu beachten, dass eine *Komponente* eines Vektors zwar nur *eine* Zahl ist, aber *kein* Skalar (oder Pseudoskalar). Das ist leicht einzusehen: Die Komponente eines Vektors ändert sich unter Drehungen, es gilt nämlich

$$a_i \rightarrow \sum_j R_{ij} a_j, \quad (\text{A.77})$$

während sich ein (Pseudo-)Skalar nach Definition nicht ändern darf.

A.2 Vektoranalysis: Ableitungen im \mathbb{R}^3

A.2.1 Erste Ableitungen

Sei $\rho(\vec{r})$ ein skalares Feld. Wie wir bereits gesehen haben, ist die Änderung von ρ unter einer *rein räumlichen* Verschiebung $d\vec{r}$ (d. h. $dt = 0$) in kartesischen Koordinaten gegeben durch

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial y} dy + \frac{\partial \rho}{\partial z} dz. \quad (\text{A.78})$$

Dies sieht wie ein Skalarprodukt aus. Tatsächlich können wir schreiben

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \cdot (dx, dy, dz) = (\vec{\nabla} \rho) \cdot d\vec{r}, \quad (\text{A.79})$$

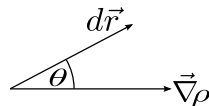
vgl. Gl. (A.38). Hier heißt

$$\vec{\nabla} \rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \hat{z} \quad (\text{A.80})$$

(in kartesischen Koordinaten) *Gradient* von ρ . $\vec{\nabla} \rho$ ist ein *Vektorfeld*. Nach der Definition des Skalarproduktes gilt

$$d\rho = |\vec{\nabla} \rho| |d\vec{r}| \cos \theta, \quad (\text{A.81})$$

wobei θ der von $\vec{\nabla} \rho$ und $d\vec{r}$ eingeschlossene Winkel ist.



Halten wir den Betrag $|d\vec{r}|$ der Verschiebung fest und ist $\vec{\nabla} \rho \neq 0$, so sind folgende Aussagen äquivalent:

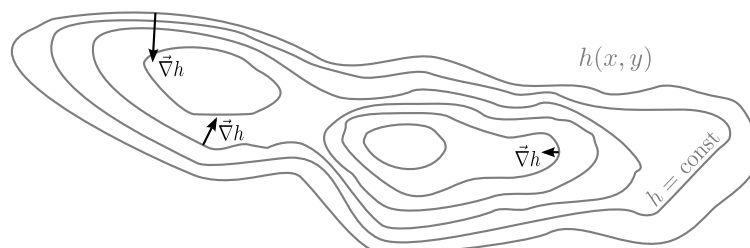
$$d\rho \text{ ist maximal} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d\vec{r} \text{ zeigt in dieselbe Richtung wie } \vec{\nabla} \rho$$

Also zeigt der Gradient in die Richtung *maximaler Steigung* von $\rho(\vec{r})$, d. h. „*bergauf*“. Der Wert der maximalen Steigung ist der Betrag des Gradienten, $|\vec{\nabla} \rho|$. Andererseits finden wir für festes $|d\vec{r}|$ und für $\vec{\nabla} \rho \neq 0$,

$$d\rho = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \rho \perp d\vec{r}.$$

$\rho(\vec{r})$ ist lokal also in erster Ordnung in \vec{r} konstant in allen Richtungen orthogonal zum Gradienten. Das bedeutet, dass der Gradient $\vec{\nabla} \rho$ an jedem Punkt (außer für $\vec{\nabla} \rho = 0$) senkrecht auf Flächen mit konstantem ρ steht.

■ **Beispiel 1:** Für die zweidimensionale Höhe über dem Meeresspiegel einer Landschaft, $h(x, y)$, zeigt $\vec{\nabla} h = (\partial h / \partial x, \partial h / \partial y)$ an jedem Ort bergauf und steht senkrecht auf den Kurven konstanter Höhe, also den Höhenlinien.



■ Beispiel 2: Berechne $\vec{\nabla}r$, vgl. Abschnitt A.1.3. In kartesischen Koordinaten ist

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}r &= \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z} \right) \quad \left| \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right. \\ &= \left(\frac{\cancel{z}x}{\cancel{z}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{\cancel{z}y}{\cancel{z}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{\cancel{z}z}{\cancel{z}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ &= \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{r}.\end{aligned}\tag{A.82}$$

In Kugelkoordinaten ist die Rechnung einfacher, wie wir gesehen haben:

$$\vec{\nabla} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}r = \hat{r} \frac{\partial r}{\partial r} = \hat{r}.\tag{A.83}$$

Für den Gradienten gilt die folgende Kettenregel:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}f(g(\vec{r})) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} f(g(\vec{r})), \frac{\partial}{\partial y} f(g(\vec{r})), \frac{\partial}{\partial z} f(g(\vec{r})) \right) \\ &= \left(f'(g(\vec{r})) \frac{\partial g}{\partial x}, f'(g(\vec{r})) \frac{\partial g}{\partial y}, f'(g(\vec{r})) \frac{\partial g}{\partial z} \right) \\ &= f'(g(\vec{r})) \vec{\nabla}g(\vec{r}),\end{aligned}\tag{A.84}$$

oder kürzer

$$\vec{\nabla}f(g) = f'(g) \vec{\nabla}g.\tag{A.85}$$

Weitere Regeln kann man leicht analog durch Darstellung in kartesischen Koordinaten herleiten.

Mit dem Nabla-Operator

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)\tag{A.86}$$

(in kartesischen Koordinaten) können wir noch weitere Ableitungen konstruieren, indem wir $\vec{\nabla}$ anstelle eines gewöhnlichen Vektors in die Produkte von Vektoren einsetzen. Damit erhalten wir zunächst die *Divergenz*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}\tag{A.87}$$

eines Vektorfeldes $\vec{v}(\vec{r})$. Die Divergenz ist ein *skalares* Feld. In kartesischen Koordinaten ist

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}) \\ &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (v_x, v_y, v_z) \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.\end{aligned}\tag{A.88}$$

Für andere Koordinatensysteme haben wir in Abschnitt A.1.3 schon Vorarbeit geleistet und können die entsprechende Darstellung von $\vec{\nabla}$ übernehmen. In Kugelkoordinaten gilt z. B.

$$\vec{\nabla} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi},\tag{A.89}$$

$$\vec{v} = v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta} + v_\phi \hat{\phi},\tag{A.90}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \hat{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta} + v_\phi \hat{\phi}) \\ &\quad + \frac{\hat{\theta}}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta} + v_\phi \hat{\phi}) \\ &\quad + \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} (v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta} + v_\phi \hat{\phi}).\end{aligned}\tag{A.91}$$

Nun müssen wir beachten, dass die Einheitsvektoren \hat{r} , $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$ vom Ort abhängen. Mit Glg. (A.53)–(A.55),

$$\hat{r} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{A.92})$$

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{A.93})$$

$$\hat{\phi} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.94})$$

erhalten wir

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial r} = \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial r} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} = 0, \quad (\text{A.95})$$

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} = \hat{\theta}, \quad (\text{A.96})$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \phi \\ -\sin \theta \sin \phi \\ -\cos \theta \end{pmatrix} = -\hat{r}, \quad (\text{A.97})$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \theta} = 0, \quad (\text{A.98})$$

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \sin \theta \hat{\phi}, \quad (\text{A.99})$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \cos \theta \hat{\phi}, \quad (\text{A.100})$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -\cos \phi \\ -\sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - \cos \phi \\ -\sin \phi - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{z} \times \hat{\phi}. \quad (\text{A.101})$$

Damit ist (Produktregel!)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \frac{\partial v_r}{\partial r} \underbrace{\hat{r} \cdot \hat{r}}_1 + v_r \underbrace{\hat{r}}_0 \cdot \frac{\partial \hat{r}}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \underbrace{\hat{r} \cdot \hat{\theta}}_0 + v_\theta \hat{r} \cdot \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial r} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \underbrace{\hat{r} \cdot \hat{\phi}}_0 + v_\phi \hat{r} \cdot \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} + 12 \text{ weitere Terme} \\ &= \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \hat{\theta} \cdot \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r} \hat{\theta} \cdot \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r} \hat{\theta} \cdot \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r \sin \theta} \hat{\phi} \cdot \frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} + \frac{v_\theta}{r \sin \theta} \hat{\phi} \cdot \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \phi} \\ &\quad + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \hat{\phi} \cdot \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} \\ &= \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cos \theta}{r \sin \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \underbrace{\hat{\phi} \cdot (\hat{z} \times \hat{\phi})}_0 \\ &= \frac{\partial v_r}{\partial r} + 2 \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta \cos \theta}{r \sin \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}. \end{aligned} \quad (\text{A.102})$$

Es ist üblich, diesen Ausdruck etwas umzuschreiben (Produktregel!):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 v_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta v_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}. \quad (\text{A.103})$$

■ Beispiel 1: Berechne $\vec{\nabla} \cdot \vec{r}$. In kartesischen Koordinaten:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3. \quad (\text{A.104})$$

In Kugelkoordinaten:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \vec{\nabla} \cdot (r\hat{r} + 0\hat{\theta} + 0\hat{\phi}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^3 = 3. \quad (\text{A.105})$$

■ Beispiel 2: Berechne $\vec{\nabla} \cdot \hat{r}$ (hier steht ein Einheitsvektor \hat{r} !). In kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \hat{r} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \dots + \dots \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{x \cdot 2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2} + \dots + \dots \\ &= \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} + \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} + \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} = \frac{3}{r} - \frac{r^2}{r^3} = \frac{2}{r}. \end{aligned} \quad (\text{A.106})$$

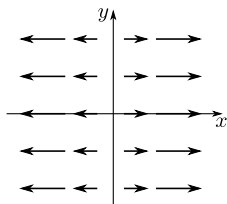
Einfacher ist es in Kugelkoordinaten:

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{r} = \vec{\nabla} \cdot (1\hat{r} + 0\hat{\theta} + 0\hat{\phi}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 = \frac{2}{r}. \quad (\text{A.107})$$

Anschaulich beschreibt die Divergenz, wie stark sich ein Vektorfeld ausbreitet. Stellen wir das Feld durch Vektorpfeile an ausgewählten Punkten dar, beschreibt die Divergenz, in welchem Maße die Pfeile in der Umgebung eines Punktes auseinanderlaufen (für positive Divergenz) bzw. zusammenlaufen (für negative Divergenz).

