Institut für
Theoretische Physik
Prof. Dr. W. Strunz
PD Dr. G. Plunien

Quantentheorie II SS 2009

http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

8. Übung

1. **Zur kanonischen Quantisierung des Maxwell-Feldes:**

Zeigen Sie anknüpfend an die Ergebnisse aus der Aufgabe 1 der 7. Übung, dass

a) Gleichzeitkommutationsrelationen zwischen den Komponenten der kanonisch konjugierten Feldoperatoren $\hat{\vec{A}}$ und $\hat{\vec{\Pi}}$ der Gestalt
$[\hat{A}_i(\vec{r},t), \hat{\Pi}_j(\vec{r}\,',t)] = [\hat{A}_i(\vec{r},t), \partial_t \hat{A}_j(\vec{r}\,',t)] = i\hbar\,\delta_{ij}\,\delta(\vec{r},\vec{r}\,')$ zu Inkonsistenzen führen.

b) die Heisenberg-Gleichung $\partial_t\,\hat{O}(\vec{r},t) = \frac{i}{\hbar}\,[\hat{H},\hat{O}(\vec{r},t)]$ angewendet auf die Feldoperatoren $\hat{\vec{E}}(\vec{r},t)$ bzw. $\hat{\vec{B}}(\vec{r},t)$ identisch mit den entsprechenden quellenfreien Maxwell-Gleichungen sind.

2. **Verschobener Oszillator:**

Gegeben sei der Hamilton-Operator für eine Feldmode (Energie $\hbar\omega$)

$$\hat{H}(\hat{q},\hat{p}) = \frac{1}{2}\,\hat{p}^2 + \frac{\omega^2}{2}\,\hat{q}^2 - \gamma\,\hat{q} = \hat{H}_0(\hat{q},\hat{p}) + \hat{V}(\hat{q}) \tag{1}$$

mit einem linearen Wechselwirkungsterm (Kopplungsstärke γ). Der ungestörte Hamilton-Operator $\hat{H}_0$ läßt sich durch Erzeuger (Vernichter) $\hat{a}^\dagger$ ($\hat{a}$) ausdrücken

$$\hat{H}_0(\hat{q},\hat{p}) = \hat{H}_0(\hat{a},\hat{a}^\dagger) = \hbar\omega\,\frac{1}{2}\,\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}\right) = \hbar\omega\,\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\,. \tag{2}$$

$\hat{H}_0$ kommutiert mit dem Anzahloperator $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ (diagonal). Das Fock-Raumvakuum $|0\rangle$ ist definiert gemäß $\hat{a}|0\rangle = 0$ und $|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$ sei ein normierter Fock-Raumzustand.

a) Finden Sie eine Transformation von den kanonischen Operatoren $(\hat{q},\hat{p})$ auf $(\hat{Q},\hat{P})$, sodass gilt:

$$\hat{H}(\hat{q},\hat{p}) = \hat{H}'(\hat{Q},\hat{P}) = \frac{1}{2}\,\hat{P}^2 + \frac{\omega^2}{2}\,\hat{Q}^2 - \frac{\gamma^2}{2\,\omega^2} \equiv \hat{H}_0(\hat{Q},\hat{P}) + \Delta E\,. \tag{3}$$

Formulieren Sie Erzeuger (Vernichter) $\hat{b}^\dagger$ ($\hat{b}$), welche $\hat{H}_0(\hat{Q},\hat{P})$ im Sinne von Gl. (2) diagonalisieren. Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\hat{b}^\dagger$ ($\hat{b}$) und $\hat{a}^\dagger$ ($\hat{a}$)?

b) Zeigen Sie, dass der Vakuumzustand $|\tilde{0}\rangle$, für den $\hat{b}|\tilde{0}\rangle = 0$ gilt, ein kohärenter Zustand, d.h. ein Eigenzustand von $\hat{a}$ ist.

c) Zeigen Sie, dass die Anzahl $(\hat{a}^\dagger\hat{a})$ von Oszillatorquanten im Vakuum $|\tilde{0}\rangle$ gegeben ist durch $\langle\tilde{0}|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\tilde{0}\rangle = \frac{\gamma^2}{2\,\omega^2} = \frac{|\Delta E|}{\hbar\omega}$.

d) Zeigen Sie, dass in dem Vakuumzustand $|\tilde{0}\rangle$ die Fock-Raumzustände $|n\rangle$ Poisson-verteilt vorliegen.

– *bitte wenden* –

3. **Zustand eines Bosonensystems:**

   Zeigen Sie, dass der Zustand
   $|n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!\, n_2! \cdots n_i! \cdots}} (\hat{b}_1^\dagger)^{n_1} (\hat{b}_2^\dagger)^{n_2} \cdots (\hat{b}_i^\dagger)^{n_i} \cdots |0\rangle$
   normiert ist.

4. **Zur Fock-Raumdarstellung fermionischer Zustände:**

   Wir betrachten N-Fermionenzustände der Gestalt: $|\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_N\rangle = \prod_{i=1}^{N} \hat{c}_{\alpha_i}^\dagger |0\rangle$, wobei α_i für einen Satz relevanter (Einteilchen-)Quantenzahlen steht (z.B. Impuls $\vec{p}$, Spin s für Elektronen). (Hinweis: Für Fermionen gelten die Antikommutationsrelationen: $\{\hat{c}_{\alpha_i}, \hat{c}_{\alpha_j}\} = 0$, $\{\hat{c}_{\alpha_i}^\dagger, \hat{c}_{\alpha_j}^\dagger\} = 0$ und $\{\hat{c}_{\alpha_i}, \hat{c}_{\alpha_j}^\dagger\} = \delta_{\alpha_i,\alpha_j}$, mit dem Antikommutator $\{A, B\} = AB + BA$.)

   a) Berechnen Sie Matrixelemente (Skalarprodukte) der Form:
   $\langle 0|\alpha_1\rangle$, $\langle \alpha_1'|\alpha_1\,, \alpha_2\rangle$ und $\langle \alpha_1'\,, \alpha_2'|\alpha_1\,, \alpha_2\rangle$, etc.

   b) Finden Sie ausgehend von der Vollständigkeitsrelation

   $$\mathbf{1} = |0\rangle\langle 0| + \sum_{\alpha_1} |\alpha_1\rangle\langle\alpha_1| + \sum_{\alpha_1,\alpha_2} |\alpha_1\,, \alpha_2\rangle\langle\alpha_1\,, \alpha_2| + \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} |\alpha_1\,, \alpha_2\,, \alpha_3\rangle\langle\alpha_1\,, \alpha_2\,, \alpha_3| + \cdots$$

   Darstellungen für den Erzeuger $\hat{c}_\alpha^\dagger$ und den Vernichter $\hat{c}_\alpha$.