Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Dr. T. Meng
www.quantum-design.org/teaching

Rechenmethoden für Lehramt Physik
3. Übungsblatt

Wintersemester 2018/19

1. Elektromagnetische Felder **4 Punkte**

Skizzieren und beschreiben Sie die folgenden (statischen) elektrischen und magnetischen Felder:

a) **1 Punkt**

Das elektrische Feld eines Plattenkondensators mit Platten senkrecht zur x-Achse bei $x = 0$ und $x = L$ mit

$$\vec{E}(\vec{r}) = \mathcal{E}\,\vec{e}_x \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \mathcal{E} > 0 & \text{für } 0 \leq x \leq L, \\ \mathcal{E} = 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1}$$

b) **1 Punkt**

Das elektrische Feld einer Punktladung mit

$$\vec{E}(\vec{r}) = \mathcal{E}\,\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad \text{(setzen Sie der Einfachheit } \mathcal{E} \to 1\text{).} \tag{2}$$

c) **1 Punkt**

Das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Drahts, der entlang der z-Achse gespannt ist (dieser ist der Einfachheit halber als unendlich lang angenommen):

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mathcal{B}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}\frac{1}{x^2 + y^2} \quad \text{(setzen Sie der Einfachheit } \mathcal{B} \to 1\text{).} \tag{3}$$

d) **1 Punkt**

Das elektrische Feld eines elektrischen Dipols:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \mathcal{E}\left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} - \frac{\vec{r} + \vec{r}_0}{|\vec{r} + \vec{r}_0|^3}\right) \quad \text{mit} \quad \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(setzen Sie der Einfachheit } \mathcal{E} \to 1\text{).} \tag{4}$$

Tip: machen Sie sich klar, dass das Feld in der Nähe von $\vec{r} = \pm\vec{r}_0$ in guter Näherung dem Feld eines Monopols mit positiver bzw. negativer Ladung entspricht – warum ist das so? Was ist der Wert des Feldes weit entfernt von den beiden Monopolen? Wohin zeigt das Feld in der (y, z)-Ebene?

2. Cauchy-Kriterium für Konvergenz von Reihen **7 Punkte**

In der Vorlesung haben Sie das formale Kriterium für die Konvergenz einer Reihe s, die wir aus einer Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{X}, \quad i \mapsto a_i$ durch Summation der Folgenglieder erhalten, $s_j = \sum_{n=0}^{j} a_j$, wie folgt kennengelernt

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n : |s_i - s_n| < \epsilon \quad \forall i > n \tag{5}$$

("für alle Zahlen $\epsilon > 0$ existiert ein Index n so, dass alle Partialsummen s_i mit $i > n$ sich vom sogenannten Grenzwert s_∞ um weniger als ϵ unterscheiden"). Um dies in der Praxis für eine gegebene Reihe zu überprüfen nutzt man Konvergenzkriterien. Eines davon ist das "Cauchy-Kriterium". Dieses besagt grob, dass eine Reihe dann konvergiert, wenn man die Folgenglieder a_n bis a_m aufsummieren kann (wobei natürlich $m > n$ sein muss), und diese Summe für ausreichend große n beliebig klein wird – egal welches $m > n$ man wählt. Ganz genau ist das Kriterium:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m \geq n > N : |a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m| < \epsilon. \tag{6}$$

In Worten: "für alle $\epsilon > 0$ existiert eine natürliche Zahl N so, dass für alle $m > n > N$ die Summe $|a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m|$ kleiner ϵ ist". Also: für alle Zahlen $\epsilon > 0$ gibt es einen Index N so, dass die Summe der Folgenglieder a_n bis a_m für alle möglichen Kombinationen von Indizes n und m (mit $m > n$ und $n > N$) im Betrag kleiner als ϵ ist. Den Index N können wir dabei passend wählen. Andernfalls divergiert die Reihe.

Überprüfen Sie, ob die Reihe s_a, die mittels der Folge

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{X}, \quad i \mapsto \frac{1}{i^2} \tag{7}$$

definiert ist, konvergiert oder divergiert. Hierzu können Sie wie folgt vorgehen:

- Betrachten Sie zunächst die Reihe s_b, mittels der Folge $b : \mathbb{N} \to \mathbb{X}, \quad i \mapsto \frac{1}{i(i-1)}$ definiert ist. Wählen Sie $N > 1/\epsilon$ und überprüfen Sie die Konvergenz dieser Reihe mit dem Cauchy-Kriterium.

  Tipp: Vergleichen Sie die Glieder der Folge b mit $\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}$. Nutzen Sie das Ergebnis dieses Vergleichs, um das Cauchy-Kriterium für die Reihe s_b zu vereinfachen. Es ist dann hilfreich, die Größe von $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{m}$ mit der von $\frac{1}{n-1}$ zu vergleichen. Danach ist es hilfreich, die Größe von $\frac{1}{n-1}$ mit ϵ zu vergleichen. Erinnern Sie sich dabei daran, was Sie über n und N sagen können, und was das für den Vergleich von $\frac{1}{n-1}$ und $\frac{1}{N}$ bedeutet.

- Vergleichen Sie das Cauchy-Kriterium der Reihe s_a mit dem der Reihe s_b. Was folgt aus der Konvergenz oder Divergenz der Reihe s_b für die Konvergenz oder Divergenz der Reihe s_a?

3. Präsenzaufgabe: Rechenregeln für (2×2)-Matrizen — 4 Punkte

a) **2 Punkte**

Berechnen Sie die Inverse M^{-1} der allgemeinen (2×2)-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{8}$$

mit dem Gauß-Jordan-Verfahren.

b) **2 Punkte**

Für reelle Zahlen α und β gilt, dass $\alpha\,\beta = \beta\,\alpha$ (so ist zum Beispiel $5 \cdot 3 = 15 = 3 \cdot 5$). Dies ist bei Matrizen nicht mehr immer der Fall. Berechnen Sie zur Illustration $A\,B$ und $B\,A$, $A\,C$ und $C\,A$ sowie $B\,C$ und $C\,B$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$