Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Dr. T. Meng
www.quantum-design.org/teaching

Rechenmethoden für Lehramt Physik
7. Übungsblatt

Wintersemester 2019/20

1. Diagonalisierung von Matrizen **8 Punkte**

Diagonalisieren Sie die folgenden Matrizen. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Bestimmen Sie die Eigenwerte.
- Bestimmen Sie die Eigenvektoren.
- Stellen Sie die jeweils passende Transformationsmatrix auf, und bestimmen Sie deren Inverse.
- Diagonalisieren Sie die Matrizen explizit, in dem Sie die Transformationsmatrizen anwenden.

a) **4 Punkte**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Überprüfen Sie hier explizit, dass es für die Diagonalisierung keinen Unterscheid macht, ob Sie die Einheitsvektoren in U normieren oder nicht. Diagonalisieren Sie hierzu die Matrix A ein Mal mit einer Transformationsmatrix U_1, die Sie mit beliebigen nicht-normierten Eigenvektoren aufstellen, und ein Mal mit einer Matrix U_2, in der Sie normierte Eigenvektoren nutzen.

b) **4 Punkte**

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Überprüfen Sie hier, dass es bei der Diagonalisierung keinen Unterschied macht ob Sie beim Aufstellen der Transformationsmatrix U den ersten Eigenvektor $\vec{v}_1$ so nutzen, wie Sie ihn erhalten haben, oder ob Sie den Vektor $\vec{v}_1' = (-3)\,\vec{v}_1$ in der Transformationsmatrix verwenden (wobei Sie den zweiten Eigenvektor $\vec{v}_2$ jeweils gleich lassen).

2. Matrix als Abbildung und Verbindung zur Eigenbasis **4 Punkte**

Zur Veranschaulichung des Konzepts der Eigenbasis (also der Basis, die durch die Eigenvektoren aufgespannt wird) betrachten Sie nun die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

aus Aufgabe 1b des letzen Übungsblatts. Auf welche Vektoren bildet die Matrix B den Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

ab? Zerlegen Sie die beiden Vektoren $\vec{v}$ und $B\,\vec{v}$ in die Eigenbasis der Matrix B und machen Sie sich klar, dass Ihr Ergebnis in dieser Zerlegung einleuchtend ist.

3. Zusatzaufgabe: totales Differential **4 Punkte**

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x, y, z) = \frac{\cos(2\,x)\,y}{z^2}. \tag{5}$$

Bestimmen Sie das totale Differential

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}dy + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}dz. \tag{6}$$

Berechnen Sie mit Hilfe des totalen Differentials an der Stelle $x = 1$, $y = 2$, $z = -2$ eine Näherung für die Änderung des Funktionswertes beim Übergang von der Stelle $x = 1$, $y = 2$, $z = -2$ zur Stelle $x = 1.1$, $y = 1.9$, $z = -1.9$. Wie groß ist die exakte Änderung?