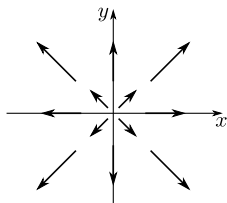
■ Beispiele (es ist nützlich, sich unter \vec{v} die Geschwindigkeit einer Flüssigkeit vorzustellen):

(a) $\vec{v} = x\hat{x}$:



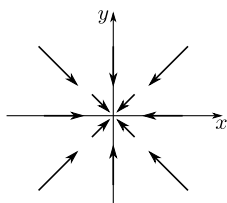
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1$$

(b) $\vec{v} = \vec{r}$:



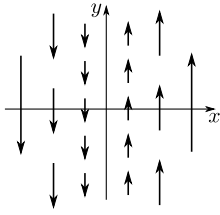
$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 3$ (siehe oben). Regionen mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} > 0$ nennt man *Quellen* des Feldes. Im Beispiel der Flüssigkeit können wir uns vorstellen, dass von irgendwoher Flüssigkeit hinzugefügt wird.

(c) $\vec{v} = -\vec{r}$:



$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -3$. Regionen mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} < 0$ nennt man *Senken* des Feldes.

(d) $\vec{v} = x\hat{y}$:



$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial x}{\partial y} = 0$. Die Divergenz verschwindet, da sich das Feld nicht ausbreitet – es handelt sich um eine Scherung der Flüssigkeit. Beachte, dass $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ *nicht* impliziert, dass \vec{v} konstant ist!

Der Operator $\vec{\nabla}$ wirkt grundsätzlich auf alle folgenden Terme bis zum nächsten + oder -. Ist dies nicht gemeint, müssen wir Klammern einfügen. Es gibt aber keine allgemein akzeptierte Regel, wonach eine schließende Klammer grundsätzlich die Wirkung von $\vec{\nabla}$ beendet. Sie tut dies i. A. *nicht*, wenn $\vec{\nabla}$ als letztes Symbol in der Klammer steht, z. B.

$$(\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\rho = a_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + a_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + a_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \rho. \quad (\text{A.108})$$

Beachte, dass i. A.

$$\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \rho \neq \vec{\nabla} \cdot \vec{a} \rho = \rho (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) + \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \rho). \quad (\text{A.109})$$

Schließlich können wir noch das Vektorprodukt mit $\vec{\nabla}$ bilden. Wir erhalten die *Rotation*

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} \quad (\text{A.110})$$

des Vektorfeldes \vec{v} . Die Rotation ist selbst ein Vektorfeld (oder genauer ein Pseudovektorfeld, falls \vec{v} ein Vektorfeld ist und ein Vektorfeld, falls \vec{v} ein Pseudovektorfeld ist). In kartesischen Koordinaten ist

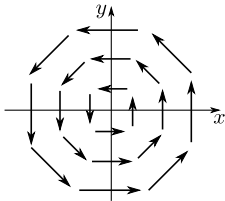
$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \quad (\text{A.111})$$

Die Rotation beschreibt die *Wirbel* des Feldes \vec{v} . Ist $\vec{v}(\vec{r})$ die lokale Geschwindigkeit einer Flüssigkeit, so hat $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ eine besonders anschauliche Interpretation: Wenn sich ein kleiner (starrer) Testkörper mit der Strömung bewegt, so rotiert er mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{v}. \quad (\text{A.112})$$

■ Beispiele:

(a) $\vec{v} = -y\hat{x} + x\hat{y} = (-y, x, 0) = \hat{z} \times \vec{r}$:

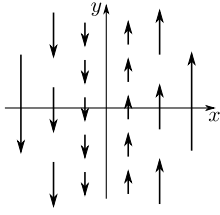


$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \left(0, 0, \frac{\partial}{\partial x} x - \frac{\partial}{\partial y} (-y) \right) = (0, 0, 2) = 2\hat{z}. \quad (\text{A.113})$$

Das Feld \vec{v} stellt einen *Vortex* dar. Beachte, dass $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ homogen (konstant im Raum) ist und parallel zur Achse des Vortex zeigt.

(b) $\vec{v} = \vec{r} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{v} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) = 0$: Hier rotiert nichts.

(c) $\vec{v} = x\hat{y}$:



$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \hat{z} \frac{\partial v_y}{\partial x} = \hat{z} \frac{\partial x}{\partial x} = \hat{z}$. Ein Testkörper würde rotieren, obwohl die Strömung geradlinig ist.

Produkt- und Kettenregeln für Vektorableitungen kann man leicht mit Hilfe der Darstellung in kartesischen Koordinaten aus den Regeln für gewöhnliche Ableitungen herleiten. Die resultierenden Regeln sind in den meisten Lehrbüchern der Elektrodynamik tabelliert, oft auf den Umschlaginnenseiten. Dort findet man auch die Darstellungen von Gradient, Divergenz und Rotation in anderen Koordinatensystemen. Es sei noch erwähnt, dass manchmal, v. a. in älterer Literatur, folgende Schreibweisen verwendet werden:

$$\text{grad } \rho = \vec{\nabla} \rho, \quad (\text{A.114})$$

$$\text{div } \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}, \quad (\text{A.115})$$

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v}. \quad (\text{A.116})$$

Für die Rotation steht in englischsprachiger Literatur stattdessen $\text{curl } \vec{v}$.

Natürlich kann man auch nach Komponenten anderer Vektoren als des Ortsvektors ableiten. Dann schreibt man für den Nablaoperator nach dem Vektor \vec{a} :

$$\vec{\nabla}_{\vec{a}} \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{a}} := \left(\frac{\partial}{\partial a_x}, \frac{\partial}{\partial a_y}, \frac{\partial}{\partial a_z} \right) \quad (\text{A.117})$$

(in kartesischen Koordinaten), also speziell

$$\vec{\nabla} \equiv \vec{\nabla}_{\vec{r}} \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{r}} := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (\text{A.118})$$

A.2.2 Zweite Ableitungen

Wir können $\vec{\nabla}$ natürlich auch mehrfach anwenden, wobei in dieser Vorlesung nur zweite Ableitungen von Bedeutung sind. $\vec{\nabla} \rho$ und $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ sind (evtl. Pseudo-) Vektoren und wir können daher ihre Divergenz und ihre Rotation bilden. Andererseits ist $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ ein Skalar und wir können seinen Gradienten bilden. Wir haben also folgende fünf Möglichkeiten:

1. Divergenz des Gradienten:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \rho) &\stackrel{\text{kartesisch}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)}_{\text{Operator}} \rho = \nabla^2 \rho. \end{aligned} \quad (\text{A.119})$$

Der hier auftretende Differentialoperator heißt *Laplace-Operator* und wird oft mit Δ bezeichnet; wir vermeiden diese evtl. verwirrende Notation hier. Also ist

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \rho) \equiv \nabla^2 \rho \equiv \Delta \rho. \quad (\text{A.120})$$

Der Laplace-Operator spielt in der Elektrodynamik eine wichtige Rolle. Seine Darstellung in anderen Koordinatensystemen ist daher in den Lehrbüchern tabelliert. $\nabla^2 \rho$ ist wieder ein skalares Feld.

■ Beispiele:

$$\nabla^2 r^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} y^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} z^2 = 2 + 2 + 2 = 6, \quad (\text{A.121})$$

$$\nabla^2 xyz = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) xyz = \frac{\partial}{\partial x} yz + \frac{\partial}{\partial y} xz + \frac{\partial}{\partial z} xy = 0. \quad (\text{A.122})$$

Funktionen $f(\vec{r})$ mit der Eigenschaft $\nabla^2 f = 0 \quad \forall \vec{r}$ nennt man *harmonisch*.

Man kann dem *skalaren* Operator ∇^2 auch auf Vektorfelder anwenden. In kartesischen Koordinaten ist einfach

$$\nabla^2 \vec{v} \equiv (\nabla^2 v_x, \nabla^2 v_y, \nabla^2 v_z). \quad (\text{A.123})$$

■ Beispiele:

$$\nabla^2 \vec{r} = (\nabla^2 x, \nabla^2 y, \nabla^2 z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} x, \frac{\partial^2}{\partial y^2} y, \frac{\partial^2}{\partial z^2} z \right) = 0, \quad (\text{A.124})$$

$$\nabla^2 (x^2 \hat{x} + y^2 \hat{y} + z^2 \hat{z}) = (\nabla^2 x^2, \nabla^2 y^2, \nabla^2 z^2) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2, \frac{\partial^2}{\partial y^2} y^2, \frac{\partial^2}{\partial z^2} z^2 \right) = (2, 2, 2) = 2(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}). \quad (\text{A.125})$$

2. Rotation des Gradienten:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \rho) \stackrel{\text{kartesisch}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = 0, \quad (\text{A.126})$$

da

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial x} \quad (\text{A.127})$$

usw., falls ρ zweimal stetig differenzierbar ist, was wir i. A. für physikalische Felder annehmen. Unter dieser Voraussetzung haben wir damit gezeigt, dass $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \rho) \equiv 0$ gilt; *die Rotation eines Gradientenfeldes verschwindet*. Diese Eigenschaft werden wir häufig ausnutzen. Sie ist plausibel, wenn man bedenkt, dass der Gradient an jedem Punkt bergauf zeigt.

3. Gradient der Divergenz:

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \stackrel{\text{kartesisch}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right), \dots, \dots \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}. \quad (\text{A.128})$$

Hier tritt ein *matrixwertiger* Differentialoperator auf, den wir als Dyade

$$\vec{\nabla} \vec{\nabla} \equiv \vec{\nabla} \vec{\nabla}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.129})$$

schreiben können. Dies ist *nicht* dasselbe wie der *skalare* Laplace-Operator $\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. $\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$ ist (wie $\nabla^2 \vec{v}$) ein Vektorfeld.

■ Beispiel: Für

$$\vec{v} = xy \hat{x} + yz \hat{y} + zx \hat{z} \quad (\text{A.130})$$

ist

$$\nabla^2 \vec{v} = (\nabla^2 xy, \nabla^2 yz, \nabla^2 zx) = 0, \quad (\text{A.131})$$

aber

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = \vec{\nabla} \left(\frac{\partial}{\partial x} xy + \frac{\partial}{\partial y} yz + \frac{\partial}{\partial z} zx \right) = \vec{\nabla} (y + z + x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \nabla^2 \vec{v}. \quad (\text{A.132})$$

4. Divergenz der Rotation:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) &\stackrel{\text{kartesisch}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z \partial y} = 0,\end{aligned}\tag{A.133}$$

unter der Annahme, dass \vec{v} zweimal stetig differenzierbar ist. Die Divergenz eines Rotationsfeldes (Wirbelfeldes) verschwindet. Diese Eigenschaft werden wir ebenfalls oft ausnutzen.

