



**TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DRESDEN**

**Fakultät Physik**

Physikalisches Grundpraktikum

Versuch: **FK**

Aktualisiert: am 23. 11. 2021

## Federkonstante

### Inhaltsverzeichnis

<b>1. Grundlagen</b>	<b>2</b>
1.1. Grundbegriffe der Bewegungslehre (Kinematik) . . . . .	2
1.2. Das Newtonsche Grundgesetz der Mechanik - die Bewegungsgleichung . . . . .	2
1.3. Lineare, ungedämpfte Schwingungen . . . . .	3
<b>2. Methode der linearen Regression</b>	<b>4</b>
2.1. Grafischer Ausgleich . . . . .	5
2.2. Grafische Ermittlung der statistischen Messunsicherheiten . . . . .	5
2.3. Grafische Ermittlung der systematischen Messunsicherheiten . . . . .	10
2.4. Rechnerischer Ausgleich . . . . .	11
<b>A. Herleitung der Regressionsformeln</b>	<b>14</b>
A.1. Berechnung der zufälligen Messunsicherheit . . . . .	15
<b>Fragen</b>	<b>18</b>
<b>Literatur</b>	<b>18</b>

## Versuchsziel

Neben der Aufnahme einer einfachen Messreihe besteht das Versuchsziel darin, die lineare Regression einschließlich der Bestimmung der Messunsicherheiten als wichtige Auswertemethode ausführlich kennenzulernen.

## Aufgabenstellung

Bestimmen Sie die Federkonstante  $k$  einer Feder mittels dynamischer Methode. Messen Sie dazu die Periodendauer  $T$  der Federschwingung als Funktion der Masse  $m$ . Werten Sie Ihre Messreihe in der folgenden Weise aus:

1. Stellen Sie Ihre Messwerte in einem geeigneten Diagramm grafisch dar. Führen Sie einen Geradenausgleich grafisch durch und bestimmen Sie aus dem Anstieg die Federkonstante  $k$ . Ermitteln Sie ebenfalls grafisch die statistischen und systematischen Messunsicherheiten der gesuchten Größe.
2. Nur Physik-Bachelor: Führen Sie die lineare Regression rechnerisch mittels Tabellenkalkulation durch und bestimmen Sie die Federkonstante  $k$  sowie deren statistische und systematische Messunsicherheiten.
3. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der „naiven“ Berechnung des Mittelwertes aus den Federkonstanten, die sich aus den jeweiligen Einzelmessungen ergeben.
4. Diskutieren Sie neben dem Endergebnis auch das Absolutglied und den Anstieg der Ausgleichsgeraden.

## 1. Grundlagen

### 1.1. Grundbegriffe der Bewegungslehre (Kinematik)

Die Bewegung einer Punktmasse auf einer Geraden (z.B.  $x$ -Richtung) wird durch die **Ort-Zeit-Funktion**  $x(t)$  vollständig beschrieben. Für den Fall einer Schwingung beschreibt  $x(t)$  beispielsweise die momentane Auslenkung der schwingenden Punktmasse. Aus dieser Funktion lässt sich zu jedem Zeitpunkt die momentane Geschwindigkeit  $v_x$  und die momentane Beschleunigung  $a_x$  bestimmen. Es gilt:

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) \quad (1)$$

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = \dot{v}_x(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t) \quad (2)$$

Im weiteren Verlauf verwenden wir die Punkt-Notation zur Kennzeichnung von Ableitungen. Die Geschwindigkeit lässt sich als Bewegungszustand auffassen und die Beschleunigung gibt Aufschluss über die Änderung des Bewegungszustandes. Letztere ist entscheidend für die Frage nach der Ursache von Bewegungsabläufen, wie im nächsten Unterabschnitt deutlich wird.

### 1.2. Das Newtonsche Grundgesetz der Mechanik - die Bewegungsgleichung

Der Bewegungszustand ändert sich durch das Einwirken äußerer Kräfte. Für die eindimensionale Bewegung gilt das Newtonsche Grundgesetz in der folgenden Form:

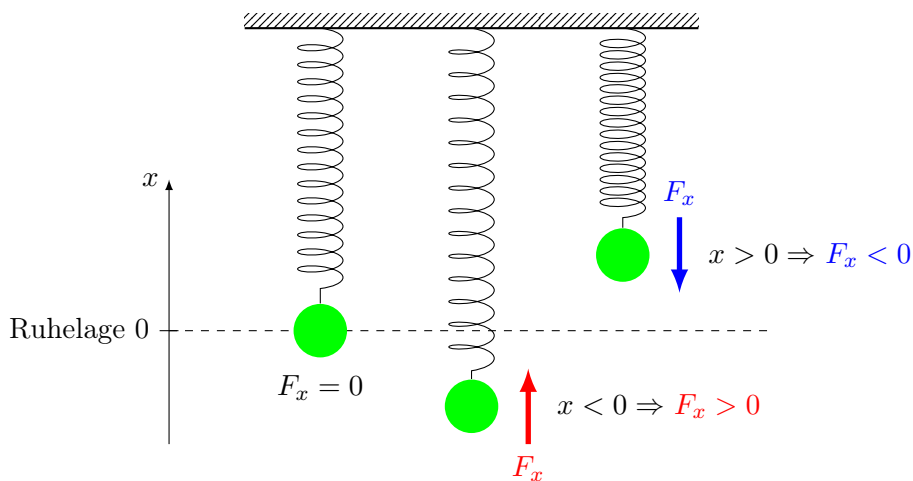
$$F_x = ma_x = m\ddot{x}. \tag{3}$$

Diese Gleichung verknüpft Ursache mit Wirkung, d.h. auf der linken Seite steht als Ursache die von außen auf den Massenpunkt einwirkende Kraft  $F_x$  und auf der rechten Seite die erfahrene Beschleunigung  $\ddot{x}$  als entsprechende Wirkung, die in ihrem Ausmaß von der Trägheit des Massenpunktes, also seiner Masse  $m$ , abhängt.

Wirkt keine äußere Kraft, so ergibt sich auch keine Beschleunigung - der Bewegungszustand ändert sich nicht und die Geschwindigkeit bleibt demzufolge konstant. Für den vorliegenden Versuch sind allerdings Schwingungsbewegungen von Interesse, also solche mit periodisch sich ändernden Bewegungszuständen, die durch äußere, stets der momentanen Auslenkung entgegen gerichtete Kräfte zustande kommen. Im folgenden Abschnitt wollen wir die Bewegungsgleichung für eine Schwingungsbewegung aufstellen und durch deren Lösung die Ort-Zeit-Funktion bestimmen.

### 1.3. Lineare, ungedämpfte Schwingungen

Wirkt auf einen Körper eine Kraft, die proportional zu seiner Auslenkung aus der Ruhelage ist und entgegen der Auslenkung wirkt (rücktreibende Kraft), so schwingt der Körper harmonisch. Als einfaches Modell betrachten wir den Federschwinger (Abb. 1).



**Abb. 1:** Modell des Federschwingers mit der Federkonstante  $k$ : Rücktreibende Kraft  $F_x$  in Abhängigkeit von der momentanen Auslenkung  $x(t)$ .

