Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Dr. T. Meng
www.quantum-design.org/teaching

Rechenmethoden für Lehramt Physik
8. Übungsblatt

Wintersemester 2019/20

1. Gradientenfelder **4 Punkte**

Berechnen Sie jeweils den Gradient folgender Funktionen und stellen Sie die Funktion und den Gradienten graphisch dar.

a) **1 Punkt**

$$f_1(x, y) = 3\,x. \tag{1}$$

b) **1 Punkt**

$$f_2(x, y) = x^2 - y^2. \tag{2}$$

c) **1 Punkt**

$$f_3(x, y, z) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-2)^2}}, \tag{3}$$

also das Potential einer Punktladung am Ort $\vec{r} = (0, 0, 2)^T$. Zeichnen Sie hier nur $f_3(0, y, 0)$ und die y und z-Komponente von $\nabla f_3(0, y, z)$.

d) **1 Punkt**

$$f_4(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}. \tag{4}$$

2. Taylorreihen **5 Punkte**

Bestimmen Sie folgende Taylorreihen.

a) **2 Punkte**

Die Taylorreihe von

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x + x_0}^3} \tag{5}$$

um $x = 1$ bis zur vierten Ordnung in $x - 1$ (hierbei können Sie $x_0 > 0$ annehmen).

b) **3 Punkte**

Die Taylorreihe von

$$g(x) = \sinh\left(x^2\right) \tag{6}$$

um $x = 0$ bis zur sechsten Ordnung in x. Hierbei ist der Sinus hyperbolicus als

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \tag{7}$$

definiert.

3. Visualisierung von Taylorreihen **4 Punkte**

a) **2 Punkte**

Ein Plattenkondensator der Kapazität C werde über einen Widerstand R durch eine Spannungsquelle der Spannung U aufgeladen. Man kann dann zeigen, dass die die Ladung $\pm Q(t)$ auf den Kondensatorplatten als Funktion der Zeit durch

$$Q(t) = C\,U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{R\,C}}\right) \tag{8}$$

gegeben ist. Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten von $Q(t)$ für kleine und große Zeiten durch eine Taylor-Entwicklung von $Q(t)$ bis zur ersten Ordnung. Stellen Sie die Funktion $Q(t)$ und die beiden Näherungen bei kleinen und großen Zeiten in einem Plot dar.

b) **2 Punkte**

Ein Federpendel der Masse $m > 0$ und mit Federkonstante $D > 0$ habe als Funktion der Zeit die Auslenkung

$$x(t) = x_0 \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}}\,t\right). \tag{9}$$

Bestimmen Sie die Entwicklung von $x(t)$ um $t = 0$ zur führenden Ordnung und stelle Sie diese gemeinsam mit $x(t)$ dar.

4. Zusatzaufgabe: Ableitung als Grenzwert **2 Punkte**

Beweisen Sie ausgehend von der Definition der Ableitung als

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{10}$$

folgende Gleichungen durch das explizite Bilden des Grenzwerts $\Delta x \to 0$.

a) **1 Punkt**

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\,g(x)\right) = \frac{df(x)}{dx}\,g(x) + f(x)\,\frac{dg(x)}{dx}.$$

b) **1 Punkt**

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{df(x)}{dx}\,g(x) - f(x)\,\frac{dg(x)}{dx}}{g(x)^2}.$$