5. Rotation der Rotation:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) &\stackrel{\text{kartesisch}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial x}, \dots, \dots \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}, \dots, \dots \right) \\ &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v}.\end{aligned}\tag{A.134}$$

Dasselbe Ergebnis erhalten wir mittels BAC-CAB-Regel, wobei wir aber beachten müssen, dass \vec{v} immer hinter dem Differentialoperator stehenbleiben muss.

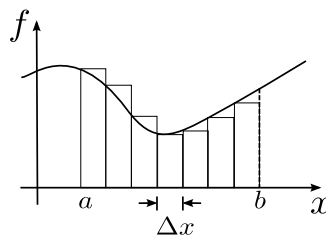
Den 5. Fall haben wir damit auf den 1. und den 3. Fall zurückgeführt. Außerdem ergaben der 2. und der 4. Fall immer verschwindende zweite Ableitungen. Es existieren also nur zwei wesentlich verschiedene Arten von zweiten Ableitungen, ∇^2 und $\vec{\nabla} \vec{\nabla}$.

A.3 Vektoranalysis: Integration im \mathbb{R}^3

Wir benötigen nicht nur Ableitungen im \mathbb{R}^3 , sondern auch Integrale. In der Analysis wird das (bestimmte) Integral einer Funktion $f(x)$ einer Variablen x über ein Intervall $[a, b]$ durch die Riemann-Summe definiert:

$$\int_a^b dx f(x) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\frac{b-a}{\Delta x} - 1} \Delta x f(a + n \Delta x).\tag{A.135}$$

Das Integral beschreibt geometrisch die Fläche unter der Kurve mit der Parameterdarstellung $(x, f(x))$ über dem Intervall $[a, b]$.



Wir werden mehrere Verallgemeinerungen der Riemann-Summe auf Funktionen im \mathbb{R}^3 , also auf Felder, besprechen. Die Grundidee ist immer dieselbe: Ein Integral ist die Summe infinitesimaler Beiträge $dx f(x)$ für alle x aus einem bestimmten Bereich \mathcal{B} . Wir stellen uns \mathcal{B} in Zellen der infinitesimalen Größe dx eingeteilt vor. Der Unterschied zwischen den zu besprechenden Integraltypen liegt in der Dimensionalität des Bereichs \mathcal{B} .

(a) Bei *Linienintegralen* (Kurvenintegralen) ist der Bereich \mathcal{B} eine Kurve \mathcal{C} im Raum. Wir teilen \mathcal{C} in *Linienelemente* dl ein, so dass die Summe aller dl die Gesamtlänge der Kurve ergibt:

$$\int_{\mathcal{C}} dl = L_{\mathcal{C}}.\tag{A.136}$$

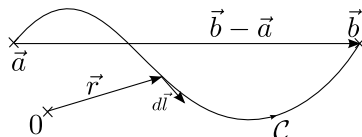
Oft versteht man die Linienelemente mit einem Richtungssinn, nämlich der tangentialen Richtung entlang der Kurve,

$$d\vec{l} = dl \hat{t} \quad (\text{A.137})$$

mit dem Tangenteneinheitsvektor \hat{t} entlang der Kurve. Dafür muss die Kurve \mathcal{C} natürlich *gerichtet* sein. \hat{t} wird in Vorwärtsrichtung gewählt. Beachte, dass

$$\left| \int_{\mathcal{C}} d\vec{l} \right| = |\vec{b} - \vec{a}| \quad (\text{A.138})$$

der Abstand von End- und Anfangspunkt der Kurve \mathcal{C} ist, dieser ist nur mit der Länge $L_{\mathcal{C}}$ identisch, wenn \mathcal{C} ein Geradenabschnitt ist.



Nun können wir verschiedene Linienintegrale über skalare Felder und Vektorfelder bilden: Skalare

$$\int_{\mathcal{C}} dl \rho(\vec{r}), \quad \int_{\mathcal{C}} d\vec{l} \cdot \vec{v}(\vec{r}) \quad (\text{A.139})$$

und Vektoren

$$\int_{\mathcal{C}} d\vec{l} \rho(\vec{r}), \quad \int_{\mathcal{C}} dl \vec{v}(\vec{r}), \quad \int_{\mathcal{C}} d\vec{l} \times \vec{v}(\vec{r}). \quad (\text{A.140})$$

Wenn nichts weiter gesagt ist, meint man mit „Linienintegral“ in der Elektrodynamik meist den zweiten Fall,

$$\int_{\mathcal{C}} d\vec{l} \cdot \vec{v}(\vec{r}). \quad (\text{A.141})$$

Wir können auch Anfangs- und Endpunkt explizit an das Integralzeichen schreiben:

$$\int_{\mathcal{C}, \vec{a}}^{\vec{b}} d\vec{l} \cdot \vec{v}(\vec{r}). \quad (\text{A.142})$$

usw. Im Allgemeinen hängt das Integral aber nicht allein vom Anfangspunkt \vec{a} und vom Endpunkt \vec{b} ab, sondern vom gesamten Kurvenverlauf \mathcal{C} .

Es existiert jedoch eine Klasse von Vektorfeldern $\vec{v}(\vec{r})$, für die das Linienintegral nur von \vec{a} und \vec{b} abhängt. Ist $\vec{v} = \vec{F}$ ein Kraftfeld, so nennt man es in diesem Fall *konservativ*.

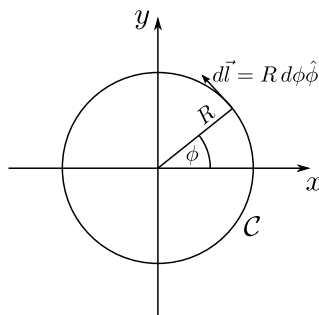
Die Kurve \mathcal{C} kann auch geschlossen sein. Dann schreiben wir das Integralzeichen mit einem Kreis, z. B.

$$\oint_{\mathcal{C}} d\vec{l} \cdot \vec{v}(\vec{r}). \quad (\text{A.143})$$

Für eine geschlossene Kurve addieren sich die *vektoriellen* Linienelemente zu Null, da Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen:

$$\oint_{\mathcal{C}} d\vec{l} = 0. \quad (\text{A.144})$$

■ Beispiele: Wir nehmen als Kurve \mathcal{C} den Kreis mit dem Radius R in der xy -Ebene. Die Strategie bei der Berechnung ist immer, das Linienintegral auf gewöhnliche Integrale zurückzuführen. Das kann oft durch Verwendung geeigneter Koordinaten erreicht werden, im Beispiel sicherlich durch ebene Polarkoordinaten.



Das vektorielle Linienelement ist $d\vec{l} = R d\phi \hat{\phi}$ mit der Länge $R d\phi$ (Kreisbogen!) und dem Tangenteneinheitsvektor $\hat{\phi}$. Damit berechnen wir einige Linienintegrale:

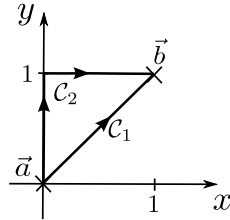
$$\oint_C \underbrace{d\vec{l} \cdot \vec{r}}_0 = 0, \quad (\text{A.145})$$

$$\begin{aligned} \oint_C d\vec{l} \cdot (\hat{z} \times \hat{r}) &= \oint_C d\vec{l} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \oint_C d\vec{l} \cdot R \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \oint_C R d\phi \hat{\phi} \cdot R \hat{\phi} \\ &= R^2 \oint_C d\phi = R^2 \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi R^2, \end{aligned} \quad (\text{A.146})$$

$$\begin{aligned} \oint_C \underbrace{dl}_{\text{skalar!}} y^2 \hat{x} &= \left(\oint_C dl y^2 \right) \hat{x} = \left(\oint_C R d\phi R^2 \sin^2 \phi \right) \hat{x} \\ &= R^3 \hat{x} \int_0^{2\pi} d\phi \sin^2 \phi = \pi R^3 \hat{x}, \end{aligned} \quad (\text{A.147})$$

$$\oint_C d\vec{l} \times \vec{r} = \oint_C R d\phi \hat{\phi} \times R \hat{r} = R^2 \oint_C d\phi (-\hat{z}) = -2\pi R^2 \hat{z}. \quad (\text{A.148})$$

Als weiteres Beispiel integrieren wir $\vec{v} = \hat{z} \times \vec{r}$ (s. o.) über zwei verschiedene Kurven in der Ebene $z = 0$:



Für den Weg C_1 wählen wir Zylinderkoordinaten:

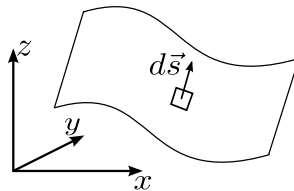
$$\int_{C_1} d\vec{l} \cdot (\hat{z} \times \vec{r}) = \int_{C_1} d\rho \hat{\rho} \cdot [\hat{z} \times (\rho \hat{\rho} + z \hat{z})] = \int_{C_1} d\rho \hat{\rho} \cdot \rho \hat{\phi} = \int_{C_1} d\rho \rho \underbrace{\hat{\rho} \cdot \hat{\phi}}_0 = 0. \quad (\text{A.149})$$

Für den Weg C_2 sind kartesische Koordinaten günstiger:

$$\begin{aligned} \int_{C_2} d\vec{l} \cdot (\hat{z} \times \vec{r}) &= \int_{C_2} d\vec{l} \cdot (-y, x, 0) = \int_0^1 dy \hat{y} \cdot (-y, \underbrace{0}_{x \text{ fest}}, 0) + \int_0^1 dx \hat{x} \cdot (\underbrace{-1}_{-y \text{ fest}}, x, 0) \\ &= \int_0^1 dy 0 - \int_0^1 dx 1 = -1, \end{aligned} \quad (\text{A.150})$$

das Integral ist also wegababhängig.

- (b) Bei *Flächenintegralen* ist der Bereich \mathcal{B} natürlich eine Fläche \mathcal{S} . Wir zerlegen \mathcal{S} in *Flächenelemente* ds . Die Flächenelemente können wir auch zu Vektoren $d\vec{s}$ machen, wobei die Richtung ein Normaleneinheitsvektor \hat{n} auf der Fläche am gegebenen Punkt ist, d. h. $d\vec{s}$ steht überall senkrecht auf der Fläche.