Als äußere Kraft  $F_x$ , die von der Auslenkung  $x$  des Federschwingers mit der Federkonstanten  $k$  abhängt gilt (bei nicht zu großen Dehnungen) bekanntlich:

$$F_x = -kx. \tag{4}$$

Wie aus Abbildung 1 hervorgeht, ist die Kraft der Auslenkung stets entgegengerichtet und erfordert deshalb ein Minuszeichen. Einsetzen in das Newtonsche Grundgesetz (3) ergibt:

$$F = m\ddot{x} = -kx \tag{5}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \tag{6}$$

Es handelt sich um eine sogenannte gewöhnliche lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung, die sich durch Integration, wie eventuell durch (1, 2) suggeriert, leider nicht lösen lässt. Da die Ort-Zeit-Funktion eine harmonische Schwingung beschreiben muss, wird mit etwas Intuition klar, dass sie im Grunde die folgende Form annimmt:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0). \tag{7}$$

Hierbei stellt  $x_0$  die Amplitude (maximale Auslenkung) und  $\theta_0$  den Phasenwinkel, der die momentane Auslenkung zur Zeit  $t = 0$  bestimmt, dar. Diese beiden Parameter sind frei wählbar und werden durch zwei Anfangsbedingungen (z.B. für Ort und Geschwindigkeit) festgelegt. Da es sich um eine Differenzialgleichung zweiter Ordnung handelt, sind es genau zwei freie Parameter. Die Kreisfrequenz  $\omega_0$  bzw. die Periodendauer  $T_0$  ist hingegen nicht frei wählbar, sondern ist durch die Physik des Schwingers gegeben:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{8}$$

Von Gültigkeit dieser Lösung kann man sich schnell durch Einsetzen von (7) in (6) überzeugen.

## 2. Methode der linearen Regression

Bei Wiederholungsmessungen unter identischen Bedingungen ist der Mittelwert aller Messwerte die geeignete Größe, welche mit allen statistischen Schwankungen am besten verträglich ist. Anders ausgedrückt gleicht der Mittelwert die statistischen Abweichungen optimal aus.

Eine ganz ähnliche Frage stellt sich nun bei der Messung von zwei Größen, wobei eine in bestimmter Weise variiert wird (in diesem Versuch ist das die Masse). Zeigt die Messung, dass es einen Zusammenhang gibt, stellt sich die Frage welche Funktion diesen optimal beschreibt. Diese Funktion wird ermittelt mit dem Ziel, die statistischen Abweichungen der Messpunkte zu den entsprechenden Funktionswerten zu minimieren. In Analogie zum Mittelwert kommt es auch hier zum bestmöglichen Ausgleich aller statistischen Abweichungen. Daher spricht man auch von Ausgleichsrechnung oder Ausgleichskurven/-geraden.

Das Verfahren der Ausgleichsrechnung wird of auch als Regression bezeichnet. Dieser Begriff bezieht sich darauf, dass die Gesamtheit einer Messreihe bestehend aus einer Vielzahl von Messpunkten auf wenige Parameter im Rahmen eines Modells zurückgeführt wird (Datenreduktion). Die Methode der linearen Regression soll bei diesem Versuch sowohl auf grafischem als auch auf rechnerischem Wege durchgeführt werden mit dem Ziel, die Parameter der Ausgleichsgeraden sowie deren statistische als auch systematische Messunsicherheiten zu bestimmen. Im Anfängerpraktikum beschränken wir uns auf den linearen Ausgleich, was bei nichtlinearen Zusammenhängen nur bei möglicher Linearisierung anwendbar ist:

Messwerte	nichtlinear	⇒	linearisiert	linearer Ausgleich
$(m_i, T_i)$	$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$	⇒	$T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k}$	$(m_i, T_i^2)$
$(T_i, p_i)$	$p = p_0 \exp\left(\frac{\alpha}{T}\right)$	⇒	$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{\alpha}{T}$	$\left(\frac{1}{T}, \ln\left(\frac{p}{p_0}\right)\right)$
$(\beta_i, \alpha_i)$	$\alpha = \arcsin(n \sin \beta)$	⇒	$\sin(\alpha) = n \sin \beta$	$(\sin(\beta_i), \sin(\alpha_i))$

**Tabelle 1:** Beispiele zur Linearisierung von nichtlinearen Zusammenhängen.

## 2.1. Grafischer Ausgleich

1. Tragen Sie die Messwerte in ein Diagramm mit geeigneter Achseneinteilung ein. Nehmen Sie bei nicht-linearen Zusammenhängen sofern möglich eine Linearisierung vor.
2. Zeichnen Sie sofern bekannt die statistischen Messunsicherheiten in Form von Fehlerbalken ( $\pm 1\sigma$ ) ein. Achtung: systematische Messunsicherheiten tragen nicht zu den Fehlerbalken bei.
3. Nach Augenmaß wird eine Ausgleichsgerade durch die Messpunkte gelegt, sodass in etwa die Gesamtheit der (quadratischen) Abweichungen zwischen den Messpunkten und der Geraden minimal ist. Dies entspricht analog der Bildung des Mittelwertes aus einer Messreihe von Wiederholungsmessungen. Sollten die statistischen Unsicherheiten in den Messpunkten unterschiedlich sein, so tragen die kleineren Unsicherheiten mit einem stärkeren Gewicht bei. Beachten Sie weiterhin, dass die Ausgleichsgerade nicht immer zwingend durch null gehen muss.
4. Zeichnen Sie ein möglichst großes Anstiegsdreieck ein und bestimmen Sie den Anstieg sowie das Absolutglied der Ausgleichsgeraden. Kennzeichnen Sie die abgelesenen Werte.

## 2.2. Grafische Ermittlung der statistischen Messunsicherheiten

Die statistischen Unsicherheiten des Anstieges und des Absolutgliedes ergeben sich aus der Streuung der Messpunkte bezüglich der Ausgleichsgerade. Das Vorgehen besteht nun darin, den Streubereich in Form eines  $\pm\sigma$ -Unsicherheitschlauchs, der die Ausgleichsgerade umgibt, zu bestimmen und darin Geraden mit maximal und minimal möglichen Anstiegen einzupassen. Die Messunsicherheiten für die Parameter der Ausgleichsgeraden ergeben sich näherungsweise wie folgt:

$$\Delta a_{\text{stat}} \approx \frac{1}{2} \frac{|a_{\text{max}} - a_{\text{min}}|}{\sqrt{n}}$$

$$\Delta b_{\text{stat}} \approx \frac{1}{2} \frac{b_{\text{max}} - b_{\text{min}}}{\sqrt{n}}$$

