Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Dr. T. Meng
www.quantum-design.org/teaching

Rechenmethoden für Lehramt Physik
5. Übungsblatt

Wintersemester 2019/20

1. Determinanten und ihre Rechenregeln — 6 Punkte

a) **1 Punkt**

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ -7 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

b) **3 Punkte**

Berechnen Sie die Inverse der Matrix mit dem Gauß-Jordan-Verfahren.

c) **2 Punkte**

Berechnen Sie nun explizit die Determinante von A^{-1} und machen Sie sich klar, dass Ihr Ergebnis mit den allgemeinen Rechenregeln für Determinanten (Kapitel 3.4.5) zusammenpasst.

2. Der Entwicklungssatz für Determinanten — 3 Punkte

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

mit Hilfe des Entwicklungssatzes, den Sie z. B. in Kapitel 3.4.4 des Skripts ablesen können.

3. Rechnen mit Indizes und ϵ-Tensor — 4 Punkte

a) **1 Punkt**

Beweisen Sie die zyklische Eigenschaft der Spur,

$$\mathrm{Sp}(D\,E) = \mathrm{Sp}(E\,D) \tag{3}$$

für eine allgemeine $(m \times n)$-Matrix D und eine allgemeine $(n \times m)$-Matrix E indem Sie die Spur in Komponenten schreiben.

b) **3 Punkte**

Beweisen Sie die BAC-CAB-Formel vom ersten Übungsblatt mit Hilfe des ϵ-Tensors. Tipp: machen Sie sich klar, dass es reicht die Regel für die (allgemein gelassene) i-te Komponente zu beweisen.

4. Zusatzaufgabe: mehr zur Indexschreibweise **5 Punkte**

a) **1 Punkt**

Bei der Transposition vom Produkt zweier Matrizen A und B gilt

$$(A\,B)^T = B^T\,A^T. \tag{4}$$

Überprüfen Sie dies explizit am Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

indem Sie $C_1 = A\,B$, $C_2 = B\,A$, $C_3 = A^T\,B^T$ und $C_4 = B^T\,A^T$ berechnen.

b) **2 Punkte**

Nutzen Sie jetzt die Indexschreibweise um $(A\,B)^T = B^T\,A^T$ für eine allgemeine $(m \times n)$-Matrix A und eine allgemeine $(n \times p)$-Matrix B zu beweisen.

c) **2 Punkte**

Nutzen Sie die Indexschreibweise und den ϵ-Tensor zum Beweis der Lagrange-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})\,(\vec{b} \cdot \vec{c}), \tag{6}$$

wobei $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ dreikomponentige Vektoren sind. (Sie können die Lagrange-Identität auch gerne zur Illustration für sich selbst erst einmal explizit mit einem konkreten Beispiel überprüfen.)