Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Dr. T. Meng
www.quantum-design.org/teaching

Rechenmethoden für Lehramt Physik
4. Übungsblatt

Wintersemester 2019/20

1. Rechenregeln für (2×2)-Matrizen **4 Punkte**

a) **2 Punkte**

Berechnen Sie die Inverse M^{-1} der allgemeinen (2×2)-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit dem Gauß-Jordan-Verfahren, wobei a, b, c und d reelle Zahlen sein sollen.

b) **2 Punkte**

Für reelle Zahlen α und β gilt, dass $\alpha\,\beta = \beta\,\alpha$ (so ist zum Beispiel $5 \cdot 3 = 15 = 3 \cdot 5$). Dies ist bei Matrizen nicht mehr immer der Fall. Berechnen Sie zur Illustration $A\,B$ und $B\,A$, $A\,C$ und $C\,A$ sowie $B\,C$ und $C\,B$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

2. Rechenregeln der Spur **2 Punkte**

Berechnen Sie für die Matrizen

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

die Spur $\mathrm{Sp}(X\,Y)$. Erklären den Zahlenwert des Ergebnisses in Anbetracht der allgemeinen Rechenregeln für die Spur (Kapitel 3.2) und indem Sie $X\,Y$ und $Y\,X$ explizit berechnen und vergleichen.

3. Matrix als Abbildung **4 Punkte**

In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass eine Abbildung einen Menge von Anfangsobjekten auf Endobjekte abbildet. Matrizen kann man auch als Abbildungen verstehen, nämlich als Abbildungen von Vektoren auf Vektoren. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, diese Idee mit konkreten Beispielen zu illustrieren.

a) **1 Punkt**

Berechnen Sie $H\,\vec{a}$ und $H\,\vec{b}$ und $H\,\vec{c}$ mit

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

mit Hilfe der Rechenregeln für Matrizen aus der Vorlesung.

b) **1 Punkt**

Drücken Sie das Ergebnis von Aufgabenteil a) mit Hilfe der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ als

$$H\,\vec{a} = x_1\,\vec{a} + x_2\,\vec{b} + x_3\,\vec{c} \quad \text{und} \quad H\,\vec{b} = y_1\,\vec{a} + y_2\,\vec{b} + y_3\,\vec{c} \quad \text{und} \quad H\,\vec{c} = z_1\,\vec{a} + z_2\,\vec{b} + z_3\,\vec{c} \tag{5}$$

aus.

c) **2 Punkte**

Drücken Sie weiterhin

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{6}$$

durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus. Bestimmen Sie ohne explizite Matrixmultiplikation aus den vorherigen Aufgabenteilen, was $H\,\vec{d}$ ergibt.

4. Zusatzaufgabe: Der Entwicklungssatz für Determinanten 3 Punkte

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

mit Hilfe des Entwicklungssatzes, den Sie in der Vorlesung kennen gelernt haben/ kennen lernen werden.