Der Normalenvektor ist nicht eindeutig – es gibt an jedem Punkt zwei Möglichkeiten. Wir wollen $\hat{n}(\vec{r})$ für $\vec{r} \in \mathcal{S}$ stetig wählen. Dann gibt es drei Möglichkeiten:

- Die Fläche \mathcal{S} ist geschlossen und orientierbar (z. B. eine Kugel). Dann wählen wir \hat{n} üblicherweise überall *nach außen* zeigend.
- Die Fläche \mathcal{S} ist nicht geschlossen, aber orientierbar (z. B. ein Zylindermantel oder eine Ebene). Dann müssen wir in jedem Einzelfall festlegen, welche Richtung \hat{n} haben soll. Durch die Festlegung an einem Punkt ist wegen der Stetigkeit $\hat{n}(\vec{r})$ auf der gesamten Fläche festgelegt (falls die Fläche zusammenhängt).
- Die Fläche \mathcal{S} ist nicht orientierbar (z. B. Kleinsche Flasche, Möbiusband). Dann können wir $\hat{n}(\vec{r})$ nicht überall stetig wählen. Solche Flächen kommen aber in der Elektrodynamik nicht vor.

Wir schreiben das Flächenintegral als $\iint_{\mathcal{S}}$ bzw. für eine geschlossene Fläche auch als $\oiint_{\mathcal{S}}$, um anzudeuten, dass über einen zweidimensionalen Bereich integriert wird. Oft schreibt man aber nur ein Integralzeichen (so auch in den meisten Lehrbüchern). Es gibt wieder mehrere mögliche Formen:

$$\iint_{\mathcal{S}} ds \rho(\vec{r}), \quad \iint_{\mathcal{S}} d\vec{s} \cdot \vec{v}(\vec{r}), \quad \iint_{\mathcal{S}} d\vec{s} \rho(\vec{r}), \quad \iint_{\mathcal{S}} ds \vec{v}(\vec{r}), \quad \iint_{\mathcal{S}} d\vec{s} \times \vec{v}(\vec{r}). \quad (\text{A.151})$$

Der am häufigsten auftretende Fall ist der zweite. Man nennt

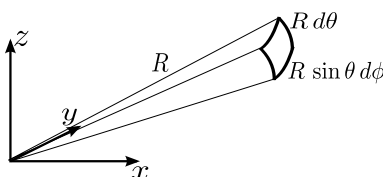
$$\Phi := \iint_{\mathcal{S}} d\vec{s} \cdot \vec{v}(\vec{r}) \quad (\text{A.152})$$

auch den *Fluss* des Feldes $\vec{v}(\vec{r})$ durch die Fläche \mathcal{S} . Beschreibt \vec{v} die lokale Geschwindigkeit einer Flüssigkeit, so ist diese Bezeichnung sehr intuitiv.

Analog zum Linienintegral hängt das Flächenintegral über eine berandete Fläche i. A. von der gesamten Fläche ab, nicht nur vom Rand. Für eine spezielle Klasse von Feldern hängt es jedoch nur vom Rand ab, wie wir sehen werden.

■ **Beispiele:** \mathcal{S} sei die Kugel (-oberfläche) mit dem Radius R um den Ursprung. Dann ist das vektorielle Flächenelement in Kugelkoordinaten

$$d\vec{s} = R d\theta R \sin \theta d\phi \hat{r} = R^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r} \quad (\text{A.153})$$



und damit z. B.

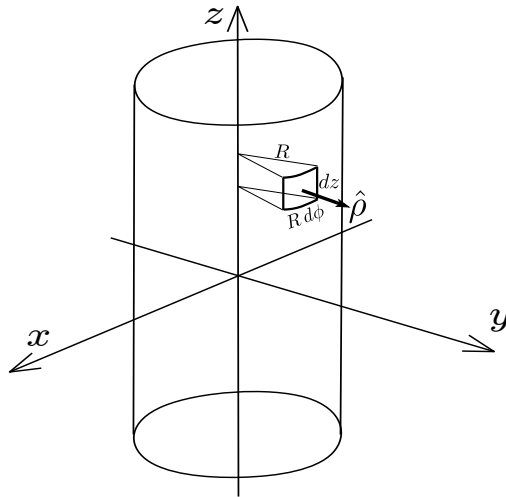
$$\oiint_{\mathcal{S}} d\vec{s} \cdot \vec{r} = R^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \hat{r} \cdot \underbrace{\vec{r}}_{R \hat{r}} = R^3 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi R^3, \quad (\text{A.154})$$

$$\begin{aligned} \oiint_{\mathcal{S}} d\vec{s} \cdot x \hat{x} &= R^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \hat{r} \cdot R \sin \theta \cos \phi \hat{x} = R^3 \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta \int_0^{2\pi} d\phi \underbrace{\cos \phi}_{\sin \theta \cos \phi} \hat{r} \cdot \hat{x} \\ &= R^3 \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta}_{4/3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi \cos^2 \phi}_{\pi} = \frac{4\pi}{3} R^3, \end{aligned} \quad (\text{A.155})$$

$$\begin{aligned} \oiint_{\mathcal{S}} \underbrace{ds}_{\text{Skalar}} x^2 y^2 &= R^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi R^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi \\ &= R^6 \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin^5 \theta}_{16/15} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi \cos^2 \phi \sin^2 \phi}_{\pi/4} = \frac{4\pi}{15} R^6. \end{aligned} \quad (\text{A.156})$$

Sei \mathcal{S}' ein Zylindermantel mit Radius R und Höhe h parallel zur z -Achse und mit Mittelpunkt im Ursprung. Wir wählen die Richtung von $d\vec{s}$ nach außen, d. h. in Zylinderkoordinaten

$$d\vec{s} = R d\phi dz \hat{\rho}. \quad (\text{A.157})$$



Dann ist z. B.

$$\iint_{S'} d\vec{s} \cdot \vec{r} = R \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-h/2}^{h/2} dz \hat{\rho} \cdot (R\hat{\rho} + z\hat{z}) = R^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-h/2}^{h/2} dz \underbrace{\hat{\rho} \cdot \hat{\rho}}_1 = 2\pi R^2 h. \quad (\text{A.158})$$

Die Mantelfläche des Zylinders ist einfach

$$\iint_{S'} ds = R \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-h/2}^{h/2} dz = 2\pi Rh. \quad (\text{A.159})$$

- (c) *Volumenintegrale* umfassen einen dreidimensionalen Bereich, also ein Volumen \mathcal{V} . Es wird in *Volumenelemente* dV eingeteilt. In kartesischen Koordinaten ist einfach $dV = dx dy dz$, für Kugel- und Zylinderkoordinaten hatten wir es auch schon angegeben:

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi, \quad (\text{A.160})$$

$$dV = \rho d\rho d\phi dz. \quad (\text{A.161})$$

Anders als Kurven und Flächen ist ein Volumen durch seinen Rand eindeutig bestimmt (jedenfalls im \mathbb{R}^3 !). Ein Volumen hat keine „innere Struktur“, es ist geometrisch flach. Deshalb sieht das Volumenelement für gegebenes Koordinatensystem immer gleich aus. Wir versehen dV nicht mit einem Richtungssinn – denn welche Richtung sollten wir wählen? Wir verwenden für Volumenintegrale das Symbol $\iiint_{\mathcal{V}}$, in der Literatur sieht man oft auch $\int_{\mathcal{V}}$. Da dV skalar ist, gibt es nur zwei Fälle: Den Skalar

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV \rho(\vec{r}) \quad (\text{A.162})$$

und den Vektor

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{v}(\vec{r}). \quad (\text{A.163})$$

■ **Beispiele:** Sei \mathcal{V} die Vollkugel um den Ursprung mit dem Radius R . Ihr Volumen ist einfach

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV = \underbrace{\int_0^R dr r^2}_{R^3/3} \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin \theta}_2 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} = \frac{4\pi}{3} R^3. \quad (\text{A.164})$$

Weitere Beispiele:

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{V}} dV x^2 y^2 z^2 &= \int_0^R dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi r^2 \cos^2 \theta \\ &= \underbrace{\int_0^R dr r^8}_{R^9/9} \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin^5 \theta}_{16/15} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi \cos^2 \phi \sin^2 \phi}_{\pi/4} = \frac{4\pi}{135} R^9, \end{aligned} \quad (\text{A.165})$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{r} = 0 \quad \text{aus Symmetriegründen,} \quad (\text{A.166})$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV \frac{1}{r} = \int_0^R dr r \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi R^2. \quad (\text{A.167})$$

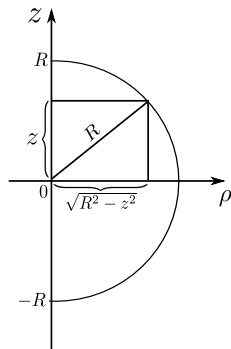
Beachte, dass wir über den Pol bei $\vec{r} = 0$ hinweg integrieren konnten, weil er durch den Faktor r^2 im Volumenelement „gehoben“ wurde. Zum Schluss ein Beispiel mit weniger günstiger Symmetrie: Es sei \vec{a} ein Vektor der Länge $a < R$. Wir berechnen

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV \frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|}. \quad (\text{A.168})$$

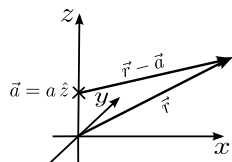
Wir wählen Zylinderkoordinaten mit der z -Achse parallel zu \vec{a} , da der Integrand *und* das Volumen \mathcal{V} um diese Achse rotationssymmetrisch sind. Dann ist

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV \frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} = \int_{-R}^R dz \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{\sqrt{(\rho \hat{\rho} + z \hat{z} - a \hat{z})^2}}. \quad (\text{A.169})$$

Beachte, dass die Grenzen des ρ -Integrals von der Integrationsvariablen z abhängen.



$$\dots = \int_{-R}^R dz \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} d\rho \rho \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z - a)^2}} \quad (\text{A.170})$$



$$\begin{aligned} &= 2\pi \int_{-R}^R dz \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \frac{d\rho \rho}{\sqrt{\rho^2 + (z - a)^2}} = 2\pi \int_{-R}^R dz \left(\sqrt{R^2 + a^2 - 2az} - |z - a| \right) \\ &= 2\pi \left(\frac{(R + a)^3 - (R - a)^3}{3a} - (R^2 + a^2) \right) = 2\pi \left(\frac{6R^2 a + 2a^3}{3a} - R^2 - a^2 \right) = 2\pi R^2 - \frac{2\pi}{3} a^2, \end{aligned} \quad (\text{A.171})$$

was für $a \rightarrow 0$ das vorige Ergebnis reproduziert.

