9 Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

Bestimmungsgleichungen für Potentiale:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)}_{\left(\frac{1}{c}\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z\right)\begin{pmatrix}+1 & & & 0\\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{c}\partial_t\\ \partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}\varphi/c\\ A_x\\ A_y\\ A_z\end{pmatrix} = \mu_0\begin{pmatrix}c\rho\\ j_x\\ j_y\\ j_z\end{pmatrix}$$

Viererveltor:

$$(x^\mu) := (ct, x, y, z) \qquad \mu = 0,1,2,3$$

Viererableitung:

$$(\partial_\mu) := \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) = \left(\frac{1}{c}\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z\right)$$

Viererpotential:

$$(A^\mu) := \left(\frac{1}{c}\varphi, A_x, A_y, A_z\right)$$

Viererstromdichte:

$$(j^\mu) := \left(c\rho, j_x, j_y, j_z\right)$$

Minkowski-Metrik:

$$(\eta^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} +1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \qquad \mu,\nu = 0,1,2,3$$

Bestimmungsgleichungen:

$$\boxed{\sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu A^\lambda = \mu_0 j^\lambda} \qquad \lambda = 0,1,2,3$$

Lorenzeichung:

$$\sum_{\mu=0}^{3} \partial_\mu A^\mu = 0$$

Feldstärketensor:

$$(F^{\mu\nu}) := \left(\sum_{\lambda=0}^{3} \left[\eta^{\mu\lambda} \partial_\lambda A^\nu - \eta^{\nu\lambda} \partial_\lambda A^\mu \right] \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{antisymmetrisch}$$

Maxwell-Gleichungen in kovarianter Form:

$$\boxed{\begin{aligned} &\sum_{\mu=0}^{3} \partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu \\ &\sum_{\sigma=0}^{3} \left(\eta^{\mu\sigma} \partial_\sigma F^{\nu\lambda} + \eta^{\nu\sigma} \partial_\sigma F^{\lambda\mu} + \eta^{\lambda\sigma} \partial_\sigma F^{\mu\nu} \right) = 0 \end{aligned}}$$

Bemerkungen:

- Viererschreibweise macht Invarianz unter Lorentztransformationen sichtbar: $(x^\mu) \mapsto \left(\sum_\nu \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu\right)$ mit $\sum_{\lambda,\sigma} \Lambda^\lambda{}_\mu \eta_{\lambda\sigma} \Lambda^\sigma{}_\nu = \eta_{\mu\nu}$
- Viererschreibweise erlaubt „natürliche" Verallgemeinerungen: Quantenelektrodynamik, Allgemeine Relativitätstheorie