7 Erzeugung elektromagnetischer Wellen

7.1 Potentiale zeitabhängiger Ladungs- und Stromverteilungen

Bestimmungsgleichungen für Potentiale:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi(\vec{r},t) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r},t)$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A}(\vec{r},t) = -\mu_0\vec{j}(\vec{r},t)$$

in Lorenzeichung $\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\varphi = 0$

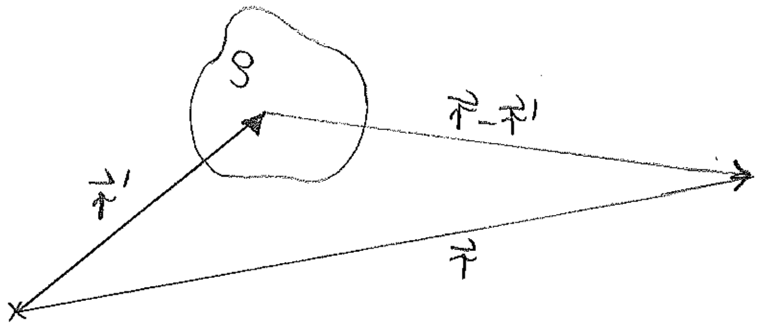
Allgemeine Lösung:

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi(\vec{r},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\vec{r}\,'\ \frac{\rho\left(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \\ \vec{A}(\vec{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\vec{r}\,'\ \frac{\vec{j}\left(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\end{aligned}}$$

Bemerkungen:

- Für $\rho(\vec{r},t) \equiv \rho(\vec{r})$ und $\vec{j}(\vec{r},t) = \vec{j}(\vec{r})$ zeitunabhängig ergeben sich bekannte Lösungen der Elektro- und Magnetostatik

- Potentiale zum Zeitpunkt t bestimmt durch Ladungs- und Stromverteilung zum früheren Zeitpunkt $t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$:
„Retardierung" (Laufzeit des Signals)



Retardierungszeit:
$|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c$

7.2 Hertzscher Dipol

Zeitabhängiger elektrischer Dipol:

$$\varrho_D(\vec{r},t) = \lim_{\substack{d\to 0 \\ q\to\infty \\ p=q\cdot d=\text{konst}}} q\left[\delta(\vec{r}-\tfrac{1}{2}\vec{d}(t)) - \underbrace{\delta(\vec{r}+\tfrac{1}{2}\vec{d}(t))}_{\delta(\vec{r})+\frac{1}{2}\vec{d}(t)\cdot\vec{\nabla}\delta(\vec{r})+\mathcal{O}(d^2)}\right]$$

$$= \lim_{\substack{d\to 0 \\ q\to\infty \\ p=q\cdot d=\text{konst}}} \left(-q\vec{d}(t)\right)\cdot\vec{\nabla}\delta(\vec{r})$$

$$= -\vec{p}(t)\cdot\vec{\nabla}\delta(\vec{r})$$

Kontinuitätsgleichung:

$$0 = \underbrace{\frac{\partial \rho_D}{\partial t}}_{= -\frac{\partial \vec{p}}{\partial t}\cdot\vec{\nabla}\delta(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\cdot\left(\dot{\vec{p}}\,\delta(\vec{r})\right)} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_D$$

$$\Rightarrow \quad \vec{j}_D(\vec{r},t) = \dot{\vec{p}}(t)\,\delta(\vec{r}) \qquad \left[\text{da } \vec{j}_D \overset{!}{=} 0 \text{ falls } \dot{\vec{p}} = 0\right]$$

Vektorpotential:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\vec{r}\,' \frac{\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)\delta(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}$$

Skalares Potential:

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\vec{r}\,' \frac{-\vec{p}\left(t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)\cdot\vec{\nabla}_{r'}\delta(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\vec{r}\,'\,\delta(\vec{r}\,')\underbrace{\vec{\nabla}_{\vec{r}\,'}\cdot\frac{\vec{p}\left(t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}_{-\vec{\nabla}_{\vec{r}}\cdot\frac{\vec{p}\left(t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\,\frac{\vec{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}$$

Magnetische Flussdichte:

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r},t)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\ddot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c})}{c\,r} + \frac{\dot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c})}{r^2}\right] \times \vec{e}_r$$

Elektrisches Feld:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\operatorname{grad}\varphi(\vec{r},t) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{c^2 r}\left(\vec{e}_r(\ddot{\vec{p}}\cdot\vec{e}_r) - \ddot{\vec{p}}\right)\right.$$

$$+ \frac{1}{c\,r^2}\left(3\vec{e}_r(\dot{\vec{p}}\cdot\vec{e}_r) - \dot{\vec{p}}\right)$$

$$\left. + \frac{1}{r^3}\left(3\vec{e}_r(\vec{p}\cdot\vec{e}_r) - \vec{p}\right)\right]$$

mit $\vec{p} = \vec{p}(t-\frac{r}{c})$

Bemerkungen:

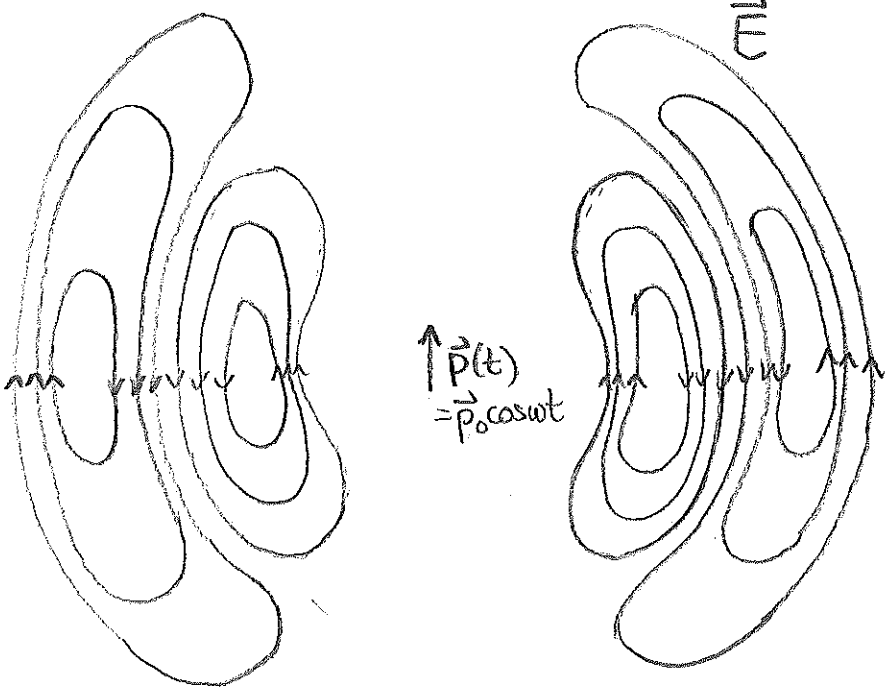
- Statischer Dipol ($\dot{\vec{p}} \equiv 0$): $\vec{B} \equiv 0$, $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left(3\vec{e}_r(\vec{p}\cdot\vec{e}_r) - \vec{p}\right)$

- Fernfeld ($r \gg \lambda = \frac{2\pi}{k}$):

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi c r}\,\ddot{\vec{p}}(t-\tfrac{r}{c}) \times \vec{e}_r + \mathcal{O}(\tfrac{1}{r^2}) \\ \vec{E}(\vec{r},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\left[3\vec{e}_r\left(\ddot{\vec{p}}(t-\tfrac{r}{c})\cdot\vec{e}_r\right) - \ddot{\vec{p}}(t-\tfrac{r}{c})\right] + \mathcal{O}(\tfrac{1}{r^2}) \\ &= c\,\vec{B}(\vec{r},t)\times\vec{e}_r + \mathcal{O}(\tfrac{1}{r^2}) \end{aligned}}$$

Hertz'scher Dipol strahlt Kugelwellen mit Amplitude $\sim \frac{|\ddot{\vec{p}}|}{r}$ ab, die sich lokal wie ebene Wellen verhalten

Beispiel (harmonisch oszillierender Dipol):



Energieabstrahlung:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

$$= \frac{c}{\mu_0} (\vec{B} \times \vec{e}_r) \times \vec{B} \qquad \text{im Fernfeld } |\vec{r}| \gg \lambda$$

$$= \frac{c}{\mu_0} \vec{B}^2 \vec{e}_r$$

$$= \frac{c}{\mu_0} \frac{\mu_0^2}{(4\pi c)^2} \frac{1}{r^2} (\ddot{\vec{p}} \times \vec{e}_r)^2 \vec{e}_r$$

$$= \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2 \sin^2\vartheta}{r^2} \vec{e}_r \qquad \text{mit } \vartheta = \sphericalangle(\ddot{\vec{p}}, \vec{e}_r)$$

keine Strahlung in Richtung von $\ddot{\vec{p}}$!

Strahlungsleistung:

$$P(t) = \oint_{\substack{\text{Kugeloberfläche} \\ \text{Radius } R \gg \lambda}} d\vec{S} \cdot \vec{S}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \, R^2 \sin\vartheta \, \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2 \sin^2\vartheta}{R^2}$$

$$= \frac{\mu_0}{6\pi c} |\ddot{\vec{p}}|^2$$

Beispiel (harmonisch oszillierender Dipol):

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \cos \omega t$$

$$\ddot{\vec{p}}(t) = -\omega^2 \vec{p}_0 \cos \omega t$$

$$P(t) = \frac{\mu_0}{6\pi c} p_0^2 \omega^4 \cos^2\left(\omega\left(t - \frac{R}{c}\right)\right)$$

Mittlere Strahlungsleistung:

$$\overline{P} = \frac{\mu_0 p_0^2}{12\pi c} \omega^4$$

Wirkungsquerschnitt (Rayleigh-Streuung):

$\sigma(\omega) \sim \omega^4$, darum ist der Himmel blau!