Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Dr. T. Meng
www.quantum-design.org/teaching

Rechenmethoden für Lehramt Physik
7. Übungsblatt

Wintersemester 2018/19

1. Noch mehr Übungsaufgaben zur Indexschreibweise — 5 Punkte

a) **1 Punkt**

Bei der Transposition vom Produkt zweier Matrizen A und B gilt

$$(A\,B)^T = B^T\,A^T. \tag{1}$$

Überprüfen Sie dies explizit am Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

indem Sie $C_1 = A\,B$, $C_2 = B\,A$, $C_3 = A^T\,B^T$ und $C_4 = B^T\,A^T$ berechnen.

b) **2 Punkte**

Nutzen Sie jetzt die Indexschreibweise um $(A\,B)^T = B^T\,A^T$ für eine allgemeine $(m \times n)$-Matrix A und eine allgemeine $(n \times p)$-Matrix B zu beweisen.

c) **2 Punkte**

Nutzen Sie die Indexschreibweise und den ϵ-Tensor zum Beweis der Lagrange-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})\,(\vec{b} \cdot \vec{c}), \tag{3}$$

wobei $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ dreikomponentige Vektoren sind. (Sie können die Lagrange-Identität auch gerne zur Illustration für sich selbst erst einmal explizit mit einem konkreten Beispiel überprüfen.)

2. Gradientenfelder — 4 Punkte

Berechnen Sie jeweils den Gradient folgender Funktionen und stellen Sie die Funktion und den Gradienten graphisch dar.

a) **1 Punkt**

$$f_1(x, y) = 3\,x. \tag{4}$$

b) **1 Punkt**

$$f_2(x, y) = x^2 - y^2. \tag{5}$$

c) **1 Punkt**

$$f_3(x,y,z) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}, \qquad (6)$$

also das Potential einer Punktladung am Ort $\vec{r} = (0,0,2)^T$. Zeichnen Sie hier nur $f_3(0,y,0)$ und die y und z-Komponente von $\nabla f_3(0,y,z)$.

d) **1 Punkt**

$$f_4(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}. \qquad (7)$$

3. Präsenzaufgabe: totales Differential **4 Punkte**

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x,y,z) = \frac{\cos(2\,x)\,y}{z^2}. \qquad (8)$$

Bestimmen Sie das totale Differential

$$df(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}dy + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}dz. \qquad (9)$$

Berechnen Sie mit Hilfe des totalen Differentials an der Stelle $x=1$, $y=2$, $z=-2$ eine Näherung für die Änderung des Funktionswertes beim Übergang von der Stelle $x=1$, $y=2$, $z=-2$ zur Stelle $x=1.1$, $y=1.9$, $z=-1.9$. Wie groß ist die exakte Änderung?