Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Dr. T. Meng
www.quantum-design.org/teaching

Rechenmethoden für Lehramt Physik
9. Übungsblatt

Wintersemester 2018/19

1. Partielle Integration — 5 Punkte

a) **1 Punkt**

Finden Sie durch Zeichnen der jeweiligen Integranden graphisch heraus, in wieweit sich die Werte der Integrale

$$\int_0^{2\pi} dx\, \sin^2(x) \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} dx\, \cos^2(x) \tag{1}$$

unterscheiden. Nutzen Sie $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$, um hieraus den Wert der beiden Integrale zu erschließen.

b) **1 Punkt**

Berechnen Sie nun

$$\int_0^{2\pi} dx\, \cos^2(x) \tag{2}$$

mittels partieller Integration – stimmt das Ergebnis mit Ihrer Erwartung aus Teil a) überein?

c) **3 Punkte**

Bestimmen Sie nun noch folgende unbestimmte Integrale:

$$I_1 = \int dx\, (3 - 5\,x)\, e^x, \tag{3}$$

$$I_2 = \int dx\, \frac{2\,x}{\cos^2(x)}, \tag{4}$$

$$I_3 = \int dx\, \frac{\ln(x)}{x^5}. \tag{5}$$

2. Variablensubstitution — 3 Punkte

Lösen Sie die folgenden Integrale durch eine geeignete Variablensubstitution.

a) **1 Punkt**

$$I_4 = \int_0^{10} dx\, \frac{x}{(1 + x^2)^7}. \tag{6}$$

b) **1 Punkt**

$$I_5 = \int_2^{5} dx\, \frac{e^x}{1 + e^{2x}}. \tag{7}$$

c) **1 Punkt**

$$I_6 = \int_5^4 dx\, \frac{15\,x^4 + 6}{x^5 + 2\,x - 2}. \tag{8}$$

3. Volumen einer Kugel **3 Punkte**

Berechnen Sie das Volumen einer Kugel mit Radius r in kartesischen Koordinaten. Überlegen Sie sich hierzu, wie die Begrenzung der Kugel parametrisiert werden kann, und nutzen Sie

$$\int dx\, \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x\,\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) \tag{9}$$

und

$$\arctan\left(\frac{a}{0}\right) \equiv \lim_{x\to 0} \arctan\left(\frac{a}{x}\right) = \lim_{y\to\infty} \arctan\left(a\,y\right) = \frac{\pi}{2} \quad \forall\, a > 0. \tag{10}$$

4. Präsenzaufgabe: Massendichte eines Würfels **3 Punkte**

Wir betrachten nun einen Würfel der Kantenlänge a, der aus einem einheitlichen Material gefertigt sei (und auch keine Punkte aufgemalt habe). Der Würfel habe also in seinem Inneren eine konstante Massendichte $\rho(\vec{r}) = \rho_0$. Der Würfel liege so, dass eine Ecke auf dem Ursprung liegt und eine andere Ecke bei $\vec{r} = (a, a, a)^T$.

a) **1 Punkt**

Berechnen Sie die Gesamtmasse M des Würfels durch Integration der Massendichte,

$$M = \int_{\text{Würfel}} dV \rho(\vec{r}). \tag{11}$$

b) **1 Punkt**

Bestimmen Sie nun die Koordinate des Schwerpunkts $\vec{R}$. Dieser ist definiert als

$$\vec{R} = \frac{\int_{\text{Würfel}} dV\, \rho(\vec{r})\, \vec{r}}{\int_{\text{Würfel}} dV\, \rho(\vec{r})}. \tag{12}$$

c) **1 Punkt**

Berechnen Sie nun noch das Trägheitsmoment des Würfels für eine Drehung um die z-Achse, das durch

$$I_z = \int_{\text{Würfel}} dV \rho(\vec{r}) \, \left((x - R_x)^2 + (y - R_y)^2\right) \tag{13}$$

gegeben ist.