Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Dr. T. Meng
www.quantum-design.org/teaching

Rechenmethoden für Lehramt Physik
9. Übungsblatt

Wintersemester 2019/20

1. Partielle Integration **5 Punkte**

a) **1 Punkt**

Finden Sie durch Zeichnen der jeweiligen Integranden graphisch heraus, in wieweit sich die Werte der Integrale

$$\int_0^{2\pi} dx\ \sin^2(x) \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} dx\ \cos^2(x) \tag{1}$$

unterscheiden. Nutzen Sie $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$, um hieraus den Wert der beiden Integrale zu erschließen.

b) **1 Punkt**

Berechnen Sie nun

$$\int_0^{2\pi} dx\ \cos^2(x) \tag{2}$$

mittels partieller Integration – stimmt das Ergebnis mit Ihrer Erwartung aus Teil a) überein? Hierzu können Sie wieder $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ nutzen.

c) **3 Punkte**

Bestimmen Sie nun noch folgende unbestimmte Integrale mittels partieller Integration:

$$I_1 = \int dx\, (1 + 2\,x)\ \cosh(x), \tag{3}$$

$$I_2 = \int dx\, \frac{x^2}{e^x}, \tag{4}$$

$$I_3 = \int dx\, x^2\ \ln(x), \tag{5}$$

wobei $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$.

2. Variablensubstitution **3 Punkte**

Lösen Sie die folgenden Integrale durch eine geeignete Variablensubstitution.

a) **1 Punkt**

$$I_4 = \int_0^1 dx\, \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)^2} \qquad \left(\text{Hinweis: } \frac{d\,\arcsin(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right). \tag{6}$$

b) **1 Punkt**

$$I_5 = \int_1^{10} dx\, \frac{4\,x + \frac{1}{x}}{2\,x^2 + \ln(x)}. \tag{7}$$

c) **1 Punkt**

$$I_6 = \int_{40}^{2} dx\, x^2\, e^{x^3}. \tag{8}$$

3. Massendichte eines Würfels **3 Punkte**

Wir betrachten nun einen Würfel der Kantenlänge $2\,a$. Der Würfel habe in seinem Inneren eine Massendichte $\rho(\vec{r}) = \rho_0\, \vec{r}^2$. Der Würfel liege so, dass eine Ecke bei $\vec{r} = (-a, -a, -a)^T$ liegt und eine andere Ecke bei $\vec{r} = (a, a, a)^T$.

Hinweis: Wenn der Würfel parallel zu den Koordinatenachsen liegt, gilt

$$\int_{\text{Würfel}} dV = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2}, \tag{9}$$

wobei das Innere des Würfels x-Koordinaten zwischen x_1 und x_2, y-Koordinaten zwischen y_1 und y_2 und z-Koordinaten zwischen z_1 und z_2 hat. Weiterhin löst man ein Mehrfachintegral der Form

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} dz\, \left(f(x)\, g(y)\, h(z)\right) \tag{10}$$

über das Produkt der Einzelintegrale,

$$\left(\int_{x_1}^{x_2} dx\, f(x)\right) \cdot \left(\int_{y_1}^{y_2} dy\, g(y)\right) \cdot \left(\int_{z_1}^{z_2} dz\, h(z)\right). \tag{11}$$

a) **1 Punkt**

Berechnen Sie die Gesamtmasse M des Würfels durch Integration der Massendichte,

$$M = \int_{\text{Würfel}} dV\, \rho(\vec{r}). \tag{12}$$

b) **1 Punkt**

Bestimmen Sie nun die Koordinate des Schwerpunkts $\vec{R}$. Dieser ist definiert als

$$\vec{R} = \frac{\int_{\text{Würfel}} dV\, \rho(\vec{r})\, \vec{r}}{\int_{\text{Würfel}} dV\, \rho(\vec{r})}. \tag{13}$$

c) **1 Punkt**

Berechnen Sie nun noch das Trägheitsmoment des Würfels für eine Drehung um die z-Achse, das durch

$$I_z = \int_{\text{Würfel}} dV\, \rho(\vec{r})\, \left((x - R_x)^2 + (y - R_y)^2\right) \tag{14}$$

gegeben ist.

4. Zusatzaufgabe: Volumen einer Kugel **3 Punkte**

Berechnen Sie das Volumen einer Kugel mit Radius r in kartesischen Koordinaten. Überlegen Sie sich hierzu, wie die Begrenzung der Kugel parametrisiert werden kann, und nutzen Sie

$$\int dx \, \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x \sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) \tag{15}$$

und

$$\arctan\left(\frac{a}{0}\right) \equiv \lim_{x \to 0} \arctan\left(\frac{a}{x}\right) = \lim_{y \to \infty} \arctan\left(a\, y\right) = \frac{\pi}{2} \quad \forall\, a > 0. \tag{16}$$