Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Dr. T. Meng
www.quantum-design.org/teaching

Rechenmethoden für Lehramt Physik
13. Übungsblatt

Wintersemester 2019/20

1. Gekoppelte Differentialgleichungen und Matrizen **8 Punkte**

In dieser Aufgabe ist die allgemeine Lösung der gekoppelten Differentialgleichungen

$$\frac{df(x)}{dx} = g(x) \quad \text{und} \quad \frac{dg(x)}{dx} = f(x) + 5. \tag{1}$$

gesucht.

a) **2 Punkte**

Warum ist die Funktion $f(x)$ nicht nur Lösung der gekoppelten Differentialgleichungen in Gleichung (1), sondern auch Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = f(x) + 5? \tag{2}$$

Vergleichen Sie die Anzahl der Integrationskonstanten, die in den allgemeinen Lösungen von Gleichung (1) und Gleichung (2) auftreten (dazu müssen Sie die Gleichungen nicht explizit lösen). Wieviele Randbedingungen braucht man also jeweils, um eine spezielle Lösung zu finden?

b) **2 Punkte**

Schreiben Sie zunächst die Differentialgleichungen in Matrizenform

$$\frac{d}{dx}\vec{h}(x) = M\,\vec{h}(x) + \vec{b}(x) \quad \text{mit} \quad \vec{h}(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Berechnen Sie die Eigenwerte m_i und Eigenvektoren $\vec{h}_i$ der Matrix M.

c) **1 Punkt**

Betrachten Sie als nächsten Schritt die homogene Version der obigen Differentialgleichung, $\frac{d}{dx}\vec{h}(x) = M\,\vec{h}(x)$. Überprüfen Sie, dass der Ansatz

$$\vec{h}(x) = \sum_{\text{alle Eigenwerte } i} c_i\,\vec{h}_i\,e^{m_i x} \tag{4}$$

diese homogene Differentialgleichung löst (hierbei sind c_i noch unbestimmte Konstanten). Ist dies die allgemeinst-mögliche Lösung der homogenen Differentialgleichung?

d) **3 Punkte**

Um nun die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu finden, können Sie die Methode der "Variation der Konstanten" anwenden. Hierzu ersetzen Sie die Konstanten c_i durch noch unbekannte Funktionen $c_i(x)$ und machen den Ansatz

$$\vec{h}_{\text{inhom.}}(x) = \sum_{\text{alle Eigenwerte } i} c_i(x)\,\vec{h}_i\,e^{m_i x}. \tag{5}$$

Setzen Sie diesen in die Differentialgleichung ein und bestimmen Sie hieraus die Funktionen $c_i(x)$. Tipp: Sie können die dabei entstehende Matrix-Differentialgleichung für die $c_i(x)$ mit den Eigenvektoren $\vec{h}_i$ skalar-multiplizieren und die Orthogonalität der Eigenvektoren benutzen um die Gleichungen für die $c_i(x)$ zu entkoppeln. Diese Gleichungen können Sie dann zum Beispiel durch direkte Integration lösen.

2. Trennung der Variablen **3 Punkte**

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\frac{df(x)}{dx} = -2\,x^2\,f(x)^2. \tag{6}$$

a) **1 Punkt**

Klassifizieren Sie diese Differentialgleichung: ist sie linear/nicht-linear, gewöhnlich/partiell, was ist ihre Ordnung?

b) **2 Punkte**

Finden Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung mittels Trennung der Variablen.

3. Lösung durch Erweitern: Energiemethode **5 Punkte**

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$2\,f''(x) - e^{f(x)} = 0 \tag{7}$$

mit den Randbedingungen $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$.

a) **2 Punkte**

Als ersten Schritt zur Lösung ist es hilfreich, die ersten Ableitungen von $g(x) = f'(x)^2$ und $e^{f(x)}$ zu berechnen. Multiplizieren Sie dann die Differentialgleichung (7) mit einer zu diesen beiden Ableitungen passenden passenden Größe, um die Differentialgleichung (7) als totale Ableitung zu schreiben,

$$\frac{d}{dx} s(x) = 0. \tag{8}$$

Diese Erweiterungsmethode wird auch Energiemethode genannt. Was ist $s(x)$?

b) **3 Punkte**

Finden Sie nun die Lösung $f(x)$ von Gleichung (7) unter den Randbedingungen $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$. Hierbei können Sie $f(x) \in \mathbb{R}$ (und $x < 2$) voraussetzen.
Tipp: es kann für Sie hilfreich sein, die Wurzel aus einer Gleichung zu ziehen, in der eine Ableitung quadratisch vorkommt, also $\left(f'(x)\right)^2 = h(x) \Rightarrow f'(x) = \pm\sqrt{h(x)}$. Machen Sie sich dann klar, welches Vorzeichen der Wurzel das richtige ist.

4. Zusatzaufgabe: Harmonischer Oszillator **2 Punkte**

Die Auslenkung $x(t)$ eines harmonischen Oszillators folgt der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\,\gamma\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0. \tag{9}$$

Hierbei beschreibt ω_0 ist die charakteristische Frequenz des Oszillators und γ die Dämpfung der Schwingung.

a) **1 Punkt**

Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an. Nutzen Sie hierzu die Definition $\Omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$.

b) **1 Punkt**

Geben Sie die Lösung der Differentialgleichung unter den Randbedingungen $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 0$ an.