Institut für
Theoretische Physik
Prof. Dr. W. Strunz
PD Dr. G. Plunien

Quantentheorie II SS 2009

http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

12. Übung

1. **Diracsche Spin-Matrizen:**

   Gegeben seien die 3 Matrizen $\vec{\Sigma} = \gamma_5 \gamma^0 \vec{\gamma}$ (Standarddarstellung). Berechnen Sie

   a) den Kommutator $[\Sigma^i, \Sigma^j]$; was läßt sich somit über den Kommutator zwischen Σ^i und dem Hamilton-Operator $\hat{h}_0 = c\,\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}} + mc^2\,\beta$ der freien (Einteilchen-)Dirac-Gleichung aussagen?

   b) den Kommutator zwischen $\hat{h}_0$ und Impulsoperator $\hat{\vec{p}}$ sowie zwischen $\hat{h}_0$ und dem Operator $\vec{\Sigma}\cdot\hat{\vec{p}}$ (proportional zum Helizitätsoperator).
   (Hinweis: Betrachten Sie zuvor die Kommutatoren $[\alpha^i, \Sigma^j]$ und $[\beta, \Sigma^j]$.)

2. **Invarianz unter lokalen Phasentransformationen:**

   Die Wirkung des Dirac-Spinorfeldes unter Berücksichtigung der Wechselwirkung mit (externen) elektromagnetischen Feldern sei gegeben durch (hier mit Einheiten $\hbar = c = 1$)

$$S[\psi, \overline{\psi}] = \int d^4x\ (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}}) = \int d^4x\ \left\{ \overline{\psi}(x) \left[(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) \right] - e\overline{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x) \right\}\ . \quad (1)$$

   Der Wechselwirkungsterm $\mathcal{L}_{\text{int}}$ in der Lagrange-Dichte beschreibt die sogenannte "minimale Ankopplung" $(j-A)$-Vektorkopplung.

   a) Untersuchen Sie zunächst das Verhalten der Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_0$ bzw. der Wirkung $S_0[\psi, \overline{\psi}]$ des freien Dirac-Feldes unter *lokalen* Phasentransformationen $U(x) = e^{i\alpha(x)}$ mit einem beliebigen Skalarfeld $\alpha(x)$ des Spinorfeldes gemäß $\psi(x) \to \psi'(x) = U(x)\,\psi(x)$. Zeigen Sie, dass die Wirkung $S_0[\psi, \overline{\psi}]$ invariant bleibt, falls gilt: $\partial_\mu j^\mu_\psi(x) = \partial_\mu(\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)) = 0$.

   b) Betrachten Sie nun die volle Wirkung bzw. die Lagrange-Dichte aus Gl. (1). Wie muß sich (simultan) das elektromagnetische Viererpotential A_μ transformieren, wenn die Spinorfelder $\psi, \overline{\psi}$ lokalen Phasentransformationen $U(x)$ unterworfen werden, damit die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ (und somit auch die Dirac-Gleichung) unverändert bleibt?

   c) Was läßt sich über den Zusammenhang zwischen Eichinvarianz und Invarianz unter lokalen Phasentransformationen für den (Lorentz-invarianten) phänomenologisch bedeutsamen Wechselwirkungsterm $\tilde{\mathcal{L}}_{\text{int}} = g\,\frac{e}{2}\,\overline{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x)\psi(x)$ aussagen? (Hierbei ist $F_{\mu\nu}$ der elektromagnetische Feldstärketensor). Deuten Sie diesen Wechselwirkungsterm.

– bitte wenden –

3. **Nichtrelativistischer Grenzfall der Dirac-Gleichung und Pauli-Gleichung:**

Die Dirac Gleichung für das Bi-Spinorfeld ψ (mit "großer" und "kleiner" Komponente φ und χ) lautet explizit:

$$i\hbar\partial_t \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc^2 + eA^0 & c\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{\pi}} \\ c\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{\pi}} & -mc^2 + eA^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

wobei $\hat{\vec{\pi}} = \hat{\vec{p}} - \frac{e}{c}\vec{A}$.

Spalten Sie - wie üblich - die Ruhenergie ab, d.h. setzen Sie $\psi(x) = \tilde{\psi}(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}$ und leiten Sie unter Verwendung der maßgeblichen Bedingungen $|i\hbar\,\partial_t\tilde{\chi}(x)| \ll |mc^2\,\tilde{\chi}|$ sowie $|eA^0| \ll mc^2$ die Pauli-Gleichung für die große Spinorkomponente $\tilde{\varphi}(x)$ her.