

3 Grundgleichungen der Elektrodynamik

15

3.1 Maxwell-Gleichungen in Differentialform

Maxwell-Gleichungen (mikroskopisch):

$$(I) \quad \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t)$$

$$(II) \quad \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t)$$

$$(III) \quad \operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$$

$$(IV) \quad \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t)$$

mit

$$\epsilon_0 = 8.854 \dots \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

"Permittivität des Vakuums"

$$\mu_0 = 1.256 \dots \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

"Permeabilität des Vakuums"

sodass

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c = 2.99792458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{exakt} \quad (\text{Lichtgeschwindigkeit})$$

In Worten :

- (I) Elektrische Ladungen sind die Quellen des elektrischen Feldes.
- (II) Zeitlich veränderliche Magnetfelder erzeugen elektrische Wirbelfelder.
- (III) Magnetfelder sind quellenfrei.
- (IV) Elektrische Ströme und zeitlich veränderliche elektrische Felder erzeugen magnetische Wirbelfelder.

Bewertungen:

- In Maxwell-Gleichungen erscheinen Ladungs- und Stromdichte als Ursache des Feldes, durch Lorentzkraft wirken Felder auf Bewegung der Ladungen zurück.
- Zusammen mit Bewegungsgleichungen und Lorentzkraft stellen Maxwell-Gleichungen Grundgleichungen der Elektrodynamik dar, aus der alle relevanten Aussagen abgeleitet werden.
- Es gibt weitere Beziehungen zwischen ρ , \vec{j} , \vec{E} und \vec{B} die nicht aus Maxwell-Gleichungen ableitbar sind.

Beispiel: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ "Ohm'sches Gesetz"

↑
Leitfähigkeitstensor

- Mikroskopische Maxwell-Gleichungen universell gültig, aber in Materie oft sinnvoll zu makroskopischen Maxwell-Gleichungen für dielektrische Verschiebung $\vec{D} := \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ und magnetische Feldstärke $\vec{H} := \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$ überzugehen (Kap. 8)

3.2 Maxwell-Gleichungen in Integralform

(18)

(I) Gauß'sches Durchflutungsgesetz:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad \left| \int_V d^3\vec{r} \right.$$

$$\Rightarrow \int_V d^3\vec{r} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3\vec{r} \rho$$

Satz von
Gauß

$$\oint_{S(V)} d\vec{S} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_V$$

Elektrischer Fluss durch geschlossene Oberfläche proportional zur eingeschlossenen Ladung

Anwendung: Berechnung von $\vec{E}(\vec{r})$ für symmetrische $\rho(\vec{r})$

Beispiel (geladener dünner Stab):

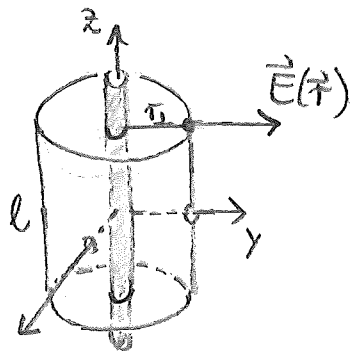
$$\text{Ladungsdichte: } \rho(\vec{r}) = \lambda \delta(x) \delta(y)$$

$$\text{Symmetrie: } \vec{E}(\vec{r}) = E(r_\perp) \vec{e}_\perp$$

$$\text{Damit: } \frac{1}{\epsilon_0} Q_V = \oint_{S(V)} d\vec{S} \cdot \vec{E}$$

$$\frac{1}{\epsilon_0} \lambda l = \int_{S(V)} d\vec{S} \cdot \vec{e}_\perp E(r_\perp)$$

$$= \int_{-\ell/2}^{\ell/2} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \, r_\perp \vec{e}_\perp \cdot \vec{e}_\perp E(r_\perp)$$



$$\downarrow$$

$$= 2\pi r \tau_{\perp} E(r_{\perp})$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{\perp}} \vec{e}_{\perp} \quad (\text{vgl. Übung 3.3})$$

(II) Faraday'sches Induktionsgesetz:

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad \Big| \int_S d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \int_S d\vec{S} \cdot \text{rot } \vec{E} = - \int_S d\vec{S} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Satz von Stokes \Rightarrow

$$\oint_{\mathcal{C}(S)} d\vec{r} \cdot \vec{E} = - \int_S d\vec{S} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

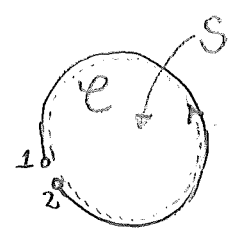
Bewertung (elektr. Spannung): Wegintegral

$$U_{\mathcal{C}} := \int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{E}$$

kann als Spannung zwischen Endpunkten von konstantem \mathcal{C} gemessen werden

Beispiel (Leiterschleife in veränderlichem Magnetfeld):

$$\begin{aligned}
 U_{12}^{ind} &= \int_1^2 d\vec{r} \cdot \vec{E} \\
 &= \oint_C d\vec{r} \cdot \vec{E} \quad (\vec{E} = 0 \text{ im Leiter}) \\
 &= - \int_S d\vec{S} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
 &\stackrel{S \text{ fest}}{=} - \frac{d}{dt} \int d\vec{S} \cdot \vec{B}
 \end{aligned}$$



$$U_{12}^{ind} = - \frac{d}{dt} \Phi \Big|_{S=\text{konst.}} \quad \text{mit}$$

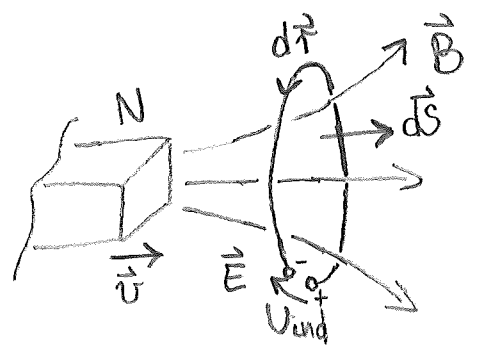
$$\Phi := \int_S d\vec{S} \cdot \vec{B}$$

"Faradaysches Feldinduktionsgesetz"

"magnetischer Fluss"

Bemerkungen:

- Elektromagnetische Induktion 1831 von Faraday entdeckt
- Fundamentale technische Bedeutung: Elektromotoren, Generatoren, Transformatoren
- $d\vec{S}$ und $d\vec{r}$ bilden "Rechtsschraube":

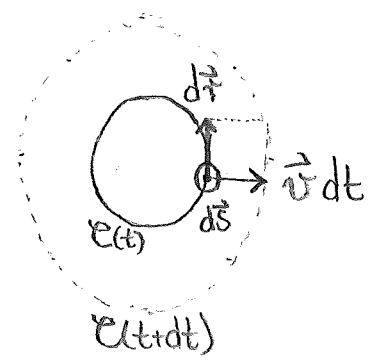


- Lenz'sche Regel : Wirkung des induzierten elektrischen entgegen Ursache gerichtet

- Relativitätsprinzip : Induzierte Spannung nur von Relativbewegung Leiterschleife - Magnet abhängig

Beispiel (bewegte Leiterschleife)

Flächenänderung: $d\vec{S} = \vec{v} dt \times d\vec{r}$



Flussänderung:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_{B=\text{konst}} &= \int_{\Delta S} d\vec{S} \cdot \vec{B} \\
 &= \oint_C (\vec{v} dt \times d\vec{r}) \cdot \vec{B} \\
 &= \oint_C d\vec{r} \cdot (\vec{B} \times \vec{v} dt) \\
 &= - dt \oint_C d\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})
 \end{aligned}$$

Induzierte Spannung:

$$U_{12}^{\text{ind}} = - \left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_{B=\text{konst.}} = \oint_C d\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

Faraday'sches Induktionsgesetz:

$$U_{12}^{ind} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_S d\vec{S} \cdot \vec{B} = \oint_{\mathcal{C}(S)} d\vec{r} \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

3.11.22

Bemerkungen:

- Induzierte Spannung Folge der Kraft $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ auf Ladungen q

- Elektrisches Feld im mit \mathcal{C} bewegten Bezugssystem:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \quad \text{für } v \ll c$$

- Geschlossene ideale Leiterschleife:

$$0 = U^{ind} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Flussänderung wird durch induzierten Strom verhindert