Wir bezeichnen den *Rand* einer Fläche \mathcal{S} mit $\partial\mathcal{S}$ und die *Oberfläche* eines Volumens \mathcal{V} mit $\partial\mathcal{V}$. Ist eine Fläche oder ein Volumen unberandet (bei Volumens bedeutet dies $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$), so ist der Rand die leere Menge \emptyset . Die Oberfläche eines Volumens \mathcal{V} hat natürlich selbst keinen Rand. Diese Eigenschaft können wir jetzt kompakt schreiben als

$$\partial\partial\mathcal{V} = \emptyset. \quad (\text{A.172})$$

A.3.1 Der Fundamentalsatz

Der *Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung* (oder der Analysis) sagt aus, dass die Integration die Umkehrung der Ableitung ist. Formal:

$$\int_a^b dx f(x) = F(b) - F(a) \quad \forall a, b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dF}{dx} = f(x). \quad (\text{A.173})$$

Dies ist plausibel, wenn man die zweite Gleichung in die erste einsetzt:

$$\int_a^b dx \frac{dF}{dx} = \int_{F(a)}^{F(b)} dF = F(b) - F(a). \quad (\text{A.174})$$

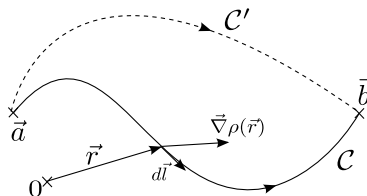
In Worten: Die Summe über alle infinitesimalen Änderungen $dF = \frac{dF}{dx} dx$ von F ist gleich der gesamten Änderung $F(b) - F(a)$. Diese Idee steckt auch hinter den Verallgemeinerungen des Fundamentalsatzes auf Ableitungen und Integrale im \mathbb{R}^3 , die wir nun besprechen werden.

Die Änderung eines skalaren Feldes $\rho(\vec{r})$ von \vec{r} nach $\vec{r} + d\vec{r}$ ist gemäß der Definition des Gradienten

$$d\rho = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\rho. \quad (\text{A.175})$$

Daher finden wir für das Linienintegral

$$\int_{\mathcal{C}}^{\vec{b}}_{\vec{a}} d\vec{l} \cdot \vec{\nabla}\rho = \int_{\rho(\vec{a})}^{\rho(\vec{b})} d\rho = \rho(\vec{b}) - \rho(\vec{a}). \quad (\text{A.176})$$



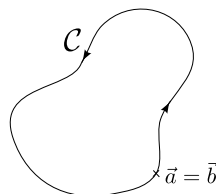
Dies ist der Fundamentalsatz für Gradienten. Die rechte Seite der Gleichung hängt offensichtlich nur von den Endpunkten \vec{a}, \vec{b} ab, aber nicht vom Verlauf der Kurve \mathcal{C} zwischen diesen. Es folgt, dass auch die linke Seite der Gleichung nicht von \mathcal{C} abhängt, während das Linienintegral $\int_{\mathcal{C}} d\vec{l} \cdot \vec{\nabla}\rho$ dies i. A. tut. Wir finden also folgendes *Korollar*:

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} d\vec{l} \cdot \vec{\nabla}\rho \quad \text{ist wegunabhängig.} \quad (\text{A.177})$$

Wählen wir $\vec{b} = \vec{a}$, also $\rho(\vec{b}) = \rho(\vec{a})$, so erhalten wir als weiteres *Korollar*

$$\oint d\vec{l} \cdot \vec{\nabla}\rho = 0 \quad (\text{A.178})$$

für beliebige geschlossene Kurven.

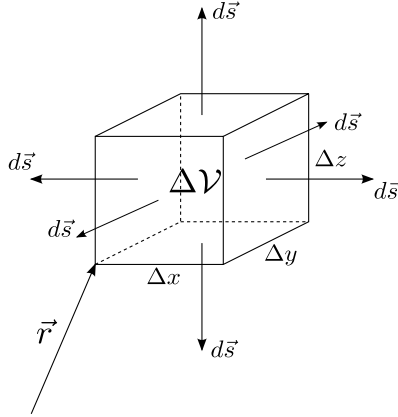


Wir betrachten als nächstes Volumenintegrale. Im eindimensionalen Fall setzt der Fundamentalsatz das Integral über die Ableitung mit der Funktion am Rand, nämlich an den Endpunkten, in Beziehung, siehe Glg. (A.173) und (A.174). Für ein Volumen \mathcal{V} ist der Rand $\partial\mathcal{V}$ seine Oberfläche. Wir erwarten, dass auf der rechten Seite des Fundamentalsatzes eine Summe über den Rand, d. h. ein Flächenintegral über $\partial\mathcal{V}$, erscheint. Wir geben den Satz für Volumenintegrale erst an und begründen ihn anschließend:

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \oiint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \vec{v}, \quad (\text{A.179})$$

das Volumenintegral über die Divergenz von \vec{v} ist also gleich dem Flächenintegral über \vec{v} über die Oberfläche. Diese Aussage heißt *Gaußscher Satz*.

Hier soll kein formaler Beweis, sondern ein Plausibilitätsargument gegeben werden. Wir betrachten einen kleinen Würfel $\Delta\mathcal{V}$:



Da der Würfel klein ist, können wir $\vec{v}(\vec{r})$ in eine Taylorreihe um \vec{r} entwickeln und nur die führenden Terme berücksichtigen. Es stellt sich heraus, dass wir dafür alle Terme bis zur Ordnung $\Delta x \Delta y \Delta z$ mitnehmen müssen. Die linke Seite von Gleichung (A.179) wird zu

$$\iiint_{\Delta\mathcal{V}} dV \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \cong \underbrace{\Delta\mathcal{V}}_{\Delta x \Delta y \Delta z} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}, \quad (\text{A.180})$$

hier wird $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ zur *nullten* Ordnung, also als in $\Delta\mathcal{V}$ konstant, angenähert, da $\Delta\mathcal{V}$ schon explizit von der Ordnung $\Delta x \Delta y \Delta z$ ist. Die rechte Seite der Gleichung ist

$$\begin{aligned} \oiint_{\partial\Delta\mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \vec{v} &\cong \underbrace{\vec{v}(\vec{r} + \Delta x \hat{x}) \cdot \Delta y \Delta z \hat{x}}_{\text{rechts}} - \underbrace{\vec{v}(\vec{r}) \cdot \Delta y \Delta z \hat{x}}_{\text{links}} \\ &+ \underbrace{\vec{v}(\vec{r} + \Delta y \hat{y}) \cdot \Delta z \Delta x \hat{y}}_{\text{hinten}} - \underbrace{\vec{v}(\vec{r}) \cdot \Delta z \Delta x \hat{y}}_{\text{vorn}} \\ &+ \underbrace{\vec{v}(\vec{r} + \Delta z \hat{z}) \cdot \Delta x \Delta y \hat{z}}_{\text{oben}} - \underbrace{\vec{v}(\vec{r}) \cdot \Delta x \Delta y \hat{z}}_{\text{unten}} \\ &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \cdot \Delta x \Delta y \Delta z \hat{x} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \cdot \Delta y \Delta z \Delta x \hat{y} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \cdot \Delta z \Delta x \Delta y \hat{z} \\ &= \Delta\mathcal{V} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \Delta\mathcal{V} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \Delta\mathcal{V} \frac{\partial v_z}{\partial z} = \Delta\mathcal{V} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}. \end{aligned} \quad (\text{A.181})$$

Für einen kleinen Würfel stimmt der Satz also. Er gilt jedoch ganz allgemein, da wir jedes Volumen aus kleinen Würfeln aufbauen können. Die Beiträge von allen *inneren* Grenzflächen heben sich auf, weil die sich berührenden Würfel hier *entgegengesetzte* vektorielle Flächenelemente $d\vec{s}$ haben, während der Integrand \vec{v} natürlich gleich ist.

Zur Interpretation des Gaußschen Satzes erinnern wir uns, dass die Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ die *Quellen* und *Senken* des Feldes beschreibt und dass die rechte Seite

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \vec{v} \quad (\text{A.182})$$

der *Fluss* des Feldes durch $\partial\mathcal{V}$ ist. Also können wir den Gaußschen Satz deuten als

$$\sum_{\mathcal{V}} (\text{Quellen} - \text{Senken}) = \text{Fluss durch } \partial\mathcal{V}, \quad (\text{A.183})$$

oder: „Was im Inneren erzeugt wird minus was vernichtet wird ist gleich dem, was durch die Oberfläche fließt“. Dies sieht aus wie ein Erhaltungssatz und wir werden Erhaltungssätze in der Tat mittels des Gaußschen Satzes formulieren.

■ Beispiel: Berechne das Oberflächenintegral

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} \cdot [\vec{r} - \vec{r}_0 + c \hat{z} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)] \quad (\text{A.184})$$

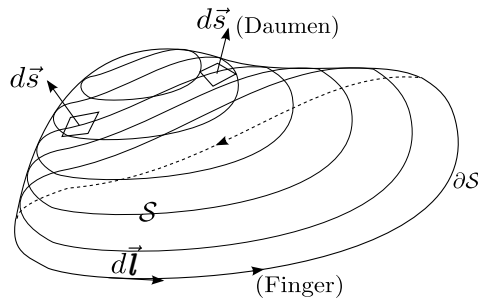
über die Oberfläche eines Würfels mit Kanten der Länge a parallel zu den kartesischen Koordinatenachsen und Mittelpunkt im Ursprung. Lösung mittels Gaußschem Satz:

$$\begin{aligned} \dots &= \iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{\nabla} \cdot [\vec{r} - \vec{r}_0 + c \hat{z} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)] \\ &= \iiint_{\mathcal{V}} dV \left[\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{r}}_3 - \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{r}_0}_0 + c \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\hat{z} \times \vec{r})}_0 - c \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\hat{z} \times \vec{r}_0)}_0 \right] \\ &= 3 \iiint_{\mathcal{V}} dV = 3a^3. \end{aligned} \quad (\text{A.185})$$

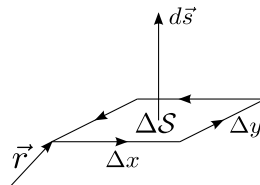
Für *Flächenintegrale* erwarten wir einen Zusammenhang zwischen dem Flächenintegral über eine Ableitung und dem Linienintegral über den Rand $\partial\mathcal{S}$ der Fläche \mathcal{S} . Dieser ist durch den *Stokesschen Satz* gegeben:

$$\iint_{\mathcal{S}} d\vec{s} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \oint_{\partial\mathcal{S}} d\vec{l} \cdot \vec{v}. \quad (\text{A.186})$$

Das Flächenintegral über die Rotation von \vec{v} ist gleich dem Linienintegral über \vec{v} entlang des Randes. Sowohl die Orientierung der (berandeten) Fläche als auch die des Randes sind zweideutig. Der Satz trifft zu, wenn für die Orientierungen die *Rechte-Hand-Regel* gilt:



Der Stokessche Satz gilt für ein kleines Quadrat: Wir wählen (lokale) Koordinatenachsen \hat{x} , \hat{y} parallel zu dessen Seiten.



