Technische Universität Dresden	Physikalisches Praktikum
Versuch: Fehleranalyse für Zählmessungen (FZ)	
J. Henniger	**10/2005**

1 Aufgabenstellung

Nach der Aufnahme der Zählrohrcharakteristik eines GEIGER-MÜLLER-Zählrohrs (**GMZ**) ist die Aktivität A eines $\beta^- -$Prüfstrahlers mit dem Relativverfahren zu bestimmen. Für das Ergebnis ist eine detaillierte Fehlerbetrachtung durchzuführen, wobei die systematischen und zufälligen Messabweichungen sowohl für die einzelnen Messeffekte als auch für das Endergebnis anzugeben sind. Das durchzuführende Experiment untergliedert sich in folgende Teilaufgaben:

- Mit einem radioaktiven Standardpräparat der Aktivität A_1 (Am Quellenhalter ist die Aktivität für das Bezugsdatum angegeben - beachten Sie, dass die dort angegebene Nominalaktivität nicht für den Versuchstermin gilt.) ist zunächst eine Orientierungsmessung durchzuführen. Dazu wird beginnend mit dem Wert $300\,\mathrm{V}$ durch vorsichtiges Erhöhen der Zählrohrspannung (Inkrement $4\,\mathrm{V}$) die Einsatzspannung U_E (Auftreten erster Impulse) ermittelt. Liegt diese oberhalb von $330\,\mathrm{V}$, ist das Zählrohr defekt und der Betreuer zu benachrichtigen.
- Es ist die Zählrohrcharakteristik zu messen und darzustellen.
- Bei einer Messdauer von jeweils $1\,\mathrm{s}$ wird das gleiche Präparat 1000 mal ausgemessen (Gesamtdauer $t_1 = 1000\,\mathrm{s}$). Für diese Messserie wird eine einfache statistische Auswertung vorgenommen. Das beinhaltet die empirischen Erwartungswerte, Varianzen und Standardabweichungen zu bestimmen und mit den theoretischen Werten zu vergleichen.
- Für die gleichen Messbedingungen wird die Untergrundstrahlung (Zählrate ohne Anwesenheit eines radioaktiven Präparates) gemessen. Auch hier ist die einfache statistische Auswertung vorzunehmen.
- Für ein Präparat mit einer unbekannten Aktivität A wird eine analoge Messserie durchgeführt und statistisch analysiert.
- Mit den Versuchsergebnissen ist die Aktivität A der unbekannten Probe zu berechen.
- Für die Aktivität A ist jeweils die systematische und zufällige Messabweichung zu bestimmen (sogenannte „Fehlerrechnung“).

Während der Durchführung der Messserien sollte zügig mit der Auswertung vorheriger Messungen begonnen werden. In Abstimmung mit dem Betreuer kann ggf. schon während der Leistungskontrolle eine längere Messung durchgeführt werden.

2 Grundlagen

2.1 Messabweichungen (Messfehler)

Vielfach wird der Wert einer physikalischen Größe durch mehrere Messungen ermittelt. Alle diese Messungen sind immer mit systematischen und zufälligen Messabweichungen behaftet. Nur die sogenannten groben Fehler können begrifflich als solche geführt werden. Hier drückt schon der Name eine echt „fehlerhafte" Handlung aus. Grobe Messfehler sind prinzipiell vermeidbar und können durch Kontrollen entdeckt werden.

Systematische Messabweichungen entstehen durch ungenaue Messmethoden. Sie sind infolge der Messunsicherheit der verwendeten Messgeräte *systematisch* bedingt und lassen sich somit nicht vermeiden. Durch sorgfältige Ausarbeitung der Messmethodik, genaue Eichung bzw. Kalibrierung der Messmittel/Geräte und durch entsprechende Korrektionsglieder zur Berichtigung der Messwerte können sie minimiert werden. Da verschiedene Versuche im physikalischen Praktikum z.T. recht umfangreiche Berechnungen der systematischen Messabweichung enthalten, soll hier weniger darauf eingegangen werden. Bei der vorliegenden Versuchsaufgabe steht die zufällige Abweichung im Vordergrund.