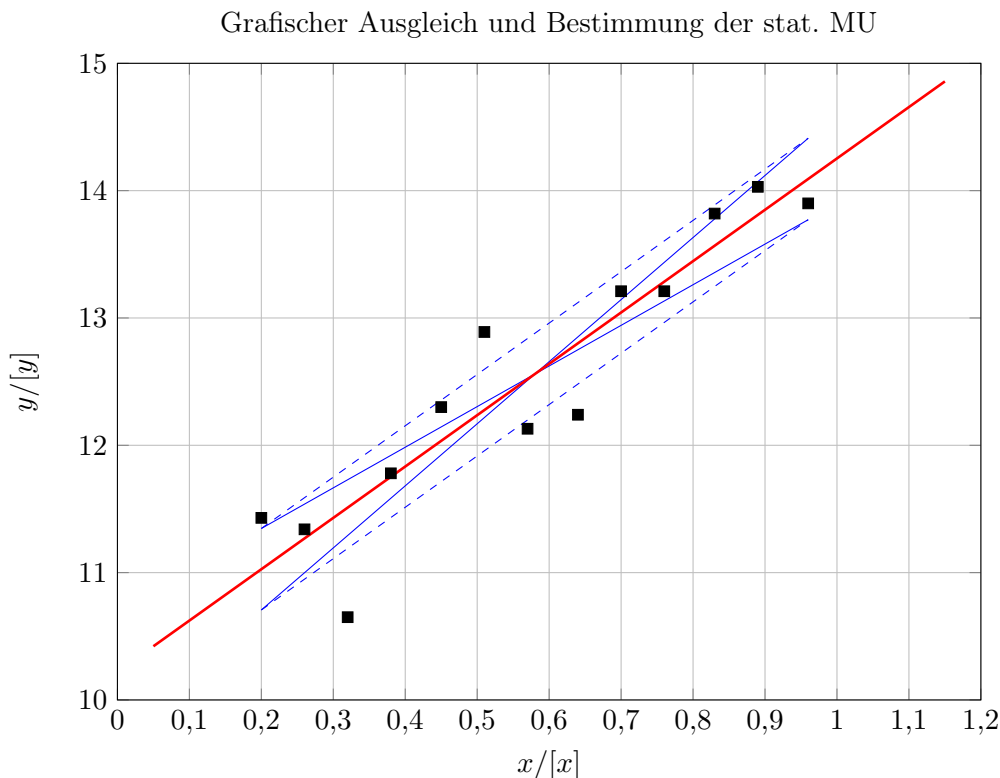
Der Term  $\sqrt{n}$  in den Nennern trägt der Tatsache Rechnung, dass mit wachsender Anzahl von Messpunkten in einer Messreihe, die statistischen Messunsicherheiten kleiner werden müssen. Anders argumentiert, entspricht die Breite des Unsicherheitsbereichs zunächst nur der Standardabweichung einer Einzelmessung - von Interesse ist aber die Standardabweichung der Mittelwerte. Da es sich um eine Näherung handelt, kann man bei wenigen Messwerten ( $< 10$ )  $n \approx 1$  setzen.

Für die Bestimmung des Unsicherheitschlauchs gibt es kein einheitliches Rezept, da die Ausgangssituationen oft sehr verschieden sein können. Wir betrachten exemplarisch im Folgenden vier Fälle und stellen die Vorgehensweise im einzelnen vor. Wir gehen davon aus, dass die Messunsicherheiten in Ordinate-Richtung bestimmend sind. Sollten Unsicherheiten in Abszisse-Richtung eine Rolle spielen, lässt sich dieses Verfahren verallgemeinern (siehe Behandlung der systematischen Unsicherheiten).

### 2.2.1. Fall 1: Messunsicherheit konstant aber unbekannt

Für den Fall, dass genügend viele Messwertepaare vorliegen ( $> 10$ ) und unter der Annahme, dass diese mit gleicher Standardabweichung bezüglich der Ausgleichsgeraden schwanken, ist das folgende Vorgehen anzuwenden:

Für die Bestimmung der **statistischen Messunsicherheiten** wird die Ausgleichsgerade symmetrisch nach oben und unten verschoben, sodass ca. 68% aller Messwerte (ohne Fehlerbalken) eingegrenzt werden (Abb. 2). In Abszissenrichtung ist dieser Bereich durch den ersten und letzten Messwert eingegrenzt. In dem resultierenden Unsicherheitsbereich werden Geraden des minimal und maximal möglichen Anstiegs identifiziert (Abb. 2).



**Abb. 2:** Durchführung eines grafischen Ausgleiches und der Ermittlung des statistischen Messunsicherheit im Anstieg und Absolutglied: Festlegung der Ausgleichsgeraden (rot), Konstruktion des Unsicherheitsbereichs (gestrichelt) und Ermittlung der Grenzgeraden (blau).

Hierbei sollte überprüft werden, dass die Grundannahme der gleichmäßigen Statistik insbesondere bei den großen Abweichungen konsistent zu den Messungen ist. Dabei sollten im Mittel nur 5% der Messpunkte außerhalb des  $2\sigma$ -Bereichs liegen. Im vorliegenden Fall liegt von den 13 Messpunkten 1 Wert außerhalb  $2\sigma$ . Dies ist statistisch mit einer Wahrscheinlichkeit von (bei  $p = 0,05$ , Binomialverteilung):

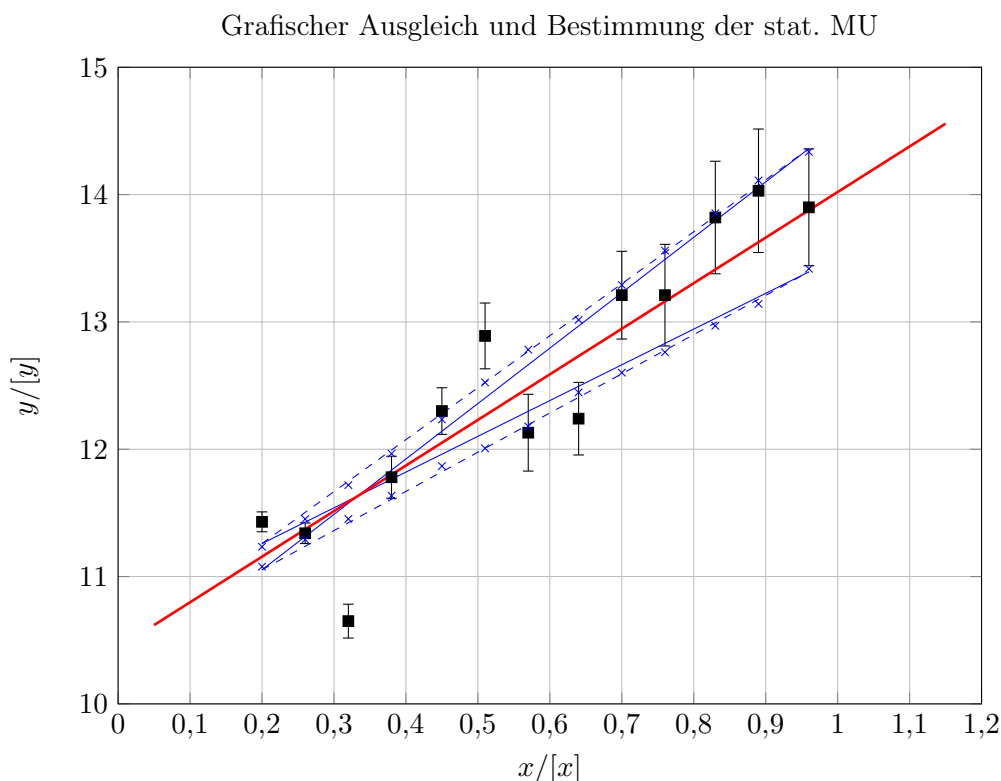
$$P(1 \text{ von } 13 \text{ Messwerten außerhalb } 2\sigma) = \binom{13}{1} p^1 (1 - p)^{12} = 35,1\%$$

möglich. In diesem Fall, stehen die Schwankungen der Messdaten bezüglich der Ausgleichsgeraden nicht in einem offensichtlichen Widerspruch zur zugrundeliegenden Statistik, obwohl die Wahrscheinlichkeit, dass keine Messwerte außerhalb liegen, dennoch höher ist (siehe Tab. 2).

Die Annahme der gleichen Statistik in jedem Messpunkt ist gerade bei Linearisierungen oft nicht mehr zu rechtfertigen. In diesen Fällen muss die statistische Messunsicherheit für jeden Messpunkt bestimmt werden und das folgende Verfahren angewandt werden.

