3 Grundgleichungen der Elektrodynamik

3.1 Maxwell-Gleichungen in Differentialform

Maxwell-Gleichungen (mikroskopisch):

$$\boxed{\begin{aligned}
&(\mathrm{I}) && \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\, \rho(\vec{r},t) \\
&(\mathrm{II}) && \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r},t) \\
&(\mathrm{III}) && \operatorname{div} \vec{B}(\vec{r},t) = 0 \\
&(\mathrm{IV}) && \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r},t) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r},t) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r},t)
\end{aligned}}$$

28.10.21

mit

$\varepsilon_0 = 8.854\ldots \cdot 10^{-12}\, \frac{As}{Vm}$ "Permittivität des Vakuums"

$\mu_0 = 1.256\ldots \cdot 10^{-6}\, \frac{Vs}{Am}$ "Permeabilität des Vakuums"

sodass

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c = 299792458\ \frac{m}{s} \quad \text{exakt} \quad \text{(Lichtgeschwindigkeit)}$$

In Worten:

(I) Elektrische Ladungen sind die Quellen des elektrischen Feldes.

(II) Zeitlich veränderliche Magnetfelder erzeugen elektrische Wirbelfelder.

(III) Magnetfelder sind quellenfrei.

(IV) Elektrische Ströme und zeitlich veränderliche elektrische Felder erzeugen magnetische Wirbelfelder.

Bemerkungen:

- In Maxwell-Gleichungen erscheinen Ladungs- und Stromdichte als Ursache der Felder, durch Lorentzkraft wirken Felder auf Bewegung der Ladungen zurück.

- Zusammen mit Bewegungsgleichungen und Lorentzkraft stellen Maxwell-Gleichungen Grundgleichungen der Elektrodynamik dar, aus der alle relevanten Aussagen abgeleitet werden.

- Es gibt weitere Beziehungen zwischen $\varrho, \vec{j}, \vec{E}$ und $\vec{B}$ die nicht aus Maxwell-Gleichungen ableitbar sind.

  Beispiel: $\vec{j} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Leitfähigkeitstensor}}}{\sigma} \vec{E}$ "Ohm'sches Gesetz"

- Mikroskopische Maxwell-Gleichungen universell gültig, aber in Materie oft sinnvoll zu makroskopischen Maxwell-Gleichungen für dielektrische Verschiebung $\vec{D} := \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ und magnetische Feldstärke $\vec{H} := \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$ überzugehen (Kap. 8)

3.2 Maxwell-Gleichungen in Integralform

(I) Gauß'sches Durchflutungsgesetz:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \qquad \Big| \int_V d^3\vec{r}$$

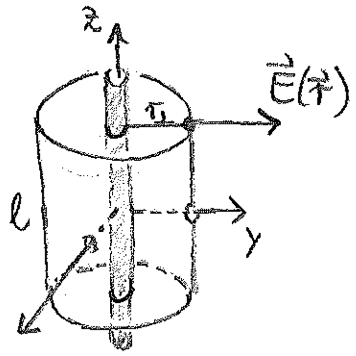
$$\Rightarrow \quad \int_V d^3\vec{r} \, \operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3\vec{r} \, \rho$$

$$\xRightarrow[\text{Gauß}]{\text{Satz von}} \quad \boxed{\oint_{S(V)} d\vec{S} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_V}$$

Elektrischer Fluss durch geschlossene Oberfläche proportional zur eingeschlossenen Ladung

Anwendung: Berechnung von $\vec{E}(\vec{r})$ für symmetrische $\rho(\vec{r})$

Beispiel (geladener dünner Stab):



Ladungsdichte: $\rho(\vec{r}') = \lambda \, \delta(x') \, \delta(y')$

Symmetrie: $\vec{E}(\vec{r}) = E(r_\perp) \, \vec{e}_\perp$

Damit: $\frac{1}{\varepsilon_0} Q_V = \oint_{S(V)} d\vec{S} \cdot \vec{E}$

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \lambda l = \oint_{S(V)} d\vec{S} \cdot \vec{e}_\perp \, E(r_\perp)$$

$$= \int_{-l/2}^{l/2} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \; r_\perp \; \vec{e}_\perp \cdot \vec{e}_\perp \, E(r_\perp)$$

$$\downarrow$$

$$= 2\pi \ell \, r_\perp \, E(r_\perp)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_\perp} \vec{e}_\perp \qquad \text{(Übung 3.3)}$$