Zufällige Messabweichungen entstehen durch eine Vielzahl von unkontrollierbaren Einflüssen auf das Ergebnis der Messungen. Das können z.B. Temperatur-, Luftdruck- oder Feuchtigkeitsschwankungen sein. Ebenso sind elektromagnetische Störfelder sowie elektronisches Rauschen in Bauelementen Ursachen unkorrelierter Einflüsse. Statistische Messabweichungen sind aber auch durch unterschiedliche Interpretation von abgelesenen Einheiten auf Skalen (Schätzfehler) oder zufällige Abweichungen bei manuell ausgelösten Start/Stoppsignalen bedingt. Zufällige Messabweichungen dieser Art werden insbesondere im Versuch Fehleranalyse (FA) behandelt. Zur Vorbereitung des Versuches FZ sollten Sie deshalb die Anleitung für FA und, falls vorhanden, Ihr Versuchsprotokoll noch einmal ansehen!

Im Versuch **F**ehleranalyse für **Z**ählmessungen (**FZ**) wird speziell die Art von zufälligen Messabweichungen berücksichtigt, die bei sogenannten Zählmessungen durch die statistische Schwankung der zu messenden Größe an sich hervorgerufen wird. Dieser Fall tritt z.B. bei der Messung von Teilchenströmen (z.B. Photonen, Elektronen) geringer Intensität auf, wo die statistischen Schwankungen der Messgröße gegenüber den zufälligen Abweichungen durch äußere Einflüsse stets überwiegen. Im vorliegenden Versuch wird ein Radionuklid verwendet. Die erhaltenen Ergebnisse haben Modellcharakter, und die dabei gewonnenen Erkenntnisse sind auf die verschiedensten Zählmessungen, z.B. in der Photonik, übertragbar.

2.2 Radioaktivität und Umwandlungsgesetz

Radioaktivität ist die spontane Umwandlung instabiler Atomkerne. Der mit der Umwandlung verbundene Übergang in ein stabiles Nuklid kann auf direktem Wege oder in mehreren aufeinanderfolgenden Schritten erfolgen. Dabei werden Teilchen und/oder Photonen emittiert.

Bei Atomkernen mit einem instabilen Neutronen-Protonen-Verhältnis erfolgt eine Umwandlung dieser Nukleonen in eine stabilere Neutronen-Protonen-Konfiguration durch $\beta^{-/+}-$Zerfall oder $e^{-}-$Einfang. Bei allen Umwandlungen können zunächst angeregte Kerne entstehen, die unter Aussendung von Photonen ($\gamma-$Strahlung) in den stabilen Grundzustand übergehen.

Diese spontan ablaufenden Prozesse sind statistischer Natur, d.h. jeder instabile Kern besitzt unabhängig von seiner Vorgeschichte die gleiche Umwandlungswahrscheinlichkeit, wobei der Zeitpunkt seiner Umwandlung unbestimmt ist. Es ist also nicht vorhersagbar, wann sich ein konkreter Atomkern umwandelt. Bekannt ist nur die Wahrscheinlichkeit, mit der das Umwandlungsereignis innerhalb eines vorgegebenen Zeitintervalls eintritt. Daher ist für sehr viele zum Zeitpunkt t vorhandene, gleichartige, instabile Kerne N die Anzahl der im Mittel auftretenden Umwandlungen dN (negatives Vorzeichen!) anhand des Zerfallsgesetzes

$$dN = -\lambda \cdot N \cdot dt \tag{1}$$

berechenbar, wobei λ die nuklidspezifische Zerfallskonstante darstellt. Ihr Kehrwert ist die mittlere Lebensdauer τ des betreffenden Kerns.

Die Integration von (1) ergibt das exponentielle Umwandlungsgesetz

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \quad , \tag{2}$$

wobei $N(t)$ die Zahl der Kerne zum Zeitpunkt t und $N_0 = N(t_0)$ die Zahl der Kerne zur Zeit t_0 sind. Für den Fall $N(t) = 1/2 \cdot N_0$ ergibt sich mit

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \ln 2 \cdot \tau \tag{3}$$

die sogenannte Halbwertszeit.

Die Umwandlungsrate oder Aktivität A ist die Zahl der spontanen Kernumwandlungen pro Zeiteinheit. Sie ist zur Anzahl der instabilen Kerne proportional. Es gilt

$$\begin{aligned} A(t) &= -\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N(t) \\ &= A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = A_0 \cdot e^{-\ln 2 \cdot t/T_{1/2}} = A_0 \cdot (1/2)^{t/T_{1/2}} \quad , \end{aligned} \tag{4}$$

wobei $A_0 = A(t_0)$ die Aktivität zum Zeitpunkt t_0 ist. Die Einheit von A ist s^{-1} mit dem eigenen Namen Bequerel (Bq). Die Aktivität ist neben der Art und Energie der emittierten Strahlung (Strahlenqualität) die wichtigste Größe zur Charakterisierung einer radioaktiven Quelle.

Als Beispiel dafür soll die Umwandlungskurve für ein Radionuklid mit einer Halbwertszeit von $100\,\mathrm{s}$ dienen, die in Abbildung 1 dargestellt ist.

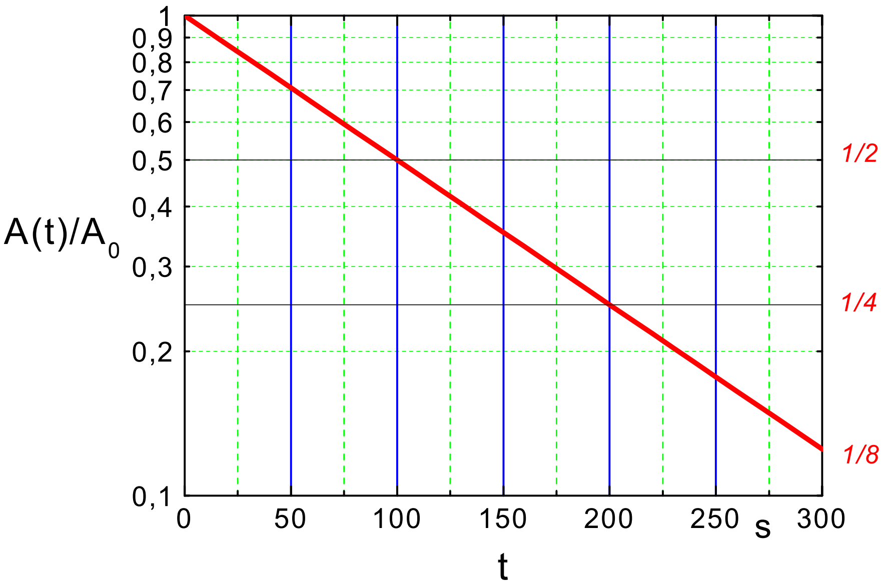

Abbildung 1: Umwandlungskurve eines Nuklids mit $T_{1/2} = 100\,\mathrm{s}$ in halblogarithmischer Darstellung

Das Verhältnis $A(t)/A_0$ entspricht dem Anteil der ursprünglichen Aktivität nach dem Verstreichen der Zeit t. In halblogarithmischer Darstellung ergibt sich erwartungsgemäß eine Gerade. Nach Ablauf von $100\,\mathrm{s}$ ist nur noch die Hälfte der Kerne übrig. Nach dem Verstreichen von $1000\,\mathrm{s}$ wäre nur noch $1/2^{10} = 1/1024$ also weniger als $1\,‰$ von A_0 vorhanden.

Das Radionuklid ${}^{85}_{36}Kr$

Die im Versuch verwendeten Quellen enthalten das Radionuklid ${}^{85}_{36}Kr$. Die Halbwertszeit von ${}^{85}_{36}\mathrm{Kr}$ beträgt $10{,}76$ Jahre. ${}^{85}_{36}Kr$ wandelt sich ausschließlich über den β^- –Zerfall in ${}^{85}_{37}Rb$ (Rubidium) um. Dabei wird mit einer Wahrscheinlichkeit von $99{,}563\%$ der Grundzustand von ${}^{85}_{37}Rb$ erreicht. Nur $0{,}43\%$ der Zerfälle erfolgen über einen angeregten Zwischenzustand von ${}^{85}_{37}Rb$. Die begleitende γ –Strahlung mit einer Energie von $514\,\mathrm{keV}$ hat nur bei Quellen mit sehr hoher Aktivität ($>10^9\,\mathrm{Bq}$) Konsequenzen für den Strahlenschutz. Die ${}^{85}_{36}Kr$ –Quellen haben in etwa die äußere Form einer kleinen Taschenlampenbirne. Das Edelgas Krypton befindet sich in einem dünnwandigen Hartglaskolben. Jede Quelle ist in eine zylindrische Halterung aus Plexiglas eingebaut, die das radioaktive Präparat abschirmt und eine unmittelbare Berührung verhindert.

2.3 Statistische Gesetzmäßigkeiten bei der Messung radioaktiver Umwandlungen

Die Messung der bei einer radioaktiven Umwandlung emittierten Strahlung erfolgt durch Zählmessungen. Das unmittelbare Ergebnis einer Zählmessung ist eine diskrete Anzahl x von gezählten Ereignissen (Zählimpulsen), die in einer bestimmten Zeitspanne (Messzeit t_m) beobachtet werden. Die Zählrate Z ergibt sich aus

$$Z = \frac{x}{t_m} \quad . \tag{5}$$

Sowohl der unmittelbare Messprozess als auch die Emission von ionisierender Strahlung durch Radionuklide unterliegen bestimmten statistischen Gesetzmäßigkeiten. Im Folgenden sollen lediglich die statistischen Schwankungen der radioaktiven Kernumwandlungen für ein gegebenes Zeitintervall betrachtet werden.

Verteilungsfunktionen

Statistische Verteilungen werden durch die Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(x)$ für diskrete und durch die (Wahrscheinlichkeits)Dichtefunktion $f(x)$ für stetige Verteilungen beschrieben. Beide Funktionen sind definitionsgemäß auf 1 normiert. Der Erwartungswert μ ist als erstes Moment der Verteilungen entsprechend

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx \tag{6}$$

definiert, und die Varianz σ^2 bzw. die Streubreite σ wird gemäß

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)\, dx \tag{7}$$

berechnet [3]. Für diskrete Verteilungen wird anstelle der Integration in (6)und (7) eine entsprechende Summation durchgeführt.

POISSON-Verteilung

Die exakte Lösung für die Statistik des radioaktiven Zerfalls liefert die Binomialverteilung [1]. Für eine große Anzahl instabiler Kerne N und wenn die Beobachtungszeit t klein gegenüber der Halbwertszeit ist, gelten

$$\lambda \cdot t = \frac{\ln 2 \cdot t}{T_{1/2}} \ll 1 \quad \text{und} \quad x \ll N \qquad , \tag{8}$$

und die Binominalverteilung geht praktisch in die POISSON-Verteilung

$$P(\mathrm{X}=x)=P(x)=\frac{(pN)^x}{x!}\cdot e^{-pN}=\frac{\mu^x}{x!}\cdot e^{-\mu} \tag{9}$$

über [1,3]. Sie beschreibt die Verteilung äußerst seltener Ereignisse, die mit einer geringen aber konstanten Wahrscheinlichkeit $p=1-e^{-\lambda t}$ an einer sehr großen Anzahl von „Probanden“ N – hier die Gesamtheit der betrachteten radioaktiven Atomkerne – auftreten. Der Erwartungswert μ ist zugleich auch die Varianz σ^2 bzw. für die Standardabweichung σ gilt $\sigma=\sqrt{\mu}$. Somit hat die POISSON-Verteilung nur einen Verteilungsparameter μ.

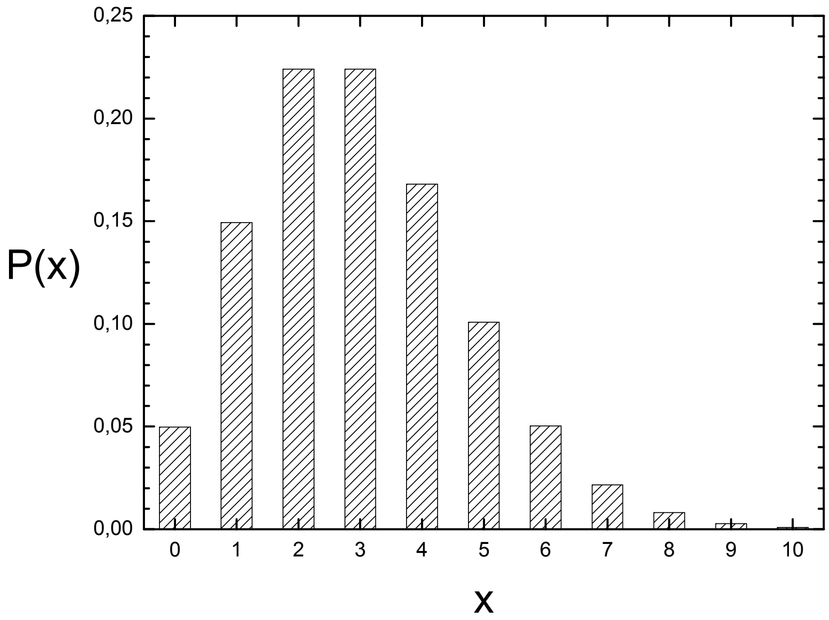

Abbildung 2: Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(\mathrm{X}=x)$ für eine POISSON-verteilte Zufallsvariable mit dem Erwartungswert $\mu=3$

Bei der grafischen Darstellung der Wahrscheinlichkeitsfunktion von diskreten Verteilungen sind nur Säulendiagramme zulässig. Ein Verbinden der Werte zu geschlossenen Kurvenzügen verbietet sich selbstredend.

Schwierig ist die Anwendung statistischer Tests auf sogenannte Reinheit der Verteilung. Für diesen Zweck ist der Übergang zur stetigen GAUSS-Verteilung hilfreich [6].

GAUSS- oder Normalverteilung

Für Zählmessungen mit großen Erwartungswerten μ folgt unter Verwendung der STIRLINGschen Formel zur Berechnung der Fakultät und dem Übergang zu einer stetigen Zufallsvariablen die Dichtefunktion

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot\mu}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\mu}} \tag{10}$$

die eine spezielle Form der Dichtefunktion der GAUSS-Verteilung darstellt [4,5]. Auch hier ist die Varianz σ^2 gleich dem Erwartungswert μ. Die Approximation der diskreten POISSON-Verteilung mit der stetigen GAUSS-Verteilung ist immer nur eine Näherung – für $\mu > 15$ allerdings schon eine brauchbare und für $\mu > 50$ eine relativ genaue. Das ist bei einem unmittelbaren Vergleich von Zählmessungen mit dieser theoretischen Verteilungsfunktion stets zu beachten.

Auswertung von Messreihen mittels theoretischer und empirischer Verteilungsfunktionen

Die Verteilungsfunktion $F(x)$ für eine stetige Zufallsvariable ist gemäß

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x')\,dx' \tag{11}$$

definiert, während für eine diskrete Verteilung der Ausdruck

$$F(x) = \sum_{i=0}^{x} P(i) \tag{12}$$

gilt. Auf Grund der Normierung der Dichte- bzw. Wahrscheinlichkeitsfunktion gilt immer $F(-\infty) = 0$ und $F(\infty) = 1$ bzw. wenn $f(x)$ bzw. $P(x)$ nur für ein Intervall $(a \le x \le b)$ definiert ist, gelten $F(a) = 0$ bzw. $F(a) = P(x = a)$ und immer $F(b) = 1$.

Die Verteilungsfunktion zur Normalverteilung (10) ist demnach

$$F(x) = \mathcal{N}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \mu}} \cdot e^{-\frac{(x'-\mu)^2}{2\mu}}\,dx' \quad , \tag{13}$$

wobei für die praktische Berechnung numerische Verfahren herangezogen werden müssen.

In der Praxis ist aber der Erwartungswert μ nicht bekannt, sondern soll erst durch die Messungen geschätzt werden. Dazu wird eine Serie von n Einzelmessungen $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ durchgeführt. Bei Zählmessungen können die x_i nur Werte von $\{0, 1, 2 \ldots\}$ annehmen – also natürliche Zahlen sein. Der Mittelwert

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{14}$$

ist eine positive rationale Zahl und stellt einen Schätzwert für den Erwartungswert μ dar. Er wird auch als statistischer oder empirischer Erwartungswert bezeichnet, und es gilt $\mu \approx \overline{x}$.

Ein geeignetes Maß für die Streuung der Einzelmessungen x_i ist die Standardabweichung σ der Messreihe. Das Quadrat der Standardabweichung, die Varianz σ^2, berechnet sich entsprechend

$$\sigma^2 \approx \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \cdot \overline{x}^2 \right) = \frac{n}{n-1} \cdot \left[\overline{x^2} - \overline{x}^2 \right] \quad , \quad (15)$$

wobei für große n die Näherung $\sigma^2 \approx \overline{x^2} - \overline{x}^2$ gilt.

Die gemäß (15) berechnete Varianz σ^2 ist das empirisch bestimmte Quadrat der Streubreite σ der Einzelmessungen und somit die statistisch aus der Messreihe bestimmte Standardabweichung. Für die Varianz des Mittelwertes gilt $\sigma_{\overline{x}}^2 = \sigma^2 / n$ und für die Standardabweichung des Mittelwertes ist

$$\sigma_{\overline{x}} \approx \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \quad (16)$$

gültig.

Diese einfache statistische Auswertung von Messserien entsprechend (14), (15) und (16) ist keine Besonderheit von Zählmessungen sondern auch für Messwerte mit einer stetigen Verteilung gültig. So werden z.B. die Messreihen beim Versuch Fehleranalyse (FA) ausgewertet.

Für den Grenzfall großer Erwartungswerte gilt weiterhin die GAUSSsche Fehlerfortpflanzung bei Berechnung der zufälligen Messabweichung. An folgendem, einfachen Beispiel soll diese demonstriert werden:

Die Nettozählrate $Z_n = Z_b - Z_0$ stellt die Differenz der Bruttozählrate $Z_b = N_b / t_b$ von der Untergrund(Null)zählrate $Z_0 = N_0 / t_0$ dar. Der Bruttomesseffekt von N_b Impulsen wird in der Bruttomesszeit t_b ermittelt und der Nulleffekt N_0 innerhalb der Nulleffektmesszeit t_0. Die Standardabweichungen von N_b und N_0 sind $\sqrt{N_b}$ bzw. $\sqrt{N_0}$, weil die Varianz einer Zählmessung gleich dem Effekt, also der gemessenen Impulszahl ist. Für die Varianz der Nettozählrate folgt somit gemäß GAUSSscher Fehlerfortpflanzung

$$\sigma_n^2 = \frac{N_b}{t_b^2} + \frac{N_0}{t_0^2} \quad (17)$$

(bitte selbst herleiten) und für die Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{\frac{N_b}{t_b^2} + \frac{N_0}{t_0^2}} = \frac{1}{t_b} \sqrt{N_b + \frac{t_b^2}{t_0^2} N_0} \quad , \quad (18)$$

wobei sich bei gleicher Messzeit $t_{mess} = t_b = t_0$ die Beziehung zu $\sigma_n = 1 / t_{mess} \cdot \sqrt{N_b + N_0}$ vereinfacht. Die Varianzen der einzelