Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Dr. T. Meng
www.quantum-design.org/teaching

Rechenmethoden für Lehramt Physik
14. Übungsblatt

Wintersemester 2018/19

1. Gekoppelte Differentialgleichungen und Matrizen **6 Punkte**

In dieser Aufgabe ist die allgemeine Lösung der gekoppelten Differentialgleichungen

$$\frac{df(x)}{dx} = g(x) \quad \text{und} \quad \frac{dg(x)}{dx} = f(x) + 5. \tag{1}$$

gesucht.

a) **2 Punkte**

Schreiben Sie zunächst die Differentialgleichungen in Matrizenform

$$\frac{d}{dx}\vec{h}(x) = M\,\vec{h}(x) + \vec{b}(x) \quad \text{mit} \quad \vec{h}(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Berechnen Sie die Eigenwerte m_i und Eigenvektoren $\vec{h}_i$ der Matrix M.

b) **1 Punkt**

Betrachten Sie als nächsten Schritt die homogene Version der obigen Differentialgleichung, $\frac{d}{dx}\vec{h}(x) = M\,\vec{h}(x)$. Überprüfen Sie, dass

$$\vec{h}(x) = \sum_{\text{alle Eigenwerte } i} c_i\,\vec{h}_i\,e^{m_i x} \tag{3}$$

diese homogene Differentialgleichung löst (hierbei sind c_i noch unbestimmte Konstanten). Ist dies die allgemeinst-mögliche Lösung der homogenen Differentialgleichung?

c) **3 Punkte**

Um nun die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu finden, können Sie die Methode der "Variation der Konstanten" anwenden. Hierzu ersetzen Sie die Konstanten c_i durch noch unbekannte Funktionen $c_i(x)$ und machen den Ansatz

$$\vec{h}_{\text{inhom.}}(x) = \sum_{\text{alle Eigenwerte } i} c_i(x)\,\vec{h}_i\,e^{m_i x}. \tag{4}$$

Setzen Sie diesen in die Differentialgleichung ein und bestimmen Sie hieraus die Funktionen $c_i(x)$. Tipp: Sie können die dabei entstehende Matrix-Differentialgleichung für die $c_i(x)$ mit den Eigenvektoren $\vec{h}_i$ skalar-multiplizieren und die Orthogonalität der Eigenvektoren benutzen um die Gleichungen für die $c_i(x)$ zu entkoppeln. Diese Gleichungen können Sie dann zum Beispiel durch direkte Integration lösen.

2. Trennung der Variablen **3 Punkte**

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\frac{df(x)}{dx} = -2\,x^2\,f(x)^2. \tag{5}$$

a) **1 Punkt**

Klassifizieren Sie diese Differentialgleichung: ist sie linear/nicht-linear, gewöhnlich/partiell, was ist ihre Ordnung?

b) **2 Punkte**

Finden Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.

3. Lösung durch Erweitern: Energiemethode 5 Punkte

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$2\, f''(x) - e^{f(x)} = 0 \tag{6}$$

mit den Randbedingungen $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$.

a) **2 Punkte**

Als ersten Schritt zur Lösung ist es hilfreich, die ersten Ableitungen von $g(x) = f'(x)^2$ und $e^{f(x)}$ zu berechnen. Multiplizieren Sie dann die Differentialgleichung (6) mit einer zu diesen beiden Ableitungen passenden passenden Größe, um die Differentialgleichung (6) als totale Ableitung zu schreiben,

$$\frac{d}{dx} s(x) = 0. \tag{7}$$

Diese Erweiterungsmethode wird auch Energiemethode genannt. Was ist $s(x)$?

b) **3 Punkte**

Finden Sie nun die Lösung $f(x)$ von Gleichung (6) unter den Randbedingungen $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$. Hierbei können Sie $f(x) \in \mathbb{R}$ (und $x < 2$) voraussetzen.

4. Präsenzaufgabe: Harmonischer Oszillator 4 Punkte

Die Auslenkung $x(t)$ eines harmonischen Oszillators folgt der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\,\gamma\,\dot{x} + \omega_0^2\, x = 0. \tag{8}$$

Hierbei beschreibt ω_0 ist die charakteristische Frequenz des Oszillators und γ die Dämpfung der Schwingung.

a) **1 Punkt**

Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an. Nutzen Sie hierzu die Definition $\Omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$.

b) **1 Punkt**

Geben Sie die Lösung der Differentialgleichung unter den Randbedingungen $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 0$ an.

c) **2 Punkte**

Diskutieren Sie die in Teil b) gefundene Lösung für $\gamma > \omega_0$ und $\gamma < \omega_0$.