(II) Faraday'sches Induktionsgesetz:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \qquad \Big| \int_S d\vec{S} \cdot$$

$$\Rightarrow \int_S d\vec{S} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} = -\int_S d\vec{S} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

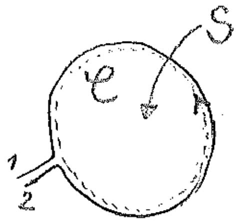
$$\xrightarrow[\text{Stokes}]{\text{Satz von}} \boxed{\oint_{\mathcal{C}(S)} d\vec{r} \cdot \vec{E} = -\int_S d\vec{S} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Bemerkung (elektr. Spannung): Wegintegral

$$\boxed{U_{\mathcal{C}} := \int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{E}}$$

kann als Spannung zwischen Endpunkten von konstantem $\mathcal{C}$ gemessen werden

Beispiel (Leiterschleife in veränderlichem Magnetfeld):



$$U_{12}^{\text{ind}} = \int_1^2 d\vec{r}\cdot\vec{E}$$

$$= \oint_{\mathcal{C}} d\vec{r}\cdot\vec{E}$$

$$= -\int_S d\vec{S}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\overset{S\text{ fest}}{=} -\frac{d}{dt}\int d\vec{S}\cdot\vec{B}$$

$$\boxed{U_{12}^{\text{ind}} = -\frac{d}{dt}\Phi\Big|_{S=\text{konst.}}} \quad \text{mit} \quad \boxed{\Phi := \int_S d\vec{S}\cdot\vec{B}}$$

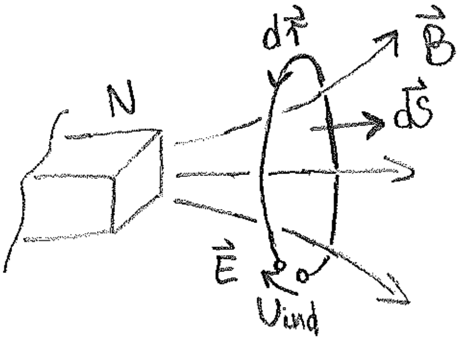
"Faradaysches Feldinduktionsgesetz"

"magnetischer Fluss"

4.11.21

Bemerkungen:

- Elektromagnetische Induktion 1831 von Faraday entdeckt
- Fundamentale technische Bedeutung: Elektromotoren, Generatoren, Transformatoren
- $d\vec{S}$ und $d\vec{r}$ bilden „Rechtsschraube":

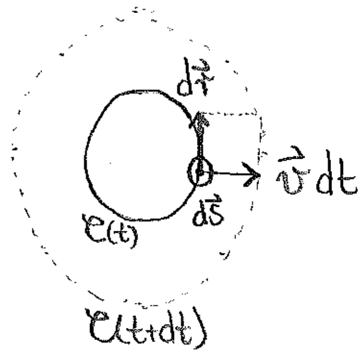


- Lenz'sche Regel: Wirkung des induzierten elektrischen entgegen Ursache gerichtet

- Relativitätsprinzip: Induzierte Spannung nur von Relativbewegung Leiterschleife – Magnet abhängig

Beispiel (bewegte Leiterschleife)

Flächenänderung: $d\vec{S} = \vec{v}\,dt \times d\vec{r}$



Flussänderung:

$$d\Phi\Big|_{B=\text{konst}} = \int_{\Delta S} d\vec{S}\cdot\vec{B}$$

$$= \oint_{\mathcal{C}} (\vec{v}\,dt \times d\vec{r})\cdot\vec{B}$$

$$= \oint_{\mathcal{C}} d\vec{r}\cdot(\vec{B}\times\vec{v}\,dt)$$

$$= -dt \oint_{\mathcal{C}} d\vec{r}\cdot(\vec{v}\times\vec{B})$$

Induzierte Spannung:

$$U_{12}^{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}\Big|_{B=\text{konst.}} = \oint_{\mathcal{C}} d\vec{r}\cdot(\vec{v}\times\vec{B})$$

Faraday'sches Induktionsgesetz:

$$\boxed{U_{12}^{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S d\vec{S}\cdot\vec{B} = \oint_{C(S)} d\vec{r}\cdot(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})}$$

Bemerkungen:

- Induzierte Spannung Folge der Kraft $\vec{F} = q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$ auf Ladungen q
- Elektrisches Feld im mit C bewegten Bezugssystem: $\vec{E}' = \vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}$ für $v \ll c$
- Geschlossene ideale Leiterschleife:
  $$0 = U^{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}$$
  Flussänderung wird durch induzierten Strom verhindert
- Reale Leiterschleife:
  $$U^{ind} = R\, I^{ind}$$
- Kraft auf bewegte Leiterschleife (inhomogenes, zeitunabhängiges $\vec{B}$):
  Bezugssystem der Schleife
  $$\vec{F} = \oint_C d\vec{F} = \oint_C dq\, \underbrace{\vec{u}}_{\frac{d\vec{r}}{dt}}\times\vec{B} = \oint_C d\vec{r}\times\vec{B}\,\frac{dq}{dt} = I^{ind}\oint_C d\vec{r}\times\vec{B}$$

(III) Nichtexistenz magnetischer Ladungen:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad \Big| \int_V d^3\vec{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_{S(V)} d\vec{S} \cdot \vec{B} = 0}$$

Magnetischer Fluss durch geschlossene Oberfläche null

Folgerungen:

- $\vec{B}$-Feld hat keine Quellen oder Senken
- $\vec{B}$-Feldlinien immer geschlossen ("Wirbelfeld")

(IV) Ampère'sches Durchflutungsgesetz:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \qquad \Big| \int_S d\vec{S} \cdot$$

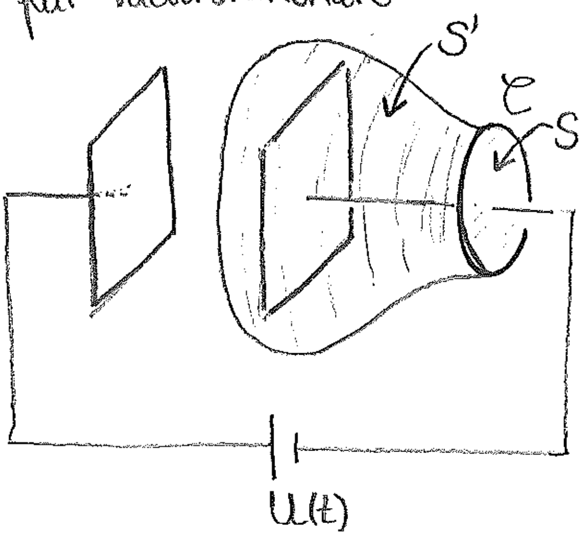
$$\Rightarrow \boxed{\oint_{e(S)} d\vec{r} \cdot \vec{B} = \mu_0 \int_S d\vec{S} \cdot \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \int_S d\vec{S} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

Bemerkungen (Verschiebungsstrom):

- Ursprüngliche Form des Ampère'schen Durchflutungsgesetzes

$$\oint_{\mathcal{C}(S)} d\vec{r}\cdot\vec{B} = \mu_0 \int_S d\vec{S}\cdot\vec{j} = \mu_0 I_S$$

unvollständig für nichtstationäre Ströme:



$\mathcal{C}(S) = \mathcal{C}(S')$, aber $I_S \neq I_{S'} = 0$

- Lösung durch Maxwell: Verschiebungsstrom

$$\vec{j}_V = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

sodass $\oint_{\mathcal{C}(S)} d\vec{r}\cdot\vec{B} = \mu_0 \int_S d\vec{S}\cdot(\vec{j}+\vec{j}_V)$ unabhängig von Wahl von S zu gegebenem $\mathcal{C}(S)$

- Ohne $\vec{j}_V$ keine Ladungserhaltung (Kap. 3.3) und keine elektromagnetischen Wellen (Kap. 6)

11.11.21

3.3 Bilanzgleichungen

3.3.1 Ladungserhaltung

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \qquad \Big| \operatorname{div}(\cdot)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B}}_{=0} = \mu_0 \operatorname{div} \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\operatorname{div} \vec{E}}_{\frac{1}{\varepsilon_0}\rho}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r},t) + \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r},t) = 0}$$ "Kontinuitätsgleichung"

Integralform (festes Volumen V):

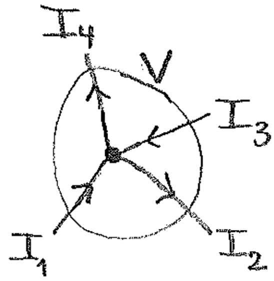
$$\int_V d^3\vec{r} \, \frac{\partial \rho}{\partial t} + \int_V d^3\vec{r} \, \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

$$\overset{V \text{ fest}}{\underset{\text{Gauß}}{\Rightarrow}} \frac{d}{dt} \int_V d^3\vec{r} \, \rho + \int_{S(V)} d\vec{S} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} Q_V = - I_{S(V)}}$$ "Ladungserhaltung"

Interpretation: Die Ladung in einem Volumen kann sich nur ändern, indem ein Strom durch die Oberfläche des Volumens fließt.