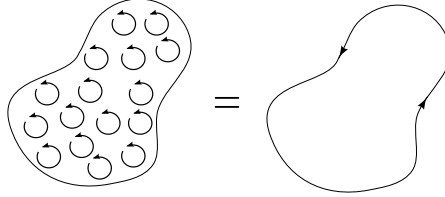
Die linke Seite der Gleichung wird

$$\iint_{\Delta\mathcal{S}} d\vec{s} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cong \Delta x \Delta y \hat{z} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \quad (\text{A.187})$$

und die rechte

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial\Delta S} d\vec{l} \cdot \vec{v} &\cong \Delta x \hat{x} \cdot \vec{v}(\vec{r}) + \Delta y \hat{y} \cdot \vec{v}(\vec{r} + \Delta x \hat{x}) - \Delta x \hat{x} \cdot \vec{v}(\vec{r} + \Delta y \hat{y}) - \Delta y \hat{y} \cdot \vec{v}(\vec{r}) \\
&\cong \cancel{\Delta x \hat{x} \cdot \vec{v}(\vec{r})} + \cancel{\Delta y \hat{y} \cdot \vec{v}(\vec{r})} + \Delta x \Delta y \hat{y} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} - \cancel{\Delta x \hat{x} \cdot \vec{v}(\vec{r})} - \Delta x \Delta y \hat{x} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} - \cancel{\Delta y \hat{y} \cdot \vec{v}(\vec{r})} \\
&= \Delta x \Delta y \left(\frac{\partial}{\partial x} v_y - \frac{\partial}{\partial y} v_x \right) = \Delta x \Delta y \hat{z} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}). \tag{A.188}
\end{aligned}$$

Da wir jede Fläche in kleine Quadrate zerlegen können und sich Beiträge von innen liegenden Kanten herausheben, gilt der Satz für alle Flächen. Anschaulich: Die Summe der Wirbelstärken ist der Strom entlang des Randes.



Da die rechte Seite der Gleichung nur vom Rand, aber ansonsten nicht von der Fläche abhängt, finden wir folgendes *Korollar*:

$$\iint_{\mathcal{S}} d\vec{s} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \quad \text{ist unabhängig von der Fläche } \mathcal{S} \text{ für gegebenen Rand } \partial\mathcal{S}. \tag{A.189}$$

Wählen wir eine geschlossene Fläche \mathcal{S} , so ist $\partial\mathcal{S} = \emptyset$ und wir erhalten das weitere *Korollar*

$$\oiint_{\Delta\mathcal{S}} d\vec{s} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 0 \quad \text{für beliebige geschlossene Flächen.} \tag{A.190}$$

Die diversen Formen des Fundamentalsatzes können ausgenutzt werden, um Regeln für die *partielle Integration* im \mathbb{R}^3 herzuleiten. Zur Erinnerung: Für Funktionen f, g einer Variablen x haben wir

$$f g \Big|_a^b \stackrel{\text{Fundamentalsatz}}{=} \int_a^b dx \frac{d}{dx} (f g) \stackrel{\text{Produktregel}}{=} \int_a^b dx \frac{df}{dx} g + \int_a^b dx f \frac{dg}{dx} \tag{A.191}$$

$$\Rightarrow \int_a^b dx f \frac{dg}{dx} = f g \Big|_a^b - \int_a^b dx \frac{df}{dx} g. \tag{A.192}$$

Dies ist die bekannte Form der partiellen Integration. Wir können dieselbe Idee auf Linien-, Flächen- und Volumenintegrale anwenden. Dies ergibt zahlreiche Regeln derselben Form. Wir leiten ein Beispiel für Volumenintegrale her:

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \rho \vec{v} \stackrel{\text{Gauß}}{=} \iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \stackrel{\text{Produktregel}}{=} \iiint_{\mathcal{V}} dV (\vec{\nabla} \rho) \cdot \vec{v} + \iiint_{\mathcal{V}} dV \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \tag{A.193}$$

$$\Rightarrow \iiint_{\mathcal{V}} dV \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \oiint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \rho \vec{v} - \iiint_{\mathcal{V}} dV (\vec{\nabla} \rho) \cdot \vec{v}. \tag{A.194}$$

In der Praxis kommen oft Integrale über \mathbb{R}^3 vor. In diesem Fall verschwindet der Oberflächenterm, wenn der Integrand hinreichend schnell abfällt. Um dies zu prüfen, kann man das Volumen endlich wählen, z. B. als Kugel mit dem Radius R , und den Grenzübergang zum \mathbb{R}^3 (also $R \rightarrow \infty$) betrachten.

A.3.2 Potentiale

Wir hatten in Abschnitt A.2.2 gesehen, dass die Rotation eines Gradientenfeldes verschwindet. Formal können wir diese Aussage schreiben als

$$\exists V(\vec{r}) : \quad \vec{F} = -\vec{\nabla} V \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0. \tag{A.195}$$

Das Minuszeichen ist reine Konvention (und nur in der Physik üblich). Wir wollen nun zeigen, dass die Umkehrung ebenfalls gilt: Verschwindet die Rotation von \vec{F} überall auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet, so existiert ein skalares Feld $-V$, dessen Gradient \vec{F} ist,

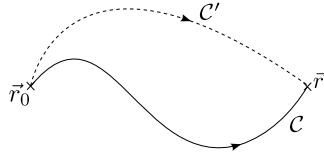
$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists V(\vec{r}) : \quad \vec{F} = -\vec{\nabla}V. \quad (\text{A.196})$$

Das Feld $V(\vec{r})$ heißt skalares *Potential* zu \vec{F} .

□ Beweis: Seien \vec{r}_0 und \vec{r} zwei Punkte. Wir zeigen zunächst, dass das Linienintegral

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{l} \cdot \vec{F} \quad (\text{A.197})$$

nicht vom Weg zwischen den Endpunkten \vec{r}_0 und \vec{r} abhängt.



Seien nämlich C und C' zwei Kurven mit diesen Endpunkten. Dann unterscheiden sich

$$\int_C d\vec{l} \cdot \vec{F} \quad \text{und} \quad \int_{C'} d\vec{l} \cdot \vec{F} \quad (\text{A.198})$$

durch ein Linienintegral über die *geschlossene* Kurve $C \cup$ (Umkehrung von C'). Dieses ist nach dem Stokesschen Satz (dessen Gültigkeit erfordert, dass das Gebiet einfach zusammenhängend ist) gleich

$$\iint_S d\vec{s} \cdot \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{F})}_0 = 0. \quad (\text{A.199})$$

Die beiden Integrale in (A.198) sind also gleich. Wir definieren

$$W(\vec{r}) := - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{l} \cdot \vec{F} \quad (\text{A.200})$$

und halten \vec{r}_0 fest. Wie gezeigt, hängt $W(\vec{r})$ tatsächlich nur von \vec{r} ab, nicht vom Weg. W ist daher eine *Funktion* von \vec{r} , d. h. ein skalares Feld. Sein Gradient hat die kartesischen Komponenten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r_i} W(\vec{r}) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{W(\vec{r} + \epsilon \hat{r}_i) - W(\vec{r})}{\epsilon} \quad \left| \quad i = 1, 2, 3, \quad r_1 = x, r_2 = y, r_3 = z \right. \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(- \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r} + \epsilon \hat{r}_i} d\vec{l} \cdot \vec{F} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{l} \cdot \vec{F} \right) \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r} + \epsilon \hat{r}_i} d\vec{l} \cdot \vec{F} - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{l} \cdot \vec{F} \right) \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\vec{r}}^{\vec{r} + \epsilon \hat{r}_i} d\vec{l} \cdot \vec{F} \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \epsilon \hat{r}_i \cdot \vec{F}(\vec{r}) = -\hat{r}_i \cdot \vec{F}(\vec{r}) = -F_i(\vec{r}), \end{aligned} \quad (\text{A.201})$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass für ϵ infinitesimal \vec{F} als konstant betrachtet werden kann. Es folgt

$$\vec{\nabla} W(\vec{r}) = -\vec{F}(\vec{r}) \quad (\text{A.202})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} W(\vec{r}). \quad (\text{A.203})$$

Damit ist gezeigt, dass $W(\vec{r})$ eine mögliche Wahl für das Potential $V(\vec{r})$ ist: Eine explizite Form für V ist also

$$V(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{l} \cdot \vec{F} \quad (\text{A.204})$$

und wie gezeigt sorgt die Rotationsfreiheit von \vec{F} dafür, dass dieser Ausdruck wohldefiniert ist, ohne den Weg anzugeben. Das Potential ist *nicht eindeutig*, da wir immer eine Konstante addieren können, ohne den Gradienten zu verändern:

$$\vec{\nabla}V(\vec{r}) = \vec{\nabla}[V(\vec{r}) + c]. \quad (\text{A.205})$$

Wir haben damit folgende Äquivalenz gezeigt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists V(\vec{r}) : \quad \vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r}). \quad (\text{A.206})$$

Oft fasst man diese Aussage und die als Nebenergebnisse gefundenen zu folgendem *Satz* zusammen:

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Überall gilt $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$.
2. Es existiert ein Potential $V(\vec{r})$, so dass $\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$.
3. $\int_a^b d\vec{l} \cdot \vec{F}$ ist wegunabhängig für gegebene Endpunkte.
4. $\oint d\vec{l} \cdot \vec{F} = 0$ für jede geschlossene Kurve.

