

7 Erzeugung elektromagnetischer Wellen

7.1 Potentiale zeitabhängiger Ladungs- und Stromverteilungen

Bestimmungsgleichungen für Potentiale:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \varphi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t)$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{A}(\vec{r}, t) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t)$$

im Lorenzbezug $\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi = 0$

Allgemeine Lösung:

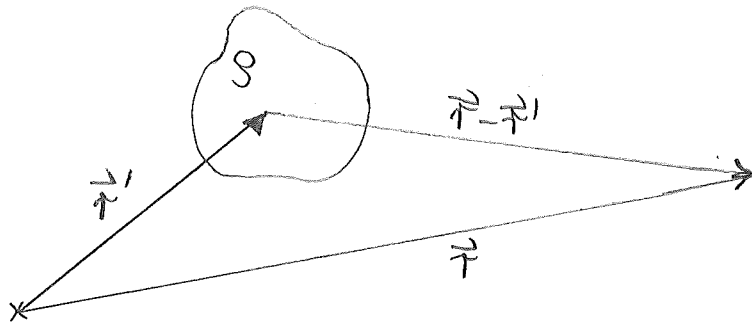
$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Bemerkungen:

- Für $\rho(\vec{r}, t) \equiv \rho(\vec{r})$ und $\vec{j}(\vec{r}, t) \equiv \vec{j}(\vec{r})$ zeitunabhängig ergeben sich bekannte Lösungen der Elektro- und Magnetostatik

- Potentiale zum Zeitpunkt t bestimmt durch Ladungs- und Stromverteilung zum früheren Zeitpunkt $t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$:
„Retardierung“ (Laufzeit des Signals)



Retardierungszeit:
 $|\vec{r} - \vec{r}'|/c$

7.2 Hertzscher Dipol

Zeitabhängiger elektrischer Dipol:

$$S_D(\vec{r}, t) = \lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ q \rightarrow \infty \\ p = q \cdot d = \text{konst}}} q \left[\delta(\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{d}(t)) - \delta(\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{d}(t)) \right]$$

$$\delta(\vec{r}) + \frac{1}{2}\vec{d}(t) \cdot \vec{\nabla} \delta(\vec{r}) + O(d^2)$$

$$= \lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ q \rightarrow \infty \\ p = q \cdot d = \text{konst}}} (-q\vec{d}(t)) \cdot \vec{\nabla} \delta(\vec{r})$$

$$= -\vec{p}(t) \cdot \vec{\nabla} \delta(\vec{r})$$

Kontinuitätsgleichung:

(75)

$$0 = \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_0$$

$$= - \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \cdot \vec{\nabla} \delta(\vec{r}) = - \vec{\nabla} \cdot (\dot{\vec{p}} \delta(\vec{r}))$$

$$\Rightarrow \vec{j}_0(\vec{r}, t) = \dot{\vec{p}}(t) \delta(\vec{r}) \quad [\text{da } \vec{j}_0 \stackrel{!}{=} 0 \text{ falls } \dot{\vec{p}} = 0]$$

Vektorpotential:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 \vec{r}' \frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}) \delta(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})}{r}$$

Skalares Potential:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 \vec{r}' \frac{-\dot{\vec{p}}(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}) \cdot \vec{\nabla}' \delta(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 \vec{r}' \delta(\vec{r}') \underbrace{\vec{\nabla}' \cdot \frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{-\vec{\nabla}' \cdot \frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}$$

$$= - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \cdot \frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})}{r}$$

Magnetische Flussdichte:

(76)

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}, t)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})}{c r} + \frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})}{r^2} \right] \times \vec{e}_r$$

Elektrisches Feld:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\text{grad } \varphi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{c^2 r} (\vec{e}_r (\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{e}_r) - \ddot{\vec{p}}) \right. \\ \left. + \frac{1}{c r^2} (3\vec{e}_r (\dot{\vec{p}} \cdot \vec{e}_r) - \dot{\vec{p}}) \right. \\ \left. + \frac{1}{r^3} (3\vec{e}_r (\vec{p} \cdot \vec{e}_r) - \vec{p}) \right]$$

mit $\vec{p} = \vec{p}(t - \frac{r}{c})$

Bemerkungen:

- Statischer Dipol ($\dot{\vec{p}}=0$): $\vec{B} \equiv 0$, $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (3\vec{e}_r(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) - \vec{p})$ ✓
- Fernfeld ($r \gg \lambda = \frac{2\pi}{k}$):

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c r} \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{e}_r + O(\frac{1}{r^2})$$

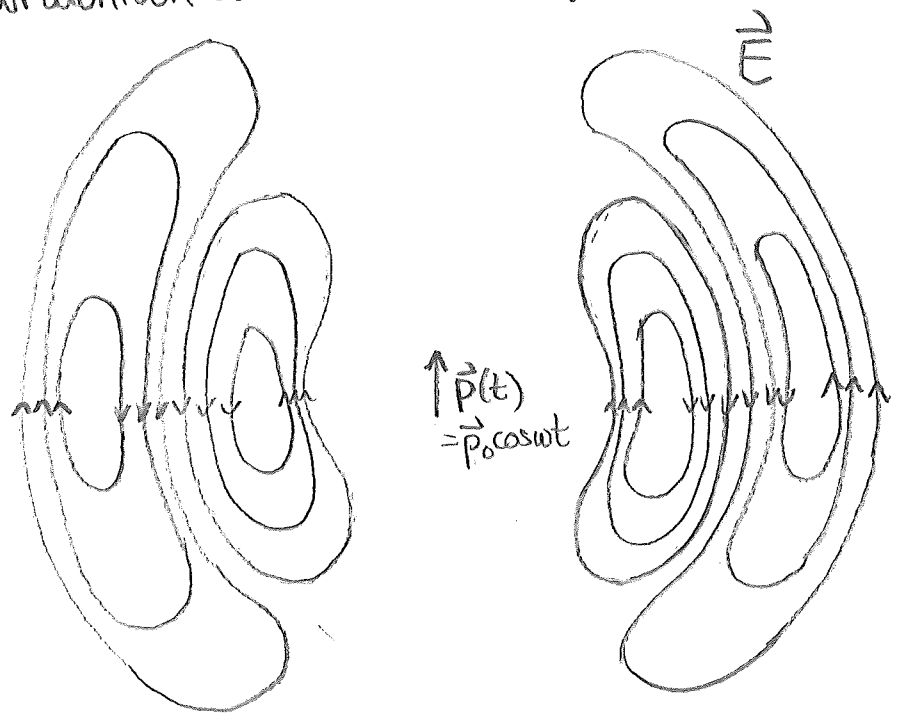
$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} [\vec{e}_r(\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \cdot \vec{e}_r) - \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})] + O(\frac{1}{r^2})$$

$$= c \vec{B}(\vec{r}, t) \times \vec{e}_r + O(\frac{1}{r^2})$$

Hertz'scher Dipol strahlt Kugelwellen mit Amplitude $\sim \frac{|\ddot{\vec{p}}|}{r}$

ab, die sich lokal wie ebene Wellen verhalten

Beispiel (harmonisch oszillierender Dipol):



Energieabstrahlung:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

$$= \frac{c}{\mu_0} (\vec{B} \times \vec{e}_r) \times \vec{B} \quad \text{im Fernfeld } |\vec{r}| \gg \lambda$$

$$= \frac{c}{\mu_0} \vec{B}^2 \vec{e}_r$$

$$= \frac{c}{\mu_0} \frac{\mu_0^2}{(4\pi c)^2} \frac{1}{r^2} (\ddot{\vec{p}} \times \vec{e}_r)^2 \vec{e}_r$$

$$= \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2 \sin^2 \vartheta}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{mit } \vartheta = \angle(\ddot{\vec{p}}, \vec{e}_r)$$

keine Strahlung in Richtung von $\ddot{\vec{p}}$!

Strahlungsleistung:

$$P(t) = \oint d\vec{S} \cdot \vec{S}$$

Kugeloberfläche
Radius $R \gg \lambda$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta R^2 \sin\vartheta \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2 \sin^2 \vartheta}{R^2}$$

$$= \frac{\mu_0}{6\pi c} |\ddot{\vec{p}}|^2$$

Beispiel (harmonisch oszillierender Dipol):

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \cos \omega t$$

$$\ddot{\vec{p}}(t) = -\omega^2 \vec{p}_0 \cos \omega t$$

$$P(t) = \frac{\mu_0}{6\pi c} p_0^2 \omega^4 \cos^2\left(\omega t - \frac{R}{c}\right)$$

Mittlere Strahlungsleistung:

$$\overline{P} = \frac{\mu_0 p_0^2}{12\pi c} \omega^4$$

Wirkungsquerschnitt (Rayleigh-Streuung):

$\sigma(\omega) \sim \omega^4$, daraus ist der Himmel blau!