2.2.2. Fall 2: Messunsicherheit für jeden Messpunkt bekannt

Ist die statistische Messunsicherheit in jedem Messpunkt bekannt, kann i.d.R. die Konstruktion des Unsicherheitsschlauchs durchgeführt werden (Abb. 3). Für jeden Messpunkt trägt man ausgehend von der Ausgleichsgeraden im Abstand von einer Fehlerbalkenlänge den oberen und unteren Stützpunkt (blaue Kreuze) auf und gleicht mögliche Variationen, die sich aus der Schätzung der Unsicherheiten ergeben können, durch Geraden aus (gestrichelt). Analog zum ersten Fall können nun Geraden des maximalen und minimalen Anstieges eingepasst werden.



**Abb. 3:** Durchführung eines grafischen Ausgleiches und der Ermittlung des statistischen Messunsicherheit im Anstieg und Absolutglied (gleiche Messpunkte wie in Fall 1, stat. Messunsicherheit proportional zu  $x$ ): Festlegung der Ausgleichsgeraden (rot), Konstruktion des Unsicherheitsbereichs (gestrichelt) und Ermittlung der Maximal- und Minimalgeraden (blau).

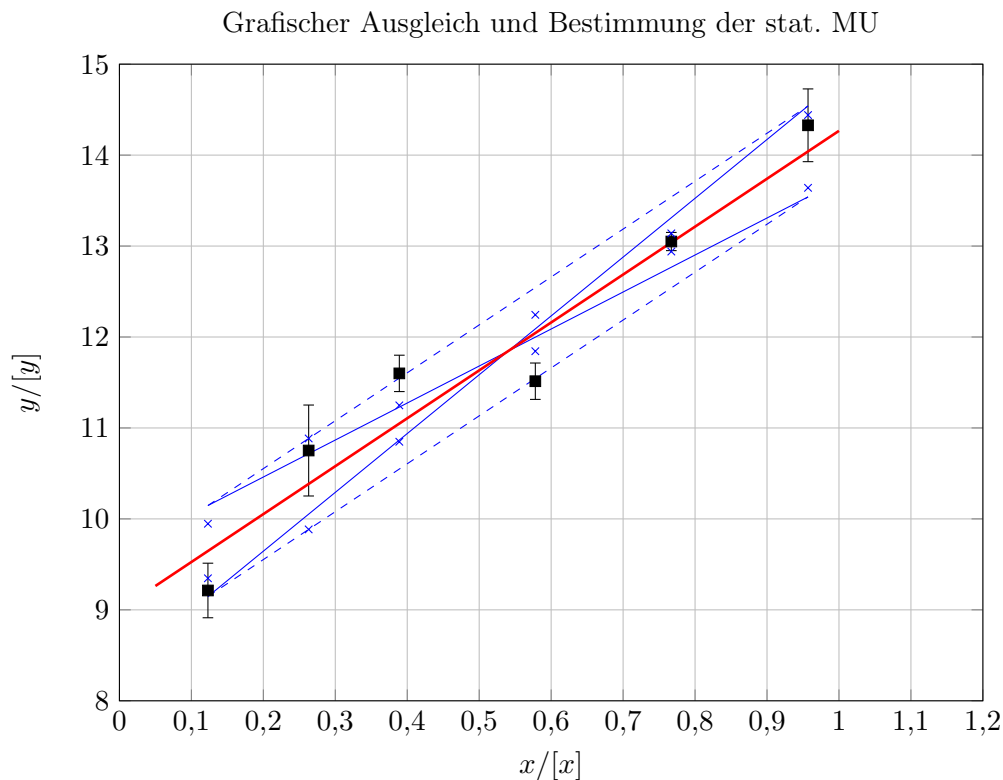
In diesem Fall wächst die statistische Messunsicherheit proportional zu  $x$ , was durchaus eine Folge von Linearisierung sein kann. Auch hier kann schnell geprüft werden, ob etwa 68% der Messwertpunkte (ohne Fehlerbalken) im  $\pm 1\sigma$  Unsicherheitsbereich (gestrichelte Geraden) liegen (in diesem Fall sind es 7 von 13). Weiterhin sollten auch die Ausreißer außerhalb von  $\pm 2\sigma$  untersucht werden. Da sowohl die Längen der Fehlerbalken als auch der Unsicherheitsbereich  $\pm 1\sigma$  entsprechen, erkennt man diese leicht anhand des fehlenden Überlapps. Im vorliegenden Beispiel sind es nun 3 von 13 Messwerten, die außerhalb von  $2\sigma$  liegen. Dies ist statistisch mit einer Wahrscheinlichkeit von ( $p = 0,05$ ):

$$P(3 \text{ von } 13 \text{ Messwerten außerhalb } 2\sigma) = \binom{13}{3} p^3(1 - p)^{10} = 2,1\%$$

möglich. Dies erscheint im Vergleich zum vorherigen Beispiel deutlich unwahrscheinlicher. Dennoch ist es nicht ausgeschlossen, dass sich die Abweichungen rein zufällig ergeben haben. Der weitere Umgang mit solchen Resultaten wird unten behandelt.

### 2.2.3. Fall 3: Umgang mit wenigen Messwerten

Mitunter kann es auch passieren, dass nur wenige Wertepaare ( $<10$ ) verfügbar sind, die einer deutlichen Streuung bezüglich der Ausgleichsgeraden unterworfen sind (Abb. 4) und selbst schwankende Messunsicherheiten aufweisen. Am ehesten lässt sich eine Ausgleichsgerade unter Berücksichtigung der Messunsicherheiten finden. Schwieriger gestaltet sich die Frage nach den Messunsicherheiten. Die stark schwankenden Messunsicherheiten, erlauben keinen linearen Unsicherheitschlauch, so dass im Sinne einer Maximalunsicherheit lediglich durch Parallelverschiebung der Bereich erfasst werden soll, der alle Messpunkte enthält. Dies führt natürlich zu einer Überabschätzung der statistischen Messunsicherheit der Regressionsparameter, die zwingend zu diskutieren ist (siehe unten).



**Abb. 4:** Durchführung eines grafischen Ausgleiches und der Ermittlung des statistischen Messunsicherheit im Anstieg und Absolutglied (wenige Messwerte, streuende stat. Messunsicherheiten): Festlegung der Ausgleichsgeraden (rot), Konstruktion des Unsicherheitsbereichs (gestrichelt) und Ermittlung der Maximal- und Minimalgeraden (blau).

Offenbar liegen in diesem Fall 2 von 6 Messwerten außerhalb von  $2\sigma$ , dies ist statistisch mit einer Wahrscheinlichkeit (bei  $p = 0,05$ ) von

$$P(2 \text{ von } 6 \text{ Messwerten außerhalb } 2\sigma) = \binom{6}{2} p^2 (1-p)^4 = 3,1\%$$

möglich.

### 2.2.4. Fall 4: Messpunkte liegen nahezu exakt auf der Ausgleichsgeraden

In einigen Fällen zeichnet sich schon nach wenigen Messungen ab, dass die Messpunkte sehr gut verträglich mit einer Geraden sind, sodass die Konstruktion eines Unsicherheitsbereichs zeichnerisch nicht wirklich umsetzbar ist. Dies muss sich natürlich auch in der Geringfügigkeit der entsprechenden



Fehlerbalken zeigen (siehe oben). Hierbei ist die statistische Unsicherheit der gesuchten Parameter letztlich nur noch durch die Zeichen-/Ablesegenauigkeit (halbe Kästchenbreite) begrenzt, die allerdings rechnerisch erfasst werden sollte:

Seien  $(x_0, y_0)$  und  $(x_1, y_1)$  die Referenzpunkte für die Berechnung des Anstieges, so ergibt sich beispielsweise der maximal mögliche Anstieg bei  $x_0 < x_1$  und  $y_0 < y_1$  durch:

$$b_{\max} = \frac{y_1 - y_0 + \Delta y_s}{x_1 - x_0 - \Delta x_s}. \quad (9)$$

Die kleinste Skaleneinteilung in  $x$ - und  $y$ -Richtung ist mit  $\Delta x_s$  bzw.  $\Delta y_s$  gegeben. Analoge Überlegungen ergeben sich für den minimalen Anstieg.

### 2.2.5. Umgang mit großen Messabweichungen (Ausreißer)

In den obigen Fällen 2 und 3 wurden Messpunkte außerhalb von  $\pm 2\sigma$  identifiziert, die sich bei gegebener Anzahl der Messwerte mit nur geringfügiger Wahrscheinlichkeit aus reinen statistischen Schwankungen ergeben (Tab. 2). Trotz dieser Geringfügigkeit kann damit nicht ausgeschlossen werden, dass es sich um mögliche Schwankungen handelt, die mit der Statistik verträglich sind.

In diesen Fällen muss abgeklärt werden, ob diese Abweichungen tatsächlich statistischer Natur oder auf bislang unerkannte systematische Abweichungen bzw. gar Messfehler zurückzuführen sind. Im Zweifelsfall müsste eigentlich die gesamte Messreihe wiederholt werden, was für das Praktikum jedoch keine taugliche Lösung ist. Vielmehr empfiehlt es sich, nur die betreffenden Messpunkte mehrmals nachzumessen und den Mittelwert aus *allen* Werten zu bilden.

Zeigt sich, dass die Mittelwerte innerhalb der entsprechenden doppelten Standardabweichungen (Mittelwerte) bezüglich der Ausgleichsgeraden befinden, kann davon ausgegangen werden, dass die großen Abweichungen statistischer Natur sind. In diesem Fall wird die lineare Regression mit den genauer gemessenen Messpunkten und deren statistische Messunsicherheiten (Gewichtung) wiederholt.

Sollte ein Messpunkt mit großen Abweichungen auch nach Wiederholungsmessungen außerhalb des nun genauer bestimmten statistischen Unsicherheitsbereichs liegen, sind die folgenden Überlegungen anzustellen:

1. Sind grobe Messfehler unterlaufen?
2. Handelt es sich bei den großen Abweichungen um bislang nicht beachtete systematische Abweichungen?
3. Ist die Annahme des linearen Verlaufs gerechtfertigt (andere Physik)?

Messpunkte, die trotz Wiederholungsmessung unerwartet große Abweichungen zeigen, sind als Ausreißer kenntlich zu machen. Es ist zu überlegen, ob diese im Rahmen eines erweiterten Modells in die Auswertung einbezogen werden können oder von der Auswertung ausgeschlossen werden müssen. In der Diskussion ist zu begründen, warum bestimmte Messwerte nicht in die Auswertung einbezogen wurden.

Zur Beurteilung, ob eine bestimmte Anzahl von Messwerten außerhalb des  $2\sigma$  Bereichs mit hoher Wahrscheinlichkeit zu erwarten sind, sind die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten in folgender Tabelle (Tab. 2) dargestellt.

Gesamtzahl der Messwerte	Anzahl der Messwerte außerhalb $2\sigma$				
	0	1	2	3	4
1	0,95000	0,05000			
2	0,90250	0,09500	0,00250		
3	0,85738	0,13538	0,00713	0,00013	
4	0,81451	0,17148	0,01354	0,00048	0,00001
5	0,77378	0,20363	0,02143	0,00113	0,00003
6	0,73509	0,23213	0,03054	0,00214	0,00008
7	0,69834	0,25728	0,04062	0,00356	0,00019
8	0,66342	0,27933	0,05146	0,00542	0,00036
9	0,63025	0,29854	0,06285	0,00772	0,00061
10	0,59874	0,31512	0,07463	0,01048	0,00096
11	0,56880	0,32931	0,08666	0,01368	0,00144
12	0,54036	0,34128	0,09879	0,01733	0,00205
13	0,51334	0,35123	0,11092	0,02140	0,00282
15	0,46329	0,36576	0,13475	0,03073	0,00485
17	0,41812	0,37411	0,15752	0,04145	0,00764
20	0,35849	0,37735	0,18868	0,05958	0,01333
30	0,21464	0,33890	0,25864	0,12705	0,04514
50	0,07694	0,20249	0,26110	0,21987	0,13598
100	0,00592	0,03116	0,08118	0,13958	0,17814

**Tabelle 2:** Wahrscheinlichkeiten (Binomialverteilung), dass eine bestimmte Anzahl von Messpunkten außerhalb von  $2\sigma$  liegt.

**Wichtig:** Denken Sie bitte immer daran, unabhängig davon wie Sie im Weiteren verfahren, dass Ausreißer unter keinen Umständen aus dem Protokoll gelöscht werden dürfen. Wenn sich herausstellt, dass es sich um Messfehler handelt, dürfen die Werte mit entsprechendem Vermerk durchgestrichen werden. Bedenken Sie auch, dass sich nicht selten einstige Messfehler später als neue Physik herausgestellt hatten.

### 2.3. Grafische Ermittlung der systematischen Messunsicherheiten

Zur Bestimmung der systematischen Messunsicherheiten geht man von der ermittelten Ausgleichsgeraden  $f$  aus und konstruiert gemäß der Herstellerangaben ( $1/\sqrt{3}$  nicht vergessen!) einen Unsicherheitsschlauch (Abb. 5). Im Grundpraktikum gehen wir davon aus, dass die systematischen Abweichungen höchstens linear von der Ausgleichsgerade abweichen. Daher genügt es, die beiden äußeren Messpunkte  $(x_1, y_1)$  und  $(x_n, y_n)$  für die Bestimmung der Stützpunkte  $P_{1\pm}$  und  $P_{n\pm}$  des linearen Unsicherheitsschlauchs mithilfe der jeweiligen systematischen Messunsicherheiten zu betrachten. Um eine Unterabschätzung zu vermeiden, sollte zwischen positivem und negativem Anstieg der Ausgleichsgerade wie folgt unterschieden werden (siehe Abb. 5):

- positiver Anstieg der Ausgleichsgeraden:

$$\begin{aligned}
 P_{1\pm} &= (x_1 \mp \Delta x_{\text{syst},1}, f(x_1) \pm \Delta y_{\text{syst},1}) \\
 P_{n\pm} &= (x_n \mp \Delta x_{\text{syst},n}, f(x_n) \pm \Delta y_{\text{syst},n})
 \end{aligned}$$

- negativer Anstieg der Ausgleichsgeraden:

$$\begin{aligned}
 P_{1\pm} &= (x_1 \pm \Delta x_{\text{syst},1}, f(x_1) \pm \Delta y_{\text{syst},1}) \\
 P_{n\pm} &= (x_n \pm \Delta x_{\text{syst},n}, f(x_n) \pm \Delta y_{\text{syst},n}).
 \end{aligned}$$

Die Ermittlung der systematischen Messunsicherheiten der Regressionsparameter erfolgt wieder anhand von Geraden mit maximal und minimal möglichem Anstieg. Hierbei unterscheiden wir zwischen verschiedenen Annahmen zur Korrelation. Die entsprechenden Geraden verlaufen durch die folgenden Punkte

