Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Dr. T. Meng
www.quantum-design.org/teaching

Rechenmethoden für Lehramt Physik
1. Übungsblatt

Wintersemester 2018/19

1. Vektorraum der Polynome **5 Punkte**

Bisher kennen Sie das Konzept des Vektors anschaulich als einen Pfeil mit Länge und Richtung. Das mathematische Konzept des Vektors als Element eines Vektorraums ist aber viel allgemeiner. Betrachten Sie als Beispiel $\mathcal{P}_n$, den Raum der reellen Polynome mit Grad $\leq n$ mit Elementen der Form

$$P(x) = p_0 + p_1\, x + \ldots + p_n\, x^n \quad \text{mit} \quad x, p_i \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

a) **4 Punkte**

Überprüfen Sie, dass $\mathcal{P}_n$ zusammen mit der normalen Addition sowie Multiplikation mit reellen Zahlen einen Vektorraum bildet. Überprüfen Sie hierzu explizit die Vektorraum-Eigenschaften.

b) **1 Punkt**

Geben Sie eine Basis von $\mathcal{P}_n$ an.

2. Die BAC-CAB-Regel **2 Punkte**

Beim Rechnen mit mehrfachen Kreuzprodukten ist oft die Graßmann-Identität, auch BAC-CAB-Regel genannt, hilfreich:

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right). \tag{2}$$

Überprüfen Sie diese mit drei allgemeinen drei-komponentigen Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

3. Rechnen mit Basisvektoren **5 Punkte**

Gegeben seien drei orthonormale Basisvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ eines dreidimensionalen Vektorraums. Berechnen Sie folgende Terme ohne explizite Darstellung der Vektoren.

a) **3 Punkte**

(i) $\vec{e}_2 \cdot (\vec{e}_3 + \vec{e}_1)$

(ii) $(4\,\vec{e}_3 - 2\,\vec{e}_2) \cdot (3\,\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 8\,e_3)$

(iii) $(\vec{e}_1 + 15\,\vec{e}_3) \cdot (5\,\vec{e}_2 - \,e_3)$

b) **2 Punkte**

Finden Sie einen nicht-verschwindenden Vektor $\vec{c}$, der senkrecht auf den beiden Vektoren

$$\vec{a} = 2\,\vec{e}_1 + 4\,\vec{e}_3 \quad \text{und} \quad \vec{b} = -3\,\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \tag{3}$$

steht. Tipp: machen Sie den allgemeinst-möglichen Ansatz für $\vec{c}$. Finden Sie durch die mathematische Formel, die "senkrecht" bei Vektoren ausdrückt, ein Gleichnugssystem. Finden Sie eine der möglichen Lösungen des Gleichungssystems.

4. Präsenzaufgabe: Rechnen mit dem Kreuzprodukt **7 Punkte**

a) **3 Punkte**

Berechnen Sie folgende Kreuzprodukte:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \; , \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \; , \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} . \tag{4}$$

b) **4 Punkte**

Um Ihr Ergebnis besser zu verstehen ist es hilfreich, die drei jeweils rechts in den obigen Kreuzprodukten stehenden Vektoren in Komponenten parallel und senkrecht zum Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

zu zerlegen. Tuen sie dies und interpretieren Sie ihr obiges Ergebnis.