Theoretische Mechanik für das Lehramt   Sommer 25

Dr. L. Janssen

1. Übung (17./25.04.25)

---

1. Bahnkurve des Zentralkraftproblems

$\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ seien zwei orthonormierte Basisvektoren eines zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystems mit Koordinaten x_1 und x_2. Eine Punktmasse durchläuft die Bahnkurve

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= x_1(t)\vec{e}_1 + x_2(t)\vec{e}_2 && (1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 \cos\omega t + a_2 \sin\omega t)\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(-a_1 \cos\omega t + a_2 \sin\omega t)\vec{e}_2 && (2) \end{aligned}$$

wobei a_1, a_2 und ω positive Konstanten sind.

(a) Bestimmen Sie eine neue kartesische Basis $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ derart, dass die Parameterdarstellung der Bahnkurve $\vec{r}(t)$ besonders einfach wird.

Hinweis: Die neue kartesische Basis erhalten Sie durch Rotation der Basisvektoren, $\vec{e}_x = R\vec{e}_1$, $\vec{e}_y = R\vec{e}_2$ mit geeignet zu wählender Rotationsmatrix R.

Ergebnis zum Weiterrechnen: $\vec{r}(t) = a_1 \cos(\omega t)\vec{e}_x + a_2 \cos(\omega t)\vec{e}_y$

(b) Welche geometrische Form hat die Bahnkurve?

Zusatz: Welches physikalische Problem könnte durch diese Bahnkurve beschrieben werden?

(c) Bestimmen Sie Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ und Beschleunigung $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$ in der neuen Basis.

(d) Bestimmen Sie die Beträge $r(t) = |\vec{r}(t)|$, $v(t) = |\vec{v}(t)|$ und $a(t) = |\vec{a}(t)|$.

(e) Welche Beziehung besteht zwischen $\vec{r}(t)$ und $\vec{a}(t)$?

(f) Berechnen Sie $\dot{r} = \frac{\mathrm{d}|\vec{r}|}{\mathrm{d}t}$ und erklären Sie den Unterschied zwischen $\dot{r}$ und v.

2. Dreidimensionale Rotation

Gegeben sei die Matrix

$$R = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

(a) Untersuchen Sie, ob R eine orthogonale Matrix darstellt. Vermittelt R eine Drehung? Wenn ja, welche?

Hinweis: R ist orthogonal, wenn $R^\top R = \mathbb{1}$. R vermittelt eine Drehung, wenn R orthogonal ist und $\det R = 1$.

(b) Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = -2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ und $\vec{b} = 3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3$. Bestimmen Sie die transformierten Vektoren $\vec{a}' = R\vec{a}$ und $\vec{b}' = R\vec{b}$ und vergleichen Sie die Skalarprodukte $\vec{a} \cdot \vec{b}$ and $\vec{a}' \cdot \vec{b}'$.

3. Märchenhafte Physik

„Wie eine Schnecke kam er zu einem Feldbrunnen geschlichen, wollte da ruhen und sich mit einem frischen Trunk laben: damit er aber die Steine im Niedersitzen nicht beschädigte, legte er sie bedächtig neben sich auf den Rand des Brunnens. Darauf setzte er sich nieder und wollte sich zum Trinken bücken, da versah ers, stieß ein klein wenig an, und beide Steine plumpsten hinab.“

Grimms Märchen, Hans im Glück

Hans hört den Aufschlag nach der Zeit τ. Welche Tiefe h hat der Brunnen?

Hinweis: Beachten Sie, dass die Schallgeschwindigkeit c endlich ist.