Beispiel (1. Kirchhoff'sches Gesetz):



Stationärer Strom durch Knoten

$$\sum_\ell I_\ell = 0 \qquad \text{"Knotenregel"}$$

3.3.2 Energieerhaltung

Idee: Gesamtenergie = mechanische Energie + Feldenergie = konst.

Mechanische Energie (Punktladungen q_i bei $\vec{r}_i$, $i = 1, \dots, N$):

$$dW_{mech} = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

$$= \sum_i q_i \Big[\vec{E}(\vec{r}_i, t) + \underbrace{\vec{v}_i}_{\frac{d\vec{r}_i}{dt}} \times \vec{B}(\vec{r}_i, t)\Big] \cdot d\vec{r}_i$$

$$= \sum_i q_i \vec{E}(\vec{r}_i, t) \cdot d\vec{r}_i$$

Magnetisches Feld leistet keine Arbeit, da $\vec{F} \perp d\vec{r}_i$

Leistung des Feldes an Ladungen:

$$P = \frac{dW_{mech}}{dt} = \sum_i q_i \vec{E}(\vec{r}_i,t)\cdot\frac{d\vec{r}_i}{dt} \qquad \Big|\cdot 1 = \int d^3\vec{r}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

$$= \int d^3\vec{r}\,\underbrace{\sum_i q_i \vec{v}_i(t)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)}_{\vec{j}(\vec{r},t)}\cdot\vec{E}(\vec{r}_i,t)$$

$$= \int d^3\vec{r}\;\vec{j}(\vec{r},t)\cdot\vec{E}(\vec{r},t)$$

Leistungsdichte des Feldes:

$$\nu_{mech}(\vec{r},t) := \vec{j}(\vec{r},t)\cdot\vec{E}(\vec{r},t)$$

$$\overset{MWG(IV)}{=} \frac{1}{\mu_0}\left[\operatorname{rot}\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right]\cdot\vec{E}$$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\cdot\operatorname{rot}\vec{B}$$

Nebenrechnung:

$$\vec{E}\cdot\operatorname{rot}\vec{B} = \vec{B}\cdot\operatorname{rot}\vec{E} - \operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{B}) \qquad \text{(Übung)}$$

$$\overset{MWG(II)}{=} -\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{B})$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}^2 - \operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{B})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{j}\cdot\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2\right) + \operatorname{div}\vec{S} = 0}$$

"Poynting'scher Satz"

mit Poynting-Vektor

$$\boxed{\vec{S} := \vec{E} \times \frac{1}{\mu_0}\vec{B}}$$

Integration (Volumen V):

$$\int_V d^3\vec{r}\; \vec{j}\cdot\vec{E} + \frac{d}{dt}\int_V d^3\vec{r}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2\right) + \oint_{S(V)} d\vec{s}\cdot\vec{S} = 0$$

$$\overset{V\to\infty}{\Longrightarrow} \frac{d}{dt}\left[W_{mech} + \int_V d^3\vec{r}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2\right)\right] = 0$$

falls $\vec{E}$ und $\vec{B}$ im Unendlichen genügend stark abfallen

Energiedichte des elektromagnetischen Feldes:

$$\boxed{w_{em} := \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2}$$

Energiesatz (endl. Volumen V):

$$\boxed{\underbrace{\frac{d}{dt} W_{mech}}_{\substack{\text{Änderung der mech.}\\ \text{Energie der Ladungen}}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \int_V d^3\vec{r}\, w_{em}}_{\substack{\text{Änderung der}\\ \text{Feldenergie}}} + \underbrace{\oint_{S(V)} d\vec{S} \cdot \vec{S}}_{\substack{\text{Energiefluss durch}\\ \text{Oberfläche}}} = 0}$$

Anschauliche Bedeutung:

- Die Energie des elektromagnetischen Feldes ändert sich wenn das Feld Arbeit an Ladungen verrichtet oder wenn Energie durch Oberfläche fließt.

- Der Poynting-Vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \frac{1}{\mu_0}\vec{B}$ beschreibt die Energiestromdichte des Feldes.