- Reale Leiterschleife:

$$U^{ind} = R I^{ind}$$

- Kraft auf bewegte Leiterschleife (inhomogenes, zeitlichabhängiges \vec{B}):

$$\vec{F} = \oint_{\mathcal{C}} d\vec{F} = \oint_{\mathcal{C}} dq \underbrace{\vec{u}}_{\substack{\text{Bezugssystem der Schleife} \\ \frac{d\vec{r}}{dt}}} \times \vec{B} = \oint_{\mathcal{C}} d\vec{r} \times \vec{B} \frac{dq}{dt} = I^{ind} \oint_{\mathcal{C}} d\vec{r} \times \vec{B}$$

(III) Nichtexistenz magnetischer Ladungen:

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \left| \int_{\mathcal{V}} d^3\vec{r} \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_{S(\mathcal{V})} d\vec{S} \cdot \vec{B} = 0}$$

Magnetischer Fluss durch geschlossene Oberfläche null

Folgerungen:

- \vec{B} -Feld hat keine Quellen oder Senken
- \vec{B} -Feldlinien immer geschlossen ("Wirbelfeld")

(IV) Ampère'sches Durchflutungsgesetz:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \left| \int_S d\vec{S} \cdot \right.$$

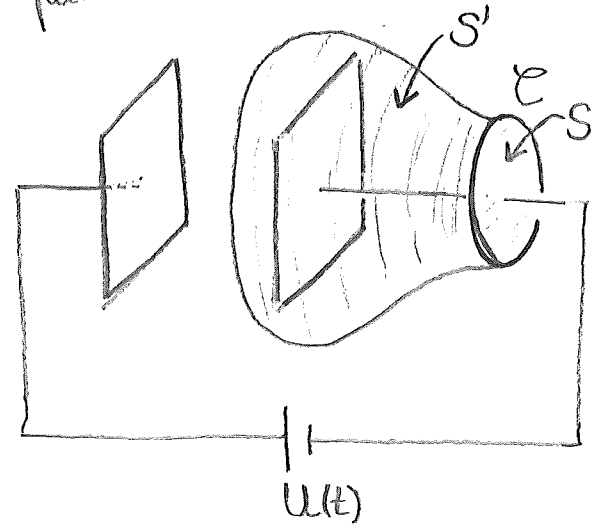
$$\Rightarrow \boxed{\oint_{e(S)} d\vec{r} \cdot \vec{B} = \mu_0 \int_S d\vec{S} \cdot \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \int_S d\vec{S} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

Beurteilungen (Verschiebungsstrom):

- Ursprüngliche Form des Ampère'schen Durchflutungsgesetzes

$$\oint_{\mathcal{C}(S)} d\vec{r} \cdot \vec{B} = \mu_0 \int_S d\vec{S} \cdot \vec{j} = \mu_0 I_S$$

unvollständig für nichtstationäre Ströme:



$\mathcal{C}(S) = \mathcal{C}(S')$, aber $I_S \neq I_{S'} = 0$

- Lösung durch Maxwell: Verschiebungsstrom

$$\vec{j}_v = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

sodass $\oint_{\mathcal{C}(S)} d\vec{r} \cdot \vec{B} = \mu_0 \int_S d\vec{S} \cdot (\vec{j} + \vec{j}_v)$ unabhängig von Wahl von S zu gegebenem $\mathcal{C}(S)$

- Ohne \vec{j}_v keine Ladungserhaltung (Kap. 3.3) und keine elektromagnetischen Wellen (Kap. 6)

3.3 Bilanzgleichungen

3.3.1 Ladungserhaltung

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \quad \left| \operatorname{div}(-) \right.$$

$$\Rightarrow \underbrace{\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B}}_{=0} = \mu_0 \operatorname{div} \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\operatorname{div} \vec{E}}_{\frac{1}{\epsilon_0} \rho}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) + \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}, t) = 0} \quad \text{"Kontinuitätsgleichung"}$$

Integralform (festes Volumen V):

$$\int_V d^3\vec{r} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \int_V d^3\vec{r} \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

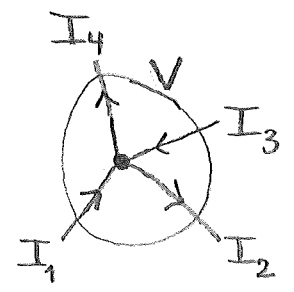
$$\stackrel{V \text{ fest}}{\Rightarrow} \stackrel{\text{Gauß}}{\frac{d}{dt}} \int_V d^3\vec{r} \rho + \int_{S(V)} d\vec{S} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} Q_V = - I_{S(V)}} \quad \text{"Ladungserhaltung"}$$

Interpretation: Die Ladung in einem Volumen kann sich nur ändern, indem ein Strom durch die Oberfläche des Volumens fließt.

Beispiel (1. Kirchhoff'sches Gesetz):

Stationärer Strom durch Knoten



$$\sum_e I_e = 0 \quad \text{"Knotenregel"}$$

3.3.2 Energieerhaltung

Idee: Gesamtenergie = mechanische Energie + Feldenergie = konst.

Mechanische Energie (Punktladungen q_i bei $\vec{r}_i, i=1, \dots, N$):

$$\begin{aligned} dW_{\text{mech}} &= \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i \\ &= \sum_i q_i \left[\vec{E}(\vec{r}_i, t) + \underbrace{\vec{v}_i \times \vec{B}(\vec{r}_i, t)}_{\frac{d\vec{r}_i}{dt}} \right] \cdot d\vec{r}_i \\ &= \sum_i q_i \vec{E}(\vec{r}_i, t) \cdot d\vec{r}_i \end{aligned}$$

Magnetisches Feld leistet keine Arbeit, da $\vec{F} \perp d\vec{r}_i$

Leistung des Feldes an Ladungen:

(27)

$$P = \frac{dW_{\text{mech}}}{dt} = \sum_i q_i \vec{E}(\vec{r}_i, t) \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} \quad \left| \cdot 1 = \int d^3\vec{r} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \right.$$

$$= \int d^3\vec{r} \underbrace{\sum_i q_i \vec{v}_i(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)}_{\vec{j}(\vec{r}, t)} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)$$

$$= \int d^3\vec{r} \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)$$

10.11.22 ?

Leistungsdichte des Feldes:

$$v_{\text{mech}}(\vec{r}, t) := \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)$$

$$\stackrel{\text{MWG(IV)}}{=} \frac{1}{\mu_0} \left[\text{rot } \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \cdot \vec{E}$$

$$= -\frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{B}$$

Nebenrechnung:

$$\vec{E} \cdot \text{rot } \vec{B} = \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{E} - \text{div}(\vec{E} \times \vec{B}) \quad (\text{Übung})$$

$$\stackrel{\text{MWG(II)}}{=} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \text{div}(\vec{E} \times \vec{B})$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}^2 - \text{div}(\vec{E} \times \vec{B})$$

$$\Rightarrow \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) + \text{div} \vec{S} = 0$$

"Poynting'scher Satz"

mit Poynting-Vektor

$$\vec{S} := \vec{E} \times \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$$

Integration (Volumen V):

$$\int_V d^3\vec{r} \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{d}{dt} \int_V d^3\vec{r} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) + \oint_{S(V)} d\vec{s} \cdot \vec{S} = 0$$

$$\xrightarrow{V \rightarrow \infty} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[W_{\text{mech}} + \int_V d^3\vec{r} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) \right] = 0$$

falls \vec{E} und \vec{B} im Unendlichen genügend stark abfallen

Energiedichte des elektromagnetischen Feldes:

$$w_{\text{em}} := \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$$

Energiesatz (endl. Volumen V):

$$\frac{d}{dt} W_{\text{wech}} + \frac{d}{dt} \int_V d^3\vec{r} w_{\text{em}} + \oint_{S(V)} d\vec{S} \cdot \vec{S} = 0$$

Änderung des wech.
Energie der Ladungen

Änderung der
Feldenergie

Energiefluss durch
Oberfläche

Anschauliche Bedeutung:

- Die Energie des elektromagnetischen Feldes "äußert sich" wenn das Feld Arbeit an Ladungen verrichtet oder wenn Energie durch Oberfläche fließt.
- Der Poynting-Vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$ beschreibt die Energiestromdichte des Feldes.

Einheit: $[S] = \frac{J}{m^2 \cdot s}$

3.3.3 Impulserhaltung

Idee: Gesamtimpuls = mechanischer Impuls + Feldimpuls = konst.

Änderung des mechanischen Impulses:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{P}_{\text{mech}} &= \vec{F} = \sum_i q_i \left[\vec{E}(\vec{r}_i, t) + \vec{v}_i \times \vec{B}(\vec{r}_i, t) \right] \\ &= \int d^3\vec{r} \left[\rho(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{j}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right] \end{aligned}$$

Mithilfe der Maxwell-Gleichungen kann man zeigen:

$$\frac{d}{dt} \vec{P}_{\text{mech}} + \frac{d}{dt} \int_V d^3\vec{r} \frac{\vec{S}}{c^2} - \sum_{k,j=1}^3 \oint_{\partial V} d\vec{S} \cdot \vec{e}_k T_{kj} \vec{e}_j = 0$$

Änderung des
wech. Impulses

Änderung des
Feldimpulses

Impulsfluss durch
Oberfläche

mit Maxwell'schem Spannungstensor

$$T_{kj} := \epsilon_0 \left(E_k E_j - \frac{1}{2} \vec{E}^2 \delta_{kj} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_k B_j - \frac{1}{2} \vec{B}^2 \delta_{kj} \right)$$

Anschauliche Bedeutung:

- Der Impuls des elektromagnetischen Feldes "äußert" sich durch Impulsübertrag auf Ladungen oder wenn Impuls durch Oberfläche fließt.

- Impulsdichte des Feldes: $\vec{P}_{\text{em}} = \frac{\vec{S}}{c^2} \approx \frac{\text{Energiedichte}}{c^2}$

- Der Tensor $-T_{kj}$ beschreibt die Impulsstromdichte des Feldes.

Einheit: $[T] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

- Der Maxwell'sche Spannungstensor T_{kj} beschreibt Kraft pro Flächenelement, welche Feld auf Oberfläche ausübt.

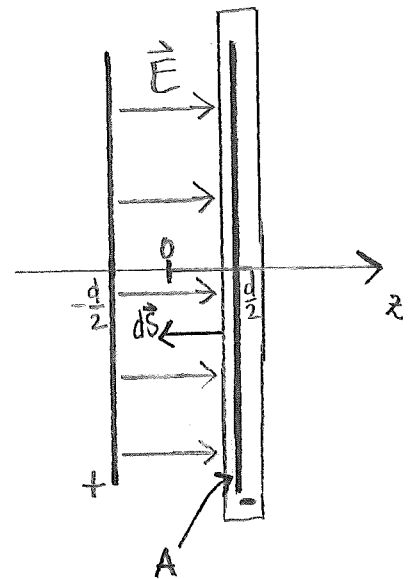
Beispiel (Plattenkondensator):

- Elektrisches Feld (Übung 2):

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z & -\frac{d}{2} < z < \frac{d}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Magnetfeld: $\vec{B} = 0$

- Poynting-Vektor: $\vec{S} = 0$



• Kraft auf rechte Platte:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{P}_{\text{mech}} = \sum_{k,j=1}^3 \int_{S(V)} d\vec{S} \cdot \vec{e}_k T_{kj} \vec{e}_j$$

Nebenrechnung:

$$d\vec{S} = dx dy (-\vec{e}_z)$$

$$(T_{kj}) = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{xy} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{xz} & T_{yz} & T_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} \end{pmatrix}$$

für $-\frac{d}{2} < z < \frac{d}{2}$

Also:

$$\vec{F} = \iint_A dx dy (-\vec{e}_z) \cdot \vec{e}_z T_{zz} \vec{e}_z = -\frac{\sigma^2 A}{2 \epsilon_0} \vec{e}_z \quad \text{Anziehung}$$

17.11.22 ↓

3.4 Elektromagnetische Potentiale

3.4.1 Bestimmungsgleichungen

Maxwell-Gleichungen:

$$(I) \operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$(III) \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$(II) \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(IV) \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Vektorpotential \vec{A} :

$$\boxed{\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}} \Leftrightarrow \operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} \equiv 0 \quad \checkmark$$

Skalares Potential φ :

$$\boxed{\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \Leftrightarrow \operatorname{rot} \vec{E} = \underbrace{-\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi}_{\equiv 0} - \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\operatorname{rot} \vec{A}}_{=\vec{B}}$$

$$= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \checkmark$$

Maxwell-Gleichungen (II) und (III) automatisch durch Potentialausätze erfüllt.

Bestimmungsgleichungen für \vec{A} und φ :

(34)

$$(I) \Rightarrow \operatorname{div} \left(-\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho}$$

$$(IV) \Rightarrow \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \mu_0 \vec{j} + \underbrace{\mu_0 \epsilon_0}_{=1/c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) =$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} - \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \mu_0 \vec{j}}$$

Bemerkungen:

- Maxwell-Gleichungen überbestimmt: 8 Gleichungen für 6 Unbekannte.
- Bestimmungsgleichungen für \vec{A} und φ enthalten gleiche Information, aber nur 4 Unbekannte für 4 Gleichungen.
- Lösung für \vec{A} und φ trotzdem nicht eindeutig.

3.4.2 Eichtransformationen

Definition (Eichtransformation):

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \mapsto \vec{A}'(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, t) + \text{grad } \Lambda(\vec{r}, t)$$

$$\varphi(\vec{r}, t) \mapsto \varphi'(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \Lambda(\vec{r}, t)$$

Eichinvarianz:

$$\vec{B}' = \text{rot } \vec{A}' = \text{rot}(\vec{A} + \text{grad } \Lambda) = \text{rot } \vec{A} = \vec{B} \quad \checkmark$$

$$\vec{E}' = -\text{grad } \varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\text{grad}(\varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}) - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{A} + \text{grad } \Lambda)$$

$$= -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E} \quad \checkmark$$

Eichtransformationen lassen Observable invariant.

Eichtransformationen erlauben Vereinfachung der Bestimmungsgleichungen für \vec{A} und φ .

Coulomb-Eichung:

Wähle Λ so, dass $\Delta \Lambda = -\text{div} \vec{A}$, dann ist

$$\boxed{\text{div} \vec{A}' = \text{div} \vec{A} + \underbrace{\text{div grad} \Lambda}_{= \Delta \Lambda = -\text{div} \vec{A}} = 0}$$

Bestimmungsgleichungen:

$$\Delta \Psi' = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{A}' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad} \Psi' = -\mu_0 \vec{j}$$

Bemerkungen:

- In Coulomb-Eichung entspricht skalares Potential Coulomb-Potential.
- Für stationäre Probleme $\left[\frac{\partial}{\partial t}(\Psi', \vec{A}') = 0\right]$ entkoppeln

Bestimmungsgleichungen:

$$\Delta \Psi' = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\Delta \vec{A}' = -\mu_0 \vec{j}$$

Lorenz-Eichung:

Wähle Λ so, dass $\Delta\Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = -\left(\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)$,

dann ist

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = \operatorname{div} (\vec{A} + \operatorname{grad} \Lambda) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right)}$$

$$= \operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Delta\Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2}$$

$$\boxed{= 0}$$

Bestimmungsgleichungen:

$$\boxed{\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi' = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho}$$

$$\boxed{\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A}' = -\mu_0 \vec{j}}$$

Bemerkungen:

- In Lorenz-Eichung entkoppeln Bestimmungsgleichungen vollständig.

- Bestimmungsgleichungen: inhomogene Wellengleichungen

- Lorentzkovarianz:

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu A'^{\sigma} = \mu_0 j^{\sigma} \quad \text{mit } \mu, \nu, \sigma = 0, 1, 2, 3 \quad (\text{Summenkonvention über doppelt auftretende Indizes!})$$

wobei

$$(\partial_\mu) := \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right)$$

4-er-Ableitung

$$(A^\mu) := \left(\frac{1}{c} \varphi, \vec{A} \right)$$

4-er-Potential

$$(j^\mu) := \left(c \rho, \vec{j} \right)$$

4-er-Stromdichte

$$(\eta^{\mu\nu}) := \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

Minkowski-Metrik

(siehe Kapitel 9)

24.11.22

