13. Übung

1. **Verschränkung reiner Zustände:**

   Betrachten Sie den (reinen) Zwei-Qubit-Zustand $|\psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle$.

   Welche Bedingung erfüllen die komplexen Koeffizienten $\{c_{ij}\}$, wenn es sich bei $|\psi\rangle$ um einen Produktzustand der beiden Qubits handelt? Gilt auch die Umkehrung?
   Überprüfen Sie, ob $|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ (*Singulettzustand*) ein Produktzustand ist.

2. **Verschränkung von Zustandsgemischen:** *Peres-Horodecki-Kriterium*

   Der *partiell Transponierte* ϱ^{PT} eines Dichteoperators ϱ auf dem Produkthilbertraum $\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$ bezüglich der Basis $|m\rangle_1 \otimes |\mu\rangle_2$ sei gegeben durch $\varrho^{\text{PT}}_{m\mu\,;\,m'\mu'} = \varrho_{m\mu'\,;\,m'\mu}$.

   a) Zeigen Sie, dass der partiell Transponierte ϱ^{PT} eines *separablen* Zustands

   $$\varrho = \sum_i p_i \left(\varrho_1^{(i)} \otimes \varrho_2^{(i)}\right), \qquad \text{mit } p_i \geq 0, \;\; \sum_i p_i = 1,$$

   positiv ist.

   b) Betrachten Sie nun den gemischten Zwei-Qubit-Zustand

   $$\varrho_{\text{W}} = (1-p)\frac{1}{4}\mathbb{1} + p\,|\psi^-\rangle\langle\psi^-|, \quad 0 \leq p \leq 1 \;\; \text{(sogenannter } \textit{Wernerzustand}\text{)},$$

   wobei $\frac{1}{4}\mathbb{1}$ der vollständig gemischte Zustand ist. Für welche Werte von p ist ϱ_{W} nicht separabel (und demnach verschränkt)?

   (siehe auch: A. Peres, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996); zu finden unter den „Materialien“)

3. **Quantenfouriertransformation:**

   Für einen Basiszustand eines Quantencomputers bestehend aus n Qubits schreiben wir $|j_1, j_2, \ldots, j_n\rangle = |j\rangle$, wobei $j = j_1 2^{n-1} + j_2 2^{n-2} + \ldots + j_n 2^0$ die Binärdarstellung von j sei. Die *Quantenfouriertransformation* U_{QFT} ist die Abbildung

   $$|j\rangle \to U_{\text{QFT}}|j\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{k=0}^{D-1} e^{2\pi i jk/D}|k\rangle \qquad (D = 2^n).$$

   Zeigen Sie zunächst, dass U_{QFT} unitär ist.

   Wir führen nun die Notation $0.j_\ell j_{\ell+1} \ldots j_{\ell+m}$ für den Binärbruch $j_\ell/2 + j_{\ell+1}/4 + \ldots + j_{\ell+m}/2^{m+1}$ ein. Bestätigen Sie damit, dass für die Quantenfouriertransformation folgende *Produktdarstellung* gilt:

   $$|j_1, j_2, \ldots, j_n\rangle \to 2^{-n/2}\left(|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_n}|1\rangle\right)\left(|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_{n-1}j_n}|1\rangle\right)\ldots\left(|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_1 j_2 \ldots j_n}|1\rangle\right).$$

   Diese Darstellung ist Grundlage der effizienten Implementierung der Quantenfouriertransformation auf einem Quantencomputer.

– *bitte wenden* –

4. **Quantenkopierer mit Macken:**

Das *No-Cloning Theorem* besagt, dass ein (unbekannter) quantenmechanischer Zustand nicht perfekt kopiert werden kann. Es ist jedoch möglich, zumindest näherungsweise zu kopieren: Qubit A sei im (unbekannten) Zustand $|\psi\rangle_A$, Qubit B (das weiße Blatt Papier) im Zustand $|0\rangle_B$, ein Hilfsqubit C befinde sich im Zustand $|0\rangle_C$. Nach dem Kopiervorgang liegt der Zustand $|\Psi\rangle_{ABC} = \mathbf{U}|\psi\rangle_A|00\rangle_{BC}$ vor, wobei der Kopierer gemäß der Vorschrift:

$$
\begin{aligned}
|000\rangle_{ABC} \quad &\rightarrow \quad \mathbf{U}|000\rangle_{ABC} = \sqrt{\frac{2}{3}}|00\rangle_{AB}|0\rangle_C + \sqrt{\frac{1}{3}}|\psi^+\rangle_{AB}|1\rangle_C \\
|100\rangle_{ABC} \quad &\rightarrow \quad \mathbf{U}|100\rangle_{ABC} = \sqrt{\frac{2}{3}}|11\rangle_{AB}|1\rangle_C + \sqrt{\frac{1}{3}}|\psi^+\rangle_{AB}|0\rangle_C
\end{aligned}
$$

arbeitet ($|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$).

a) Die Schreibweise $\mathbf{U}$ deutet an, dass der Kopierer unitär arbeitet:
Zeigen Sie, dass $\langle 000|\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}|000\rangle = \langle 000|000\rangle$ gilt und entsprechende Ausdrücke für $\langle 100|\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}|100\rangle$ und $\langle 100|\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}|000\rangle$ folgen.

b) Überzeugen Sie sich davon, dass nach dem Kopiervorgang Qubit A und Qubit B im selben Zustand vorliegen: $\varrho_A = \varrho_B$.

c) Zeigen Sie, dass unabhängig vom Anfangszustand eine Wiedergabetreue („fidelity“) von

$$F = \langle\psi|\varrho_A|\psi\rangle = \langle\psi|\varrho_B|\psi\rangle = \tfrac{5}{6}$$

erreicht wird.