■ Beispiele:

1. Existiert ein Potential V zu $\vec{F} = x \hat{y}$? Wenn ja, bestimme V . Es ist

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial y} 0 - \frac{\partial}{\partial z} x, \frac{\partial}{\partial z} 0 - \frac{\partial}{\partial x} 0, \frac{\partial}{\partial x} x - \frac{\partial}{\partial y} 0 \right) = \hat{z} \neq 0. \quad (\text{A.207})$$

Ein Potential existiert nicht.

2. Existiert ein ein Potential V zu $\vec{F} = \vec{r}$? Wenn ja, bestimme V . Es ist $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ (s. o.), also existiert ein Potential. Eine mögliche Wahl ist

$$V(\vec{r}) = - \int_0^{\vec{r}} d\vec{l}' \cdot \vec{r}'. \quad (\text{A.208})$$

Das Integral ist wegunabhängig, wir wählen die gerade Strecke von 0 nach \vec{r} , dann ist $d\vec{l}' = dr' \hat{r}'$ (Kugelkoordinaten), also

$$V(\vec{r}) = - \int_0^{\vec{r}} dr' \hat{r}' \cdot r' \hat{r}' = - \int_0^{\vec{r}} dr' r' = -\frac{r^2}{2}. \quad (\text{A.209})$$

Eine weitere wichtige Aussage betrifft divergenzfreie Vektorfelder. Wir hatten in Abschnitt (A.2.2) gesehen, dass die Divergenz eines Wirbelfeldes verschwindet. Formal:

$$\exists \vec{A}(\vec{r}) : \quad \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0. \quad (\text{A.210})$$

Man kann zeigen, dass auch die Umkehrung gilt; den Beweis besprechen wir hier nicht. Damit haben wir die Äquivalenz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \vec{A}(\vec{r}) : \quad \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (\text{A.211})$$

Ein solches Feld \vec{A} heißt *Vektorpotential* zu \vec{F} . \vec{A} ist nicht eindeutig bestimmt, denn wenn wir zu \vec{A} ein Gradientenfeld $\vec{\nabla}\chi$ addieren, erhalten wir

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla}\chi) = \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{A}}_{\vec{F}} + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\chi}_0 = \vec{F}, \quad (\text{A.212})$$

also ist $\vec{A} + \vec{\nabla}\chi$ ebenfalls ein Vektorpotential zu \vec{F} . Man fasst diese Äquivalenz und einige Ergebnisse, die sich leicht aus dem Stokesschen Satz ergeben, zu folgendem *Satz* zusammen:

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Überall gilt $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$.
2. Es existiert ein Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$, so dass $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

3. $\iint_{\mathcal{S}} d\vec{s} \cdot \vec{F}$ ist wegunabhängig von der Fläche \mathcal{S} , für gegebenen Rand.

4. $\oiint d\vec{s} \cdot \vec{F} = 0$ für jede geschlossene Fläche.

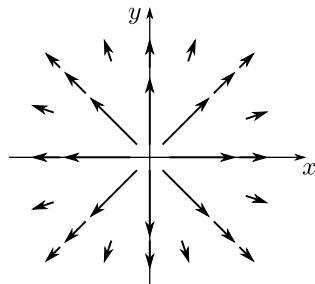
Schließlich bemerken wir noch, dass *jedes* (hinreichend oft stetig differenzierbare) Vektorfeld \vec{F} als Summe eines Gradienten und einer Rotation dargestellt werden kann:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V + \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (\text{A.213})$$

Die Zerlegung ist nicht eindeutig. Wir verzichten auf den Beweis.

A.4 Die Diracsche δ -Funktion

Betrachte das Vektorfeld $\vec{v} = \hat{r}/r^2 = \vec{r}/r^3$.



Wir berechnen die Divergenz in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 v_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \underbrace{v_\theta}_0 + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \underbrace{v_\phi}_0 \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} 1 = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.214})$$

Das Feld ist anscheinend quellenfrei, was vielleicht überrascht – wir kommen gleich darauf zurück. Nun bestimmen wir den Fluss des Feldes durch eine Kugel mit dem Radius R um den Ursprung:

$$\oiint_{\partial \mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \vec{v} = R^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \hat{r} \cdot \frac{\hat{r}}{R^2} = \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi. \quad (\text{A.215})$$

Der Gaußsche Satz liefert somit

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \oiint_{\partial \mathcal{V}} d\vec{s} \cdot \vec{v} = 4\pi. \quad (\text{A.216})$$

Aber wir hatten $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ berechnet – wo liegt der Fehler? Das Ergebnis $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ gilt nur für $\vec{r} \neq 0$, bei $\vec{r} = 0$ hat \vec{v} eine Singularität. Damit ist \vec{v} nicht überall hinreichend oft stetig differenzierbar, was wir immer, zumindest stillschweigend, angenommen haben, und der Gaußsche Satz gilt zunächst einmal gar nicht. Wir wollen ihn aber *erweitern* auf Fälle wie im Beispiel, da diese Art von Feld in der Elektrodynamik eine große Rolle spielt. Daher *fordern* wir die Gültigkeit des Gaußschen Satzes. Dann muß die Singularität bei $\vec{r} = 0$ dafür sorgen, dass der Satz erfüllt ist, denn überall sonst gilt ja $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$. Also: Für jeden Radius R muss gelten

$$\iiint_{\mathcal{V}} dV \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 4\pi, \quad (\text{A.217})$$

insbesondere für *beliebig kleinen* Radius $R > 0$. Wir *definieren* eine „Funktion“ $\delta(\vec{r})$ so, dass

1. $\delta(\vec{r}) = 0 \quad \forall \vec{r} \neq 0$ und
2. $\iiint_{\mathcal{V}} dV \delta(\vec{r}) = 1$ für jedes Volumen \mathcal{V} das $\vec{r} = 0$ enthält (nicht am Rand), insbesondere für $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$.

Dafür muss $\delta(\vec{r})$ bei $\vec{r} = 0$ singularär sein – jeder endliche Wert würde $\iiint_{\mathcal{V}} dV \delta(\vec{r}) = 0$ ergeben. Wir müssen uns noch überzeugen, dass die Definition nicht zu widersprüchen führt. Dann können wir schreiben

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} = 4\pi\delta(\vec{r}) \quad (\text{A.218})$$

und der Gaußsche Satz ist erfüllt.

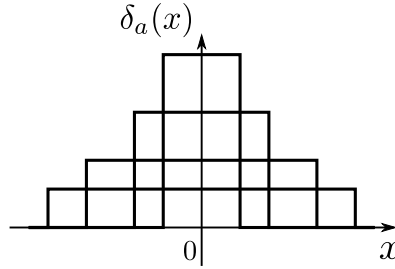
A.4.1 Die δ -Funktion in einer Dimension

Wir betrachten zunächst die eindimensionale Form der δ -„Funktion“. Wir definieren $\delta(x)$ durch

1. $\delta(x) = 0 \quad \forall x \neq 0$ und
2. $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = 1$.

Mathematisch exakt ist $\delta(x)$ keine Funktion, sondern eine sogenannte *Distribution*, die nur unter dem Integral definiert ist. Wir lassen diesen Punkt aber von nun an, wie in der Physik üblich, unbeachtet. $\delta(x)$ lässt sich aber als Grenzwert von Funktionenfolgen (aus gewöhnlichen Funktionen) darstellen. Sei z. B.

$$\delta_a(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } |x| > a, \\ \frac{1}{2a} & \text{für } |x| \leq a. \end{cases} \quad (\text{A.219})$$



Beachte

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_a(x) = \frac{2a}{2a} = 1 \quad \forall a > 0. \quad (\text{A.220})$$

Also konvergiert die Folge $\delta_a(x)$ für $a \rightarrow 0^+$ (a geht von oben gegen 0) gegen $\delta(x)$. Unendlich viele Darstellungen sind möglich, z. B. durch Gaußfunktionen

$$\delta_\sigma(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} \quad \text{mit} \quad \delta(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \delta_\sigma(x) \quad (\text{A.221})$$

und durch Lorentzfunktionen

$$\delta_\eta(x) := \frac{1}{\pi} \frac{\eta}{x^2 + \eta^2} \quad \text{mit} \quad \delta(x) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \delta_\eta(x). \quad (\text{A.222})$$

Aus der Definition von $\delta(x)$ ergeben sich einige wichtige Eigenschaften: Hier sei $f(x)$ eine gewöhnliche Funktion, also insbesondere nicht $\delta(x)$.

3. $f(x) \delta(x) = f(0) \delta(x)$, da für $x \neq 0$ gilt $\delta(x) = 0$ und der Faktor $f(x)$ dann irrelevant ist. Es folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(0) \delta(x) = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = f(0). \quad (\text{A.223})$$

3'. Etwas verallgemeinert:

$$f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0) \delta(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0). \quad (\text{A.224})$$

Die δ -Funktion pickt also den Funktionswert am Ort ihrer Nullstelle heraus.

4. $\delta(kx) = \frac{1}{|k|} \delta(x)$ für eine Konstante k . Man sagt, $\delta(x)$ ist antilinear.

□ Beweis: Betrachte

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(kx) \quad (\text{A.225})$$

und substituiere $y = kx \Rightarrow x = y/k \Rightarrow dx = dy/k$, also

$$\dots = \int_{-\infty^k}^{\infty^k} \frac{dy}{k} f\left(\frac{y}{k}\right) \delta(y) = \underbrace{\text{sgn } k}_{=1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{k} f\left(\frac{y}{k}\right) \delta(y). \quad (\text{A.226})$$

sgn k ist das Vorzeichen von k , es tritt hier auf, weil für $k < 0$ die Integrationsgrenzen vertauscht werden. Weiter ist

$$\dots = \frac{\text{sgn } k}{k} \int_{-\infty}^{\infty} dy f\left(\frac{y}{k}\right) \delta(y) = \frac{1}{|k|} f(0) = \frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x). \quad (\text{A.227})$$

Da dies für alle Funktionen f gilt, folgt die Behauptung.

4'. Verallgemeinerung:

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i), \quad (\text{A.228})$$

wobei x_i einfache Nullstellen von $g(x)$ sind, d. h. $g(x_i) = 0$ aber $g'(x_i) \neq 0$. Die Summe erstreckt sich über alle solchen Nullstellen.

