Rechenmethoden für Lehramt Physik
11. Übungsblatt

Wintersemester 2019/20

1. Polar- und Kugelkoordinaten **3 Punkte**

a) **1 Punkt**

Geben Sie die Polarkoordinaten der folgenden Punkte an:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} 48 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

b) **2 Punkte**

Geben Sie die Kugelkoordinaten der folgenden Punkte an:

$$\vec{r}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}_6 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

2. Nabla- und Laplaceoperatoren in Kugelkoordinaten **5 Punkte**

In dieser Aufgabe berechnen wir die aus der Vorlesung und dem Skript bekannte Darstellung der Nabla- und Laplace-Operatoren in Kugelkoordinaten (wir beschränken uns also auf den dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$).

a) **1 Punkt**

Betrachten Sie zuerst eine infinitesimale Änderung des dreidimensionalen Ortsvektors

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \to \quad \vec{r} + d\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \vec{r} + \sum_i \frac{d\vec{r}}{dr_i}\, dr_i. \tag{3}$$

Was ist die konkrete Form von

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dr}\, dr + \frac{d\vec{r}}{d\theta}\, d\theta + \frac{d\vec{r}}{d\varphi}\, d\varphi \tag{4}$$

in Kugelkoordinaten (wobei Sie Vektoren mit Hilfe der Einheitsvektoren der Kugelkoordinaten darstellen sollen, also z. B. $\frac{d\vec{r}}{dr} = a\,\vec{e}_r + b\,\vec{e}_\theta + c\,\vec{e}_\varphi$ mit passenden a, b und c – Achtung: es gab einen Tippfehler im Skript bei $\vec{e}_\varphi$, der jetzt behoben ist)?

b) **1 Punkt**

Die Änderung des Funktionswerts einer Funktion $f(\vec{r})$ bei einer Änderung der Variablen $\vec{r} \to \vec{r} + d\vec{r}$ ist durch das totale Differenzial

$$df(\vec{r}) = \sum_i \frac{df(\vec{r})}{dr_i}\, dr_i = d\vec{r} \cdot \nabla f(\vec{r}) \tag{5}$$

gegeben. Berechnen Sie aus dieser allgemeinen Formel für $df(\vec{r})$ mit Hilfe des Ergebnisses von Aufgabenteil a) die Form des ∇-Operators in Kugelkoordinaten,

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{d}{dr} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{d}{d\theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{d}{d\varphi}. \tag{6}$$

c) **3 Punkte**

Der Laplaceoperator ist definiert als

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = (\nabla \cdot \nabla)\,. \tag{7}$$

Zeigen Sie, dass Δ in Kugelkoordinaten durch

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \sin(\theta) \frac{d}{d\theta} + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)^2} \frac{d^2}{d\varphi^2}. \tag{8}$$

gegeben ist. Tipp: um keine Terme zu vergessen ist es am einfachsten, $\Delta f(\vec{r})$ mit einer allgemein gelassenen Funktion $f(\vec{r})$ zu berechnen, und hieraus Δ abzulesen.

3. Jacobimatrix **3 Punkte**

a) **1 Punkt**

Zeichnen Sie das Gebiet G, das von den Hyperbeln $y = 1/x$ und $y = 3/x$ sowie den Geraden $y = x$ und $y = 3\,x$ begrenzt wird (mit positiven x und y Werten).

b) **2 Punkte**

Berechnen Sie den Flächeninhalt von G,

$$A_G = \int_G dA. \tag{9}$$

Transformieren Sie hierzu die Integrationsvariablen von x und y zu

$$u(x, y) = \sqrt{x\,y} \quad \text{und} \quad v(x, y) = \sqrt{\frac{y}{x}}. \tag{10}$$

Tipp: Überlegen Sie sich hierzu zuerst, was die Grenzen der Integrale über die neuen Integrationsvariablen u und v sind. Transformieren Sie dann das Integral und berechnen Sie den Flächeninhalt.

4. Zusatzaufgabe: Arbeit entlang verschiedener Wege **4 Punkte**

Betrachten Sie im zweidimensionalen Raum das Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^4 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Berechnen Sie die Arbeit $W = \int_\mathcal{C} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$ die nötig ist, um ein Teilchen in diesem Kraftfeld entlang eines Pfades $\mathcal{C}$ zu bewegen.

a) **1 Punkt**

Entlang des Pfades, der in einer geraden Linie von $(x, y) = (0, 0)$ nach $(x, y) = (1, 0)$ führt.

b) **1 Punkt**

Entlang des Pfades, der in einer geraden Linie von $(x, y) = (1, 0)$ nach $(x, y) = (1, 2)$ führt.

c) **1 Punkt**

Entlang des Pfades, der in einer geraden Linie von $(x, y) = (1, 2)$ nach $(x, y) = (0, 0)$ führt.

d) **1 Punkt**

Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.