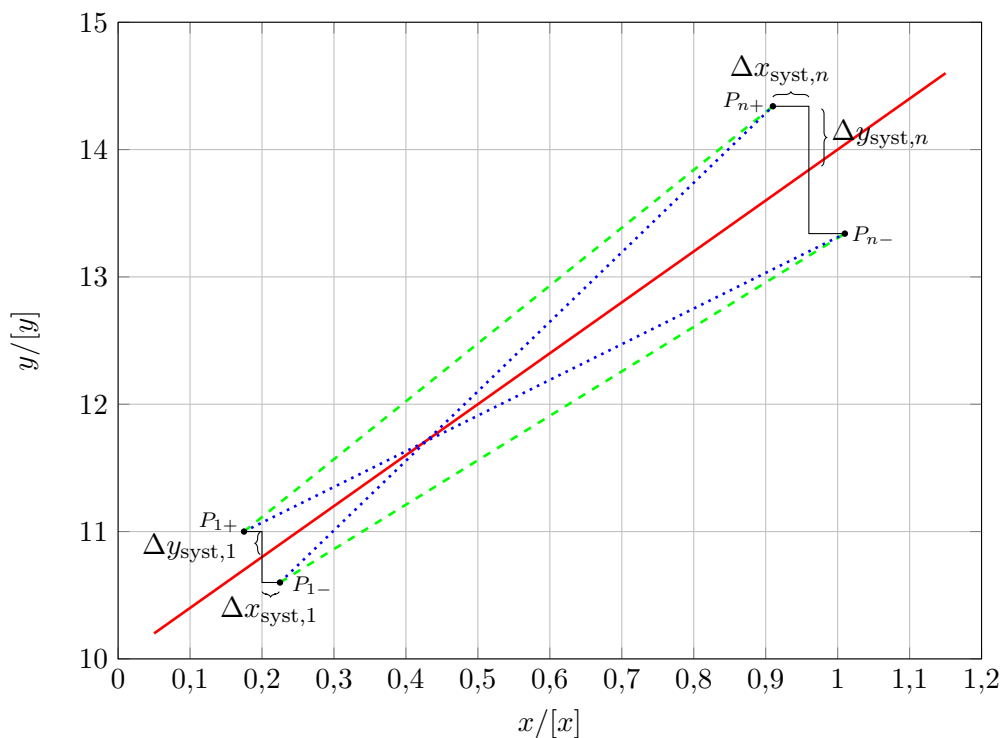
- vollständige Korrelation:  $P_{1,+}$  und  $P_{n,+}$  bzw.  $P_{1,-}$  und  $P_{n,-}$  (grün gestrichelt in Abb. 5)
- unkorreliert:  $P_{1,+}$  und  $P_{n,-}$  bzw.  $P_{1,-}$  und  $P_{n,+}$  (blau gepunktet in Abb. 5)
- korreliert in unbekannter Weise:  $P_{1,+}$  und  $P_{n,-}$  bzw.  $P_{1,-}$  und  $P_{n,+}$  (blau gepunktet in Abb. 5)

Aus den entsprechenden Geraden ergeben sich die systematischen Messunsicherheiten wie folgt:

$$\Delta a_{\text{syst}} \approx \frac{1}{2} |a_{\text{max}} - a_{\text{min}}|$$

$$\Delta b_{\text{syst}} \approx \frac{1}{2} (b_{\text{max}} - b_{\text{min}}).$$

Grafischer Ausgleich und Bestimmung der syst. MU



**Abb. 5:** Ermittlung der systematischen Messunsicherheiten: Festlegung der Ausgleichsgeraden (rot), Konstruktion des Unsicherheitsschlauches (gestrichelt) ausgehend von der Ausgleichsgeraden - beispielhaft für den Fall, dass die systematischen Messunsicherheiten mit wachsendem  $x$  linear ansteigen (z.B. Herstellerangaben für Spannungsmessung mit einem Voltmeter). Die gepunkteten Linien entsprechen den Geraden mit maximal und minimal möglichem Anstiegen für unkorrelierte oder in unbekannter Weise korrelierte Messwerte. Die Grenzgeraden (grün gestrichelt) sind im vollständig korrelierten Fall zu verwenden.

### 2.4. Rechnerischer Ausgleich

Wir betrachten eine Messreihe bestehend aus  $n$  Messwertepaaren der folgenden Art:

$x$	$y$	$\Delta y_{\text{stat}}$
$x_1$	$y_1$	$\Delta y_1$
$x_2$	$y_2$	$\Delta y_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_n$	$y_n$	$\Delta y_n$

Weiterhin zeige eine grafische Darstellung, dass mit hoher Wahrscheinlichkeit ein linearer Zusammenhang zwischen den Messgrößen  $x$  und  $y$  besteht. Somit ergibt sich das Ziel die entsprechende Ausgleichsgerade  $y = f(x) = a + bx$ , zu finden. Unter den folgenden Annahmen:

1. die statistischen Messunsicherheiten tragen nur in  $y$ -Richtung bei, d.h.  $\Delta y_{\text{stat}} \gg b \cdot \Delta x_{\text{stat}}$ ,
2. die Messwerte sind Gauß-verteilt mit der Standardabweichung  $\sigma_i = \Delta y_i$  und dem Mittelwert als Funktionswert der Ausgleichsgerade  $\bar{y}_i = f(x_i)$  und
3. die statistischen Messunsicherheiten sind unkorreliert,

ergeben sich nach Minimierung der Summe der quadratischen Abweichungen zwischen der Ausgleichsgeraden und den Messpunkten (Anhang A) unter Berücksichtigung der Gewichtung

$$w_i = \frac{1}{\Delta y_i^2}$$

die folgenden Formeln für den Anstieg  $b$  und das Absolutglied  $a$ :

$$b = \frac{1}{D}(C_2 A_{11} - C_1 A_{12}) \quad (10)$$

$$a = \frac{1}{D}(C_1 A_{22} - C_2 A_{12}). \quad (11)$$

Die Parameter lauten:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \sum_i^n w_i & C_1 &= \sum_i^n w_i y_i \\
 A_{12} &= \sum_i^n w_i x_i & C_2 &= \sum_i^n w_i y_i x_i \\
 A_{22} &= \sum_i^n w_i x_i^2 & D &= A_{11} A_{22} - A_{12}^2.
 \end{aligned}$$

Diese ergeben sich unter Verwendung der Messwerte in  $x$ - und  $y$ -Richtung und der statistischen Unsicherheiten in  $y$ -Richtung. Dazu empfiehlt sich die Erstellung der folgenden Tabelle mithilfe eines gängigen Tabellenkalkulationsprogramms:

$x$	$y$	$\Delta y$	$w = 1/\Delta y^2$	$w \cdot x$	$w \cdot x^2$	$w \cdot y$	$w \cdot xy$
$x_1$	$y_1$	$\Delta y_1$	$w_1$	$w_1 \cdot x_1$	$w_1 \cdot x_1^2$	$w_1 \cdot y_1$	$w_1 \cdot x_1 \cdot y_1$
$x_2$	$y_2$	$\Delta y_2$	$w_2$	$w_2 \cdot x_2$	$w_2 \cdot x_2^2$	$w_2 \cdot y_2$	$w_2 \cdot x_2 \cdot y_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_n$	$y_n$	$\Delta y_n$	$w_n$	$w_n \cdot x_n$	$w_n \cdot x_n^2$	$w_n \cdot y_n$	$w_n \cdot x_n \cdot y_n$
$\sum_{i=1}^n =$			$A_{11}$	$A_{12}$	$A_{22}$	$C_1$	$C_2$