  Einheit: $[S] = \frac{J}{m^2 \cdot s}$

3.3.3 Impulserhaltung

Idee: Gesamtimpuls = mechanischer Impuls + Feldimpuls = konst.

Änderung des mechanischen Impulses:

$$\frac{d}{dt}\vec{P}_{mech} = \vec{F} = \sum_i q_i \left[\vec{E}(\vec{r}_i,t) + \vec{v}_i \times \vec{B}(\vec{r}_i,t)\right]$$

$$= \int d^3\vec{r} \left[\rho(\vec{r},t)\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{j}(\vec{r},t) \times \vec{B}(\vec{r},t)\right]$$

Mithilfe der Maxwell-Gleichungen kann man zeigen:

$$\boxed{\underbrace{\frac{d}{dt}\vec{P}_{mech}}_{\text{Änderung des mech. Impulses}} + \underbrace{\frac{d}{dt}\int_V d^3\vec{r}\, \frac{\vec{S}}{c^2}}_{\text{Änderung des Feldimpulses}} \underbrace{- \sum_{k,j=1}^{3} \oint_{S(V)} d\vec{S}\cdot\vec{e}_k T_{kj}\vec{e}_j}_{\text{Impulsfluss durch Oberfläche}} = 0}$$

mit Maxwell'schem Spannungstensor

$$\boxed{T_{kj} := \varepsilon_0\left(E_k E_j - \frac{1}{2}\vec{E}^2\delta_{kj}\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_k B_j - \frac{1}{2}\vec{B}^2\delta_{kj}\right)}$$

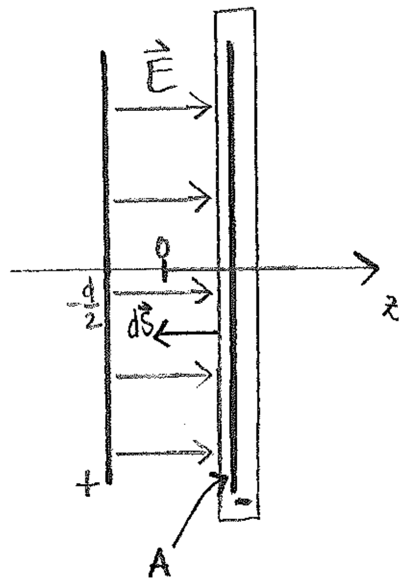
18.11.21

Anschauliche Bedeutung:

- Der Impuls des elektromagnetischen Feldes ändert sich durch Impulsübertrag an Ladungen oder wenn Impuls durch Oberfläche fließt.
- Impulsdichte des Feldes: $\vec{p}_{em} = \frac{\vec{S}}{c^2} \hat{=} \frac{\text{Energiestromdichte}}{c^2}$
- Der Tensor $-T_{kj}$ beschreibt die Impulsstromdichte des Feldes.

  Einheit: $[T] = \frac{N}{m^2}$
- Der Maxwell'sche Spannungstensor T_{kj} beschreibt Kraft pro Flächenelement, welche Feld auf Oberfläche ausübt.

Beispiel (Plattenkondensator):



- Elektrisches Feld (Übung 6):

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{e}_z & -\frac{d}{2} < z < \frac{d}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Magnetfeld: $\vec{B} = 0$

- Poynting-Vektor: $\vec{S} = 0$

- Kraft auf rechte Platte:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{P}_{mech} = \sum_{k,j=1}^{3} \oint_{S(V)} d\vec{S} \cdot \vec{e}_k T_{kj} \vec{e}_j$$

Nebenrechnung:

$$d\vec{S} = dx\,dy\,(-\vec{e}_z)$$

$$(T_{kj}) = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{xy} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{xz} & T_{yz} & T_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0} & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0} \end{pmatrix}$$

für $-\frac{d}{2} < z < \frac{d}{2}$

Also:

$$\vec{F} = \iint_A dx\,dy\,(-\vec{e}_z) \cdot \vec{e}_z T_{zz} \vec{e}_z = -\frac{\sigma^2 A}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z \quad \text{Anziehung}$$

3.4 Elektromagnetische Potentiale

3.4.1 Bestimmungsgleichungen

Maxwell-Gleichungen:

(I) $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$ (III) $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

(II) $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (IV) $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Vektorpotential $\vec{A}$:

$$\boxed{\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} \equiv 0 \quad \checkmark$$

Skalares Potential φ:

$$\boxed{\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rot} \vec{E} = \underbrace{-\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi}_{\equiv 0} - \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\operatorname{rot} \vec{A}}_{= \vec{B}}$$

$$= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \checkmark$$

Maxwell-Gleichungen (II) und (III) automatisch durch Potential-ansätze erfüllt.