□ Beweis:

- (a) für $g(x) \neq 0$ (x ist keine Nullstelle, d. h. nicht gleich einem der x_i) sind beide Seiten der Gleichung Null, sie ist also erfüllt.
- (b) Sei $[a_i, b_i]$ ein Intervall, das die Nullstelle x_i enthält (nicht am Rand). Da x_i eine *einfache* Nullstelle ist, existiert ein solches Intervall, auf dem $g(x)$ monoton ist. Wähle $[a_i, b_i]$ entsprechend. Wir integrieren beide Seiten der behaupteten Gleichung über $[a_i, b_i]$. Die linke Seite ergibt

$$\begin{aligned} \int_{a_i}^{b_i} dx \delta(g(x)) & \quad \left| \text{Substitution } y = g(x) \Rightarrow dy = dx \frac{dg}{dx} = dx g'(x) \right. \\ & = \int_{g(a_i)}^{g(b_i)} dy \frac{1}{g'(x(y))} \delta(y). \end{aligned} \quad (\text{A.229})$$

Nun ist auf $[a_i, b_i]$ genau dann $y = g(x) = 0$, wenn $x = x_i$. Also ist

$$\begin{aligned} \int_{a_i}^{b_i} dx \delta(g(x)) & = \int_{g(a_i)}^{g(b_i)} dy \frac{1}{g'(x_i)} \delta(y) = \frac{1}{g'(x_i)} \int_{g(a_i)}^{g(b_i)} dy \delta(y) \\ & = \frac{1}{g'(x_i)} \text{sgn}[g(b_i) - g(a_i)] = \frac{1}{g'(x_i)} \text{sgn } g'(x_i) = \frac{1}{|g'(x_i)|}, \end{aligned} \quad (\text{A.230})$$

wobei wir verwendet haben, dass $g(x)$ auf $[a_i, b_i]$ monoton ist. Die rechte Seite der Gleichung wird

$$\int_{a_i}^{b_i} dx \sum_j \frac{1}{|g'(x_j)|} \delta(x - x_j) = \sum_j \frac{1}{|g'(x_j)|} \int_{a_i}^{b_i} dx \delta(x - x_j) = \sum_j \frac{1}{|g'(x_j)|} \delta_{ij}, \quad (\text{A.231})$$

da nur die eine Nullstelle $x_i = x_j$ im Intervall $[a_i, b_i]$ liegt, und damit

$$\dots = \frac{1}{|g'(x_i)|}. \quad (\text{A.232})$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

5. Die Stammfunktion von $\delta(x)$ ist die Stufenfunktion (Heavisidesche Sprungfunktion):

$$\int_{-\infty}^x dx' \delta(x' - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < x_0 \\ 1 & \text{für } x > x_0 \end{cases} = \theta(x - x_0) \quad \text{für } x \neq x_0. \quad (\text{A.233})$$

Der Wert bei $x = x_0$ ist zunächst undefiniert, man kann bei Bedarf $\theta(0) = 1/2$ setzen. Damit können wir die δ -Funktion als Ableitung schreiben:

$$\delta(x - x_0) = \frac{d}{dx} \theta(x - x_0). \quad (\text{A.234})$$

6. Wir können auch Ableitungen von $\delta(x)$ definieren. Dazu fordern wir die Gültigkeit der partiellen Integration auch für δ : Sei $a < x_0 < b$, dann ist

$$\int_a^b dx \delta'(x - x_0) f(x) = \underbrace{\delta(x - x_0) f(x)}_0 \Big|_a^b - \int_a^b dx \delta(x - x_0) f'(x) = -f'(x_0). \quad (\text{A.235})$$

Dies soll für beliebige $a < x_0 < b$ gelten, wir können also auch schreiben

$$\delta'(x - x_0) f(x) = -\delta(x - x_0) f'(x_0). \quad (\text{A.236})$$

Diese Vorschrift lässt sich durch mehrfache Anwendung auf höhere Ableitungen verallgemeinern:

$$\delta^{(n)}(x - x_0) f(x) = (-1)^n \delta(x - x_0) f^{(n)}(x_0). \quad (\text{A.237})$$

■ Beispiel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta''(x) x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) \frac{d^2}{dx^2} x^2 = 2. \quad (\text{A.238})$$

A.4.2 Die δ -Funktion im \mathbb{R}^3

Wir kommen noch einmal auf die δ -Funktion in drei Dimensionen zurück, die sich ja aus dem Wunsch ergab, den Gaußschen Satz für $\vec{v} = \hat{r}/r^2$ zu retten. Die δ -Funktion in drei Dimensionen ist in kartesischen Koordinaten einfach definiert durch

$$\delta(\vec{r}) := \delta(x) \delta(y) \delta(z). \quad (\text{A.239})$$

Manchmal schreibt man dafür auch $\delta^3(\vec{r})$, was aber eher verwirrend erscheint. Es folgt

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0). \quad (\text{A.240})$$

Offensichtlich gilt

1. $\delta(\vec{r}) = 0 \quad \forall \vec{r} \neq 0$ und
2. $\iiint dV \delta(\vec{r}) = 1$.

Also erfüllt $\delta(\vec{r})$ die oben gestellten Forderungen an die Quellen des Feldes $\vec{v} = \hat{r}/r^2$:

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} = 4\pi \delta(\vec{r}). \quad (\text{A.241})$$

Da gilt

$$\vec{\nabla} \frac{1}{r} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} = -\frac{\hat{r}}{r^2}, \quad (\text{A.242})$$

folgt die wichtige Beziehung

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\vec{\nabla} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} = -4\pi \delta(\vec{r}). \quad (\text{A.243})$$

A.5 Die Taylor-Reihe

Die Taylor-Entwicklung ist eine in allen Zweigen der Physik sehr wichtige Methode. Sie erlaubt die systematische Konstruktion von Näherungen, oft mit expliziter Abschätzung des Fehlers, und gelegentlich sogar die Herleitung exakter Resultate durch Resummation der Taylor-Reihe. Die zentralen Aussagen werden durch die folgenden Sätze ausgedrückt, die wir hier nicht beweisen. Die Beweise sind nicht schwierig und finden sich in einführenden Lehrbüchern der Analysis.

Taylor'sche Formel: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und f eine auf I $(n+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für $x, x_0 \in I$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x, x_0) \quad (\text{A.244})$$

mit dem Restglied

$$R_{n+1}(x, x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x dx' (x - x')^n f^{(n+1)}(x'). \quad (\text{A.245})$$

Man kann auch zeigen, dass ein x_1 mit $x_0 \leq x_1 \leq x$ oder $x \leq x_1 \leq x_0$ existiert, so dass gilt

$$R_{n+1}(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_1)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (\text{A.246})$$

(Laplacesche Form des Restglieds).

■ Beispiel: Sei $f(x) = e^x$. Es ist

$$f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x, \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) = e^x. \quad (\text{A.247})$$

Daraus folgt für $x_0 = 0$:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \dots + \frac{1}{n!} x^n + \frac{e^{x_1}}{(n+1)!} x^{n+1}. \quad (\text{A.248})$$

So finden wir eine Reihenentwicklung für die Exponentialfunktion mit einer Fehlerabschätzung. Z. B. für $x = 1$ ergibt sich die Reihendarstellung der Zahl e :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{x_1}}{(n+1)!}. \quad (\text{A.249})$$

mit $0 < x_1 < 1$. Der absolute Fehler (das Restglied) ist also kleiner als $e/(n+1)!$ und der relative Fehler ist kleiner als

$$\frac{\frac{e}{(n+1)!}}{e} = \frac{1}{(n+1)!}, \quad (\text{A.250})$$

er fällt daher wie das Inverse der Fakultät mit der Ordnung n ab.

Ist die Funktion f beliebig oft differenzierbar, so können wir n nach unendlich schicken. Falls gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x, x_0) = 0$, so konvergiert die Taylor-Reihe gegen $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \quad (\text{A.251})$$

Geht das Restglied nicht gegen Null, so konvergiert die Taylor-Reihe gar nicht, oder sie konvergiert zwar, aber nicht gegen $f(x)$. Der letztere Fall kann zu schwer zu entdeckenden Fehlern führen.

Konvergiert die Taylor-Reihe auf dem offenen Intervall $]x_0 - r, x_0 + r[$ gegen $f(x)$, gilt dies aber nicht mehr für irgendein größeres r , so nennt man r den *Konvergenzradius* der Taylor-Reihe im Punkt x_0 . Man schreibt $r = 0$, wenn die Reihe (trivialerweise) für $x = x_0$ konvergiert, aber für beliebig kleine $|x - x_0|$ nicht. Ein interessantes Beispiel ist

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \exp(-1/x^2) & \text{für } x \neq 0. \end{cases} \quad (\text{A.252})$$

Diese Funktion ist beliebig oft differenzierbar und es gilt $f^{(n)}(0) = 0 \forall n$, also ist die Taylor-Reihe um $x_0 = 0$ identisch Null und der Konvergenzradius ist $r = 0$.

In der Funktionentheorie findet man ein nützliches Ergebnis für den Konvergenzradius: Ist $f: \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ auf einer Kreisscheibe $K \subset \mathbb{C}$ um z_0 mit dem Radius r *holomorph*, aber nicht auf irgendeiner größeren Kreisscheibe, so ist der Konvergenzradius r . (Holomorph bedeutet i. W., dass die Funktion nur von $z = x + iy$ abhängt und nicht von $z^* = x - iy$, und dass sie beliebig oft differenzierbar ist.)

■ Beispiel 1: Die oben angegebene Funktion lautet, erweitert auf \mathbb{C} ,

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{für } z = 0 \\ \exp(-1/z^2) & \text{für } z \neq 0. \end{cases} \quad (\text{A.253})$$

Aber

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(iy) = \exp\left(-\frac{1}{(iy)^2}\right) = \exp\left(\frac{1}{y^2}\right) = \infty \quad (\text{A.254})$$

ist nicht gleich $f(0) = 0$, also ist die Funktion auf \mathbb{C} noch nicht einmal stetig im Punkt 0. Daher ist der Konvergenzradius Null.

■ Beispiel 2: Die Exponentialfunktion $f(z) = e^z$ ist holomorph auf ganz \mathbb{C} , daher ist der Konvergenzradius für alle reellen x_0 unendlich.

■ Beispiel 3: Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} \tag{A.255}$$

ist stetig und beliebig oft differenzierbar auf \mathbb{R} . Sie hat aber Pole bei $z = \pm i$. Der Konvergenzradius bei einem reellen x_0 ist also

$$r = |x_0 - (\pm i)| = |x_0 \mp i| = \sqrt{x_0^2 + 1}. \tag{A.256}$$