Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Dr. T. Meng
www.quantum-design.org/teaching

Rechenmethoden für Lehramt Physik
12. Übungsblatt

Wintersemester 2019/20

1. Ein explizites Beispiel für den Satz von Gauß — 3 Punkte

Betrachten Sie das statische Vektorfeld

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} z \\ x^2 + z^2 \\ x\,z \end{pmatrix}, \tag{1}$$

und überprüfen Sie den (Integral-) Satz von Gauß,

$$\int_V dV\, \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \int dS\, \vec{n}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}). \tag{2}$$

a) **1 Punkt**

Berechnen Sie hierzu zuerst das Volumenintegral auf der linke Seite von Gleichung (2), wobei Sie als Integrationsvolumen einen um den Ursprung zentrierten Würfel mit Seitenlänge 2 wählen (der also die Punkte $\vec{r}$ mit $-1 \leq x, y, z \leq 1$ umfasst).

b) **2 Punkte**

Berechnen Sie die rechte Seite von Gleichung (2), indem Sie alle sechs Oberflächenintegrale ausführen. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem von Teil a.

2. Elektrische Punktladung und ihre Maxwellgleichung — 5 Punkte

Als Anwendung des Satzes von Gauß betrachten Sie ein einzelnes Elektron im Vakuum, das am Ursprung lokalisiert ist. Da Elektronen punktförmig sind und eine Ladung $e < 0$ tragen, ist das elektrische Feld, das vom Elektron ausgeht, durch

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \tag{3}$$

gegeben, wobei ϵ_0 die Dielektrizitätskonstante des Vakuums ist. Weiterhin besagt die erste Maxwellsche Gleichung in differentieller Form, dass eine elektrische Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ Quellen und Senken des elektrischen Feldes bildet,

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}. \tag{4}$$

a) **2 Punkte**

Es ist immer eine gute Idee, alle gegebene Größen am Anfang einer Rechnung nochmals genauer zu beschreiben. Zeichnen Sie daher das elektrische Feld (wählen Sie hierzu eine geeignete Ebene im Raum) und bestimmen Sie die Formel, die die Ladungsdichte des Elektrons beschreibt. Tipp: nutzen Sie zur Beschreibung der Ladungsdichte die Diracsche Deltafunktion von Blatt 10, der Ansatz $\rho(\vec{r}) = \rho_0\,\delta(\vec{r})$ ist hilfreich. Es gilt weiterhin, dass $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0)\,\delta(y - y_0)\,\delta(z - z_0)$ ist. Beachten Sie, dass das Elektron punktförmig und am Ursprung lokalisiert ist. Erinnern Sie sich weiterhin daran, dass das

Volumenintegral der Ladungsdichte über eine Volumen V die im Volumen V enthaltene Ladung Q_V ergeben muss, also $\int_V dV\, \rho(\vec{r}) = Q_V$.

b) **3 Punkte**

Betrachten Sie nun das Volumenintegral von Gleichung (4) über eine Kugel mit Radius R, also

$$\int_{\text{Kugel mit Radius } R} dV\, \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \int_{\text{Kugel mit Radius } R} dV\, \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}. \tag{5}$$

Berechnen Sie beide Seiten der Gleichung und überprüfen Sie so, dass eine elektrische Punktladung in der Tat die erste Maxwellsche Gleichung erfüllt. Nutzen Sie den Satz von Gauß und das jeweils am besten passenden Koordinatensystem.

3. Aharonov-Bohm Effekt **3 Punkte**

Der Aharonov-Bohm Effekt ist ein quantenmechanischer Interferenzeffekt. Der Welle-Teilchen-Dualismus erlaubt es, ein Elektron als eine Welle zu verstehen. Wenn Elektronenwellen aufeinandertreffen, kommt es im Allgemeinen zu Interferenz. Beim Aharonov-Bohm Effekt wird die Elektroneninterferenz von einem Magnetfeld beeinflusst das von der Elektronenwelle räumlich getrennt ist.

Das Magnetfeld $\vec{B}$ wird in der Elektrodynamik als Rotation eines "Eichfelds" (oder "Vektorpotentials") $\vec{A}(\vec{r}, t)$ beschrieben,

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t). \tag{6}$$

Betrachten Sie im Folgenden das statische Eichfeld

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

a) **1 Punkt**

Berechnen Sie das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ an Orten $\vec{r}$ außerhalb der z-Achse (also $x \neq 0$ oder $y \neq 0$ oder $x, y \neq 0$).

b) **2 Punkte**

Beim Aharonov-Bohm Effekt wird die Elektroneninterferenz einer elektronischen Welle, die sich entlang eines geschlossenen Weges $\mathcal{C}$ bewegt (also z. B. im Kreis) durch den "magnetischen Fluss" Φ bestimmt, der durch die Elektronenbahn eingeschlossen wird. Dieser ist das Integral des magnetischen Feldes über die vom Weg eingeschlossene Fläche. Betrachten Sie nun eine Elektronenwelle, die sich entlang eines Kreisringes mit Radius 1 um die z-Achse in der (x, y)-Ebene bewegt (also bei $z = 0$). Berechnen Sie den magnetischen Fluss

$$\Phi = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{B}(\vec{r}) \tag{8}$$

durch eine Kreisscheibe mit Radius 1 um die z-Achse in der (x, y)-Ebene, also bei $z = 0$, mit Hilfe des Satzes von Stokes. Stehen dieses Ergebnis im Widerspruch zu Aufgabenteil a)? Tipp: Nutzen Sie wieder das am besten passenden Koordinatensystem für die Berechnung des Integrals. Wählen Sie den Normalenvektor der Fläche als in positive z-Richtung zeigend.

4. Zusatzaufgabe: Der Satz von Stokes **2 Punkte**

Diese Aufgabe dient dazu, den Satz von Stokes

$$\int_S d\vec{S}\, \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t) = \int_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) \tag{9}$$

dadurch zu motivieren, dass Sie ihn in einem einfachen Fall überprüfen. Betrachen Sie im Folgenden ein statisches Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(x, y, z)$. Als Integrationsgebiet wählen wir ein Quadrat mit Seitenlängen 2 in der (x, y)-Ebene, genauer gesagt die Fläche der Punkte mit $z = 0$ und $-1 < x, y < 1$. Stellen Sie für ein allgemeines Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ nun das Oberflächenintegral auf der linken Seite der Gleichung (9) auf. Formen Sie dieses durch teilweises Ausführen der Integrale zum Linienintegral auf der rechten Seite um. Tipp: Nutzen Sie, dass $\int_a^b d\xi\, f(\xi) = -\int_b^a d\xi\, f(\xi)$ ist. Auch eine Zeichnung des Wegintegrals kann hilfreich sein.