Bestimmungsgleichungen für $\vec{A}$ und φ:

$$(\mathrm{I}) \Rightarrow \operatorname{div}\left(-\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho}$$

$$(\mathrm{IV}) \Rightarrow \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \mu_0\vec{j} + \underbrace{\mu_0\varepsilon_0}_{=1/c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$$

$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \vec{\nabla}^2\vec{A}$

$$\Longrightarrow \boxed{\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} - \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\mu_0\vec{j}}$$

Bemerkungen:

- Maxwell-Gleichungen überbestimmt: 8 Gleichungen für 6 Unbekannte.
- Bestimmungsgleichungen für $\vec{A}$ und φ enthalten gleiche Information, aber nur 4 Unbekannte für 4 Gleichungen.
- Lösung für $\vec{A}$ und φ trotzdem nicht eindeutig.

3.4.2 Eichtransformationen

Definition (Eichtransformation):

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r},t) &\longmapsto \vec{A}'(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) + \operatorname{grad}\Lambda(\vec{r},t) \\ \varphi(\vec{r},t) &\longmapsto \varphi'(\vec{r},t) = \varphi(\vec{r},t) - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda(\vec{r},t) \end{aligned}}$$

Eichinvarianz:

$$\vec{B}' = \operatorname{rot}\vec{A}' = \operatorname{rot}(\vec{A} + \operatorname{grad}\Lambda) = \operatorname{rot}\vec{A} = \vec{B} \quad \checkmark$$

$$\vec{E}' = -\operatorname{grad}\varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\operatorname{grad}\left(\varphi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A} + \operatorname{grad}\Lambda\right)$$

$$= -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \vec{E} \quad \checkmark$$

Eichtransformationen lassen Observable invariant.

Eichtransformationen erlauben Vereinfachung der Bestimmungsgleichungen für $\vec{A}$ und φ.

Coulomb-Eichung:

Wähle Λ so, dass $\Delta\Lambda = -\operatorname{div}\vec{A}$, dann ist

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{A}' = \operatorname{div}\vec{A} + \underbrace{\operatorname{div}\operatorname{grad}\Lambda}_{=\Delta\Lambda = -\operatorname{div}\vec{A}} = 0}$$

Bestimmungsgleichungen:

$$\boxed{\begin{aligned} &\Delta\varphi' = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ &\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A}' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi' = -\mu_0\vec{j} \end{aligned}}$$

Bemerkungen:

- In Coulomb-Eichung entspricht skalares Potential Coulomb-Potential.
- Für stationäre Probleme $\left[\frac{\partial}{\partial t}(\varphi', \vec{A}') = 0\right]$ entkoppeln Bestimmungsgleichungen:

$$\Delta\varphi' = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$
$$\Delta\vec{A}' = -\mu_0\vec{j}$$

Lorenz-Eichung:

Wähle Λ so, dass $\Delta\Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2} = -\left(\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$,

dann ist

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi'}{\partial t}} = \operatorname{div}\left(\vec{A} + \operatorname{grad}\Lambda\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda\right)$$

$$= \operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \Delta\Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2}$$

$$\boxed{= 0}$$

Bestimmungsgleichungen:

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi' &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A}' &= -\mu_0\vec{j} \end{aligned}}$$

Bemerkungen:

- In Lorenz-Eichung entkoppeln Bestimmungsgleichungen vollständig.
- Bestimmungsgleichungen: inhomogene Wellengleichungen
- Lorentzkovarianz:

$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu A'^\sigma = \mu_0 j^\sigma$ mit $\mu,\nu,\sigma = 0,1,2,3$ (Summenkonvention über doppelt auftretende Indizes!)

wobei

$$(\partial_\mu) := \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$$ 4-er-Ableitung

$$(A^\mu) := \left(\frac{1}{c}\varphi, \vec{A}\right)$$ 4-er-Potential

$$(j^\mu) := \left(c\rho, \vec{j}\right)$$ 4-er-Stromdichte

$$(\eta^{\mu\nu}) := \begin{pmatrix} +1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$ Minkowski-Metrik

(siehe Kapitel 9)

25.11.21