**2.4.1. Berechnung der zufälligen Messunsicherheiten**

Für die statistischen Messunsicherheiten für  $b$  und  $a$  ergeben sich durch Anwendung der Gaußschen Fehlerfortpflanzung auf die Regressionsformeln (Anhang A) die folgenden Ausdrücke

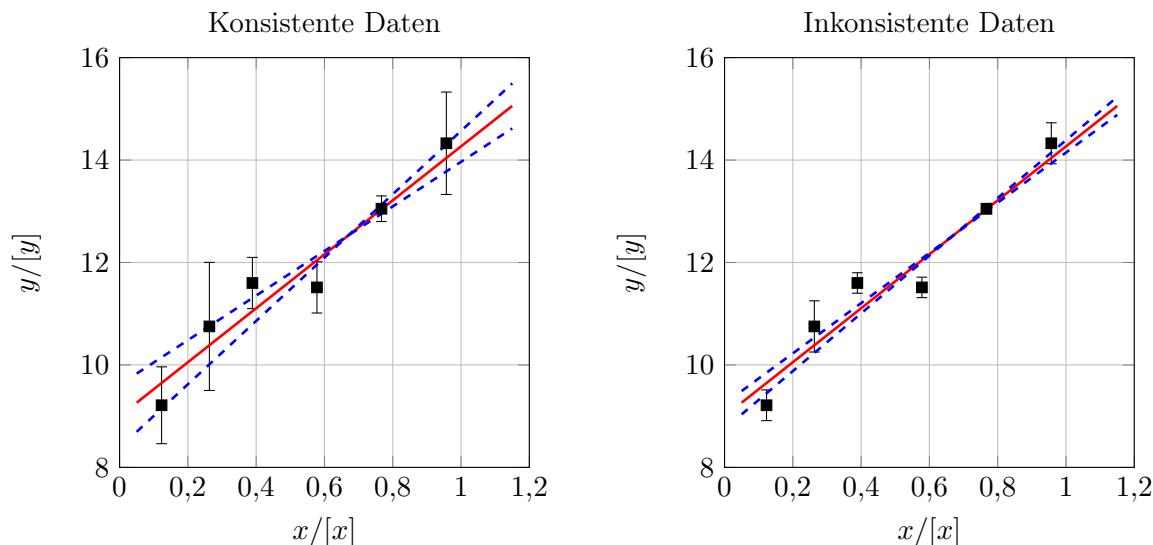
$$\Delta b_{\text{stat}} = \sqrt{\frac{A_{11}}{D}} \quad (12)$$

$$\Delta a_{\text{stat}} = \sqrt{\frac{A_{22}}{D}} \quad (13)$$

Für die Bestimmung der Messunsicherheiten müssen also lediglich die Ausdrücke  $A_{11}$ ,  $A_{22}$  und  $D$  (Determinante) berechnet werden.

**2.4.2. Problem bei widersprüchlichen Daten**

Anhand der in Abb.4 dargestellten Messpunkte soll im Weiteren auf ein Problem des rechnerischen Ausgleichs hingewiesen werden. Als Grundannahme wurde vorausgesetzt, dass es sich um Gaußverteilte Zufallsvariablen handelt, die mit den entsprechenden Standardabweichungen ( $\sigma_i = \Delta y_i$ ) bezüglich der Ausgleichsgeraden streuen. In der linken Darstellung von Abb. 6 ist dies mit hoher Wahrscheinlichkeit erfüllt, da 6 von 6 Messwerten innerhalb des  $2\sigma$ -Bereichs liegen (nach Tab. 2 mit 73,5%) und die statistischen Messunsicherheiten (blau gestrichelt) sind somit plausibel. In der rechten Darstellung sind die Fehlerbalken aus didaktischen Gründen herunter skaliert, sodass 2 von 6 Messwerten außerhalb von  $2\sigma$  liegen. Hier trifft dies nur noch mit einer Wahrscheinlichkeit von 3,1% zu. Obwohl die Ausgleichsgerade unter Verwendung der entsprechenden Gewichtung möglicherweise richtig berechnet wurde, ist die Berechnung der Messunsicherheit in diesem Fall zweifelhaft. Der Widerspruch ergibt sich daraus, dass die relativ großen Abweichungen bezüglich der Ausgleichsgeraden im Missverhältnis zu den Fehlerbalken stehen. Daher sind in diesem Fall obige Maßnahmen zum Umgang mit großen Messabweichungen zu ergreifen.



**Abb. 6:** Lineare Regression (rechnerisch) mit identischen Messwerten aber unterschiedlichen Messunsicherheiten: Fall 1 (links): Konsistente Daten (alle Messwerte innerhalb  $2\sigma$ ) liefern realistische Maximal- und Minimal-Geraden (gestrichelt). Fall 2 (rechts): Inkonsistente Daten liefern zu geringfügig abweichende Maximal und Minimalgeraden.

### 2.4.3. Ermittlung der systematischen Messunsicherheiten

Die systematischen Messunsicherheiten berechnen sich in der gleichen Weise so wie sie mit der grafischen Methode zeichnerisch umgesetzt. Unterschiede zur rechnerischen Variante entstehen ggf. durch zeichnerische Ungenauigkeiten sowie durch eine möglicherweise geringfügig abweichende Ausgleichsgerade.

## A. Herleitung der Regressionsformeln

Unter der Annahme, dass alle Abweichungen der Messpunkte von der zu berechnenden Ausgleichsgeraden derselben Statistik genügen (gleiche Verteilung, gleiche Standardabweichungen), lassen sich die Anstieg und Absolutglied in der folgenden Weise bestimmen:

$$f = \sum_{i=1}^n (y_i - (bx_i + a))^2 \rightarrow \min. \tag{14}$$

Da die Annahme gleicher statistischer Messunsicherheiten in der Regel z.B. aufgrund von Linearisierung nicht erfüllt ist, müssen die einzelnen Beiträge zu obiger Summe gewichtet werden, sodass Messwerte mit größerer Unsicherheit mit kleinerem Gewicht eingehen. Dies erfolgt mit den Standardabweichungen  $\sigma_i = \Delta y_i$

$$f = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - (bx_i + a))^2}{\Delta y_i^2} \rightarrow \min. \tag{15}$$

Mit den Gewichten  $w_i = \frac{1}{\Delta y_i^2}$  und dem Nullsetzen der entsprechenden partiellen Ableitungen ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = -2\left(\sum_i w_i y_i - b \sum_i w_i x_i - a \cdot \sum_i w_i\right) = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = -2\left(\sum_i w_i x_i y_i - b \sum_i w_i x_i^2 - a \cdot \sum_i w_i x_i\right) = 0 \quad (17)$$

Daraus folgt nach kurzer Rechnung für die Parameter:

$$b = \frac{\sum_k w_k \sum_i w_i x_i y_i - \sum_i w_i x_i \sum_j w_j y_j}{\sum_k w_k \sum_i w_i x_i^2 - (\sum_i w_i x_i)^2} \quad (18)$$

$$a = \frac{\sum_i w_i y_i \sum_j w_j x_j^2 - \sum_i w_i x_i \sum_j w_j x_j y_j}{\sum_k w_k \sum_i w_i x_i^2 - (\sum_i w_i x_i)^2} \quad (19)$$

Mit den folgenden Konventionen lässt sich eine übersichtlichere Form finden:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \sum_i^n w_i & C_1 &= \sum_i^n w_i y_i \\ A_{12} &= \sum_i^n w_i x_i & C_2 &= \sum_i^n w_i y_i x_i \\ A_{22} &= \sum_i^n w_i x_i^2 & D &= A_{11} A_{22} - A_{12}^2 \end{aligned}$$

$$b = \frac{1}{D}(C_2 A_{11} - C_1 A_{12}) \quad (20)$$

$$a = \frac{1}{D}(C_1 A_{22} - C_2 A_{12}) \quad (21)$$

Anhand dieser beiden Gleichungen erfolgt die Schätzung des Anstieges  $b$  und des Absolutgliedes  $a$ . Die entsprechenden Summen können mittels Tabellenkalkulation berechnet werden. Wie berechnet man nun die zufälligen Messunsicherheiten dieser Parameter?

### A.1. Berechnung der zufälligen Messunsicherheit

Unter der Annahme, dass keine Korrelationen vorliegen, lässt sich die allgemeine Fortpflanzungsformel

$$(\Delta F(y_1, \dots, y_n))^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\right)^2 \Delta y_i^2 + \sum_{i \neq j} \frac{\partial F}{\partial y_i} \frac{\partial F}{\partial y_j} \text{cov}(y_i, y_j) \quad (22)$$

umschreiben als:

$$(\Delta F(y_1, \dots, y_n))^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial y_i} \right)^2 \Delta y_i^2 \quad (23)$$

Die Abweichungen der  $y$ -Werte von der Ausgleichsgeraden werden als zufällig angenommen und die Standardabweichung der jeweiligen Verteilungen als bekannt vorausgesetzt. Nun wenden wir die Fortpflanzungsformel (Gl. 23) auf den Zusammenhang für den Anstieg  $b$  (Gl.18) an ( $F = b$ ). Mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial b}{\partial y_i} = \frac{w_i x_i \sum_k w_k - w_i \sum_j w_j x_j}{\sum_k w_k \sum_i w_i x_i^2 - (\sum_i w_i x_i)^2} = \frac{1}{D} (A_{11} w_i x_i - A_{12} w_i) \quad (24)$$

ergibt sich für das Quadrat von  $\Delta b$

$$\begin{aligned} \Delta b^2 &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial b}{\partial y_i} \right)^2 \Delta y_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{D^2} (A_{11} w_i x_i - A_{12} w_i)^2 \frac{1}{w_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{D^2} (A_{11}^2 w_i x_i^2 - 2A_{11} A_{12} w_i x_i + A_{12}^2 w_i) \\ &= \frac{1}{D^2} (A_{11}^2 A_{22} - 2A_{11} A_{12}^2 + A_{12}^2 A_{11}) \\ &= \frac{1}{D^2} A_{11} \underbrace{(A_{11} A_{22} - A_{12}^2)}_{=D} \\ &= \underline{\underline{\frac{A_{11}}{D}}} \end{aligned} \quad (25)$$

Als nächsten Schritt wenden wir die Fortpflanzungsformel (Gl. 23) auf den Zusammenhang für das Absolutglied  $a$  (Gl.19) an ( $F = a$ ). Mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial a}{\partial y_i} = \frac{w_i \sum_j w_j x_j^2 - w_i x_i \sum_j w_j x_j}{\sum_k w_k \sum_i w_i x_i^2 - (\sum_i w_i x_i)^2} = \frac{1}{D} (A_{22} w_i - A_{12} w_i x_i) \quad (26)$$

ergibt sich für das Quadrat von  $\Delta a$



$$\begin{aligned}
\Delta a^2 &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial a}{\partial y_i} \right)^2 \Delta y_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{D^2} (A_{22}w_i - A_{12}w_i x_i)^2 \frac{1}{w_i} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{D^2} (A_{22}^2 w_i - 2A_{22}A_{12}w_i x_i + A_{12}^2 w_i x_i^2) \\
&= \frac{1}{D^2} (A_{22}^2 A_{11} - 2A_{22}A_{12}^2 + A_{12}^2 A_{22}) \\
&= \frac{1}{D^2} A_{22} \underbrace{(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)}_{=D} \\
&= \underline{\underline{\frac{A_{22}}{D}}} \tag{27}
\end{aligned}$$

Zusammenfassend ergeben sich die folgenden Formeln der Messabweichungen für  $b$  und  $a$ , welche im Praktikum für die Behandlung von zufälligen Messunsicherheiten im Rahmen der Linearen Regression Anwendung finden sollen:

$$\Delta b_{\text{stat}} = \sqrt{\frac{A_{11}}{D}} = \sqrt{\frac{\sum_i^n w_i}{\sum_i^n w_i \sum_k^n w_k x_k^2 - (\sum_i^n w_i x_i)^2}} \tag{28}$$

$$\Delta a_{\text{stat}} = \sqrt{\frac{A_{22}}{D}} = \sqrt{\frac{\sum_i^n w_i x_i^2}{\sum_i^n w_i \sum_k^n w_k x_k^2 - (\sum_i^n w_i x_i)^2}} \tag{29}$$

Für die Bestimmung der Messunsicherheiten müssen also lediglich die Ausdrücke  $A_{11}$ ,  $A_{22}$  und  $D$  (Determinante) berechnet werden.

## Fragen

1. Die Messgrößen  $x$  und  $y$  stehen in folgendem exponentiellen Zusammenhang zueinander:

$$y = a \cdot \exp\left(-\frac{x^3}{b}\right).$$

Wie kann man die Parameter  $a$  und  $b$  mittels linearer Regression bestimmen?

2. Die Messgrößen  $x$  und  $y$  aus Frage 1 sind mit jeweils mit einer konstanten statistischen Unsicherheit von  $\Delta x$  und  $\Delta y$  behaftet. Bestimmen Sie Länge der für die lineare Regression notwendigen Fehlerbalken.
3. Wie setzen Sie die Berechnung der Regressionsparameter effektiv mit einem Tabellenkalkulationsprogramm um?
4. Nehmen wir an, die Ausgleichsgerade sollte theoretisch durch den Koordinatenursprung verlaufen. Die Ausgleichsrechnung Ihrer Messergebnisse liefert allerdings eine Gerade mit einem von null verschiedenen Absolutglied. Wie interpretieren Sie dieses Resultat?
5. Sie planen die Aufnahme einer Messreihe. Wie erhalten Sie möglichst geringe systematische und statistische Unsicherheiten der Regressionsparameter?
6. Leiten Sie die Regressionsformeln zur Bestimmung von Anstieg und Absolutglied sowie deren statistische Unsicherheiten her!
7. Systematische Unsicherheiten der Messpunkte sind für jeden Messpunkt gleich und vollständig korreliert. Wie lauten die systematischen Unsicherheiten für Anstieg und Absolutglied (Annahme: linearer Zusammenhang)?
8. Wie berechnet sich das absolute Glied und dessen statistische Messunsicherheit, wenn der Anstieg null und die statistische Unsicherheit in jedem Messpunkt die gleiche ist? Leiten Sie die entsprechenden Formeln aus den Regressionsformeln her und ordnen Sie diese ein!
9. Bei einer Messreihe von 17 Messwertepaaren liegen zwei Messwerte außerhalb des  $2\sigma$ -Bereichs. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um eine rein statistische Abweichung?

## Literatur

- [1] W. Kamke, *Umgang mit experimentellen Daten, insbesondere Fehleranalyse im Physikalischen Anfängerpraktikum*, T. Lindemann Offenbach, Freiburg 2010
- [2] W. H. Gränicher, *Messung beendet, was nun?*, vdf, Hochschulverlag an der ETH Zürich, Zürich 1996
- [3] W. Walcher, *Praktikum der Physik*, Teubner-Verlag, Stuttgart 1989