

## Elektrodynamik für das Lehramt      WS 22/23

DR. L. JANSSEN

### 7. Übung (Besprechung: 29.11.-05.12.22)

#### 1. Maxwell'scher Spannungstensor

Gegeben seien zwei Punktladungen  $q_1 = Q$  und  $q_2 = -Q$  an den Orten  $\vec{r}_1 = a\vec{e}_z$  und  $\vec{r}_2 = -a\vec{e}_z$ .

- (a) Bestimmen Sie die Kraft auf die Ladung  $q_2$  mithilfe des Coulomb-Gesetzes.
- (b) Bestimmen Sie das elektrische Feld der beiden Ladungen an einem beliebigen Punkt  $\vec{r}$  des Raumes.
- (c) Geben Sie den Maxwell'schen Spannungstensor für einen beliebigen Punkt  $\vec{r}$  in der  $xy$ -Ebene ( $z = 0$ ) an.
- (d) Berechnen Sie die Kraft auf die Ladung  $q_2$  mithilfe der integralen Impulsbilanzgleichung.

*Hinweis:* Die Kraft  $\vec{F}$ , die durch das elektromagnetische Feld auf die Ladungen und Ströme innerhalb eines Volumens  $V$  ausgeübt wird, lässt sich mithilfe der Beziehung  $\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{P}_{\text{mech}}$  durch den mechanischen Impuls  $\vec{P}_{\text{mech}}$  ausdrücken. Wenden Sie die integrale Impulsbilanzgleichung an und überlegen Sie sich, welche Anforderungen an die Wahl des Integrationsvolumens  $V$  gestellt sind. Wählen Sie dann ein Volumen  $V$ , für das sich die resultierenden Oberflächenintegrale möglichst einfach berechnen lassen.

#### 2. Energie und Impuls einer ebenen Welle

Gegeben seien das skalare Potential  $\varphi(\vec{r}, t) = 0$  und das Vektorpotential  $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{e}_y A_0 \cos(ckt - \vec{k} \cdot \vec{r})$  mit konstantem Wellenzahlvektor  $\vec{k} = k\vec{e}_x$  und Lichtgeschwindigkeit  $c$ .

- (a) Berechnen Sie die zugehörige elektrische Feldstärke  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  und die zugehörige magnetische Flussdichte  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ .
- (b) Zeigen Sie, dass  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  die Maxwell-Gleichungen für den Fall verschwindender Ladungs- und Stromverteilung erfüllen.
- (c) Zeigen Sie, dass die Potentiale die Lorenzbedingung erfüllen.
- (d) Berechnen Sie die Energiedichte  $w_{\text{em}} = \frac{\epsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2$  und die Impulsdichte  $\vec{p}_{\text{em}} = \frac{\vec{S}}{c^2}$  des elektromagnetischen Feldes.

#### 3. Eichtransformationen

Gegeben seien die elektromagnetischen Potentiale  $\varphi(\vec{r}, t)$  und  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ .

- (a) Durch welche Eichfunktion  $\Lambda(\vec{r}, t)$  lässt sich das skalare Potential zum Verschwinden bringen?
- (b) Welche Gleichungen muss das neue Vektorpotential  $\vec{A}'$  in dem Fall  $\varphi' = 0$  erfüllen? Leiten Sie daraus die Kontinuitätsgleichung ab.

*Hinweis:* Für Vektorfelder  $G(\vec{r})$  gilt die Identität  $\nabla \times (\nabla \times \vec{G}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{G}) - \nabla^2 \vec{G}$ .