Rechenmethoden für Lehramt Physik
13. Übungsblatt

Wintersemester 2018/19

1. Komplexe Zahlen: Grundlagen **6 Punkte**

a) **2 Punkte**

Bestimmen Sie den Betrag und das Argument folgender komplexer Zahlen:

$$z_1 = 3 + 7\,i \quad , \quad z_2 = -2 + i \quad , \quad z_3 = 9 - 4\,i \quad , \quad z_4 = 59\,i. \tag{1}$$

b) **2 Punkte**

Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:

$$z_5 = 36\,e^{i\,0.3} \quad , \quad z_6 = -2\,e^{i\,\pi} \quad , \quad z_7 = -2\,e^{i\,\pi/3} \quad , \quad z_8 = e^{2+i\,3}. \tag{2}$$

c) **1 Punkt**

Zeigen Sie, dass für jede komplexe Zahl z

$$z \cdot z^* = |z|^2 \tag{3}$$

gilt.

d) **1 Punkt**

Berechnen Sie alle 5 Werte von z, die die Gleichung

$$z^5 = 2 \tag{4}$$

erfüllen. Tipp: machen Sie sich klar, welchen Wert $|e^{i\theta}|$ für $\theta \in \mathbb{R}$ hat, nutzen Sie die Polardarstellung komplexer Zahlen und den Fakt, dass das Argument einer komplexen Zahl nur bis auf 2π genau definiert ist.

2. Eulersche Formel **4 Punkte**

a) **2 Punkte**

Stellen Sie die Taylorreihe der Exponentialfunktion e^x, des Sinus $\sin(x)$ und des Kosinus $\cos(x)$ um $x = 0$ auf. Zeigen Sie durch Identifikation der Exponentialfunktion, des Sinus und des Kosinus mit der jeweiligen Reihendarstellung, dass die Eulersche Formel

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi) \tag{5}$$

gilt.

b) **2 Punkte**

Zeigen Sie, dass Sinus und Kosinus folgende komplexe Darstellung haben:

$$\sin(x) = \frac{1}{2\,i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \quad \text{und} \quad \cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right). \tag{6}$$

3. Holomorphe Funktionen **3 Punkte**

Eine Funktion $f(z)$ einer komplexen Zahl z heißt “komplex differenzierbar im Punkt z_0”, wenn die komplexe Ableitung im Punkt z_0

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \tag{7}$$

existiert.

a) **1 Punkt**

Zeigen Sie, dass eine im Punkt z_0 komplex differenzierbare Funktion

$$f(z) = f(x + i\,y) = u(x,y) + i\,v(x,y) \tag{8}$$

die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\partial_x u(x,y) = \partial_y v(x,y) \quad \text{und} \quad \partial_y u(x,y) = -\partial_x v(x,y) \tag{9}$$

erfüllen muss, wobei $x = \mathrm{Re}(z)$ und $y = \mathrm{Im}(z)$ ist. Weiterhin ist $u = \mathrm{Re}(f)$ und $v = \mathrm{Im}(f)$. Tipp: die Existenz des Grenzwerts in Gleichung (7) beinhaltet insbesondere, dass der Grenzwert eindeutig ist.

b) **2 Punkte**

Überprüfen Sie, ob folgende Funktionen im Punkt $z = 2 + i$ komplex differenzierbar sind:

$$f_1(z) = z^* \quad , \quad f_2(z) = |z| \quad , \quad f_3(z) = z^2 \quad , \quad f_4(z) = e^{i\,z}. \tag{10}$$

4. Präsenzaufgabe: Fourier-Transformation **3 Punkte**

Die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}f(\omega)$ einer Funktion $f(t)$ ist definiert durch

$$\mathcal{F}f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\,\omega\,t}\, f(t), \tag{11}$$

die Rücktransformation ist durch

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\,\omega\,t}\, \mathcal{F}f(\omega) \tag{12}$$

gegeben.

a) **1 Punkt**

Zeigen Sie mit Hilfe Gleichungen (11) und (12), dass die Diracsche Deltafunktion die komplexe Darstellung

$$\delta(x - x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{2\pi}\, e^{i\,(x-x_0)\,y} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{2\pi}\, e^{-i\,(x-x_0)\,y} \tag{13}$$

hat.

b) **1 Punkt**

Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformation einer Ableitung durch

$$f(t) = \frac{dg(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}f(\omega) = -i\omega\, \mathcal{F}g(\omega). \tag{14}$$

gegeben ist. Nehmen Sie hierbei an, dass $g(t \to \pm\infty) = 0$ ist.

c) **1 Punkt**

Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformation des Produkts zweier Funktionen eine sogenannte “Faltung” der beiden Fourier-Transformierten ergibt, dass also gilt

$$f(t) = g(t)\, h(t) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\omega}\, \mathcal{F}g(\omega - \tilde{\omega})\, \mathcal{F}h(\tilde{\omega}). \tag{15}$$