Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Dr. T. Meng
www.quantum-design.org/teaching

Rechenmethoden für Lehramt Physik
6. Übungsblatt

Wintersemester 2018/19

1. Zur Matrixdiagonalisierung und Indexschreibweise **2 Punkte**

In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass eine diagonalisierbare Matrix M auf ihre Diagonalform M_{diag} gebracht werden kann, indem man sie mit einer passenden Transformationsmatrix U wie folgt transformiert:

$$M_{\text{diag}} = U^{-1}\,M\,U. \tag{1}$$

Dabei sind die Spalten Matrix U durch die Darstellung der Eigenvektoren $\vec{v}_i$ in der ursprünglichen Basis gegeben:

$$M\,\vec{v}_i = \lambda_i\,\vec{v}_i \quad \Rightarrow \quad U = (\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n)\,. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass für orthonormale Eigenvektoren die Transformationsmatrix U durch Transposition invertiert wird, dass also $U\,U^T = \mathbb{1}$ gilt. Nutzen Sie hierzu die Indexschreibweise.

2. Diagonalisierung von Matrizen **8 Punkte**

Diagonalisieren Sie die folgenden Matrizen. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Bestimmen Sie die Eigenwerte.
- Bestimmen Sie die Eigenvektoren.
- Stellen Sie die jeweils passende Transformationsmatrix auf, und bestimmen Sie deren Inverse.
- Diagonalisieren Sie die Matrizen explizit, in dem Sie die Transformationsmatrizen anwenden.

.

a) **4 Punkte**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Überprüfen Sie hier explizit, dass es für die Diagonalisierung keinen Unterscheid macht, ob Sie die Einheitsvektoren in U normieren oder nicht. Diagonalisieren Sie hierzu die Matrix A ein Mal mit einer Transformationsmatrix U_1, die Sie direkt mit den berechneten Eigenvektoren aufstellen, und ein Mal mit einer Matrix U_2, in der Sie normierte Eigenvektoren nutzen.

b) **4 Punkte**

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Überprüfen Sie hier, dass es bei der Diagonalisierung keinen Unterschied macht ob Sie beim Aufstellen der Transformationsmatrix U den ersten Eigenvektor $\vec{v}_1$ so nutzen, wie Sie ihn erhalten haben, oder ob

Sie den Vektor $\vec{v}_1' = (-3)\,\vec{v}_1$ in der Transformationsmatrix verwenden (wobei Sie den zweiten Eigenvektor $\vec{v}_2$ jeweils gleich lassen).

3. Präsenzaufgabe: Eigenbasis **3 Punkte**

Zur Veranschaulichung des Konzepts der Eigenbasis (also der Basis, die durch die Eigenvektoren aufgespannt wird) betrachten Sie nun die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

aus Aufgabe 1b des letzen Übungsblatts. Auf welche Vektoren bildet die Matrix B den Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

ab? Zerlegen Sie die beiden Vektoren $\vec{v}$ und $B\,\vec{v}$ in die Eigenbasis der Matrix B und machen Sie sich klar, dass Ihr Ergebnis in dieser Zerlegung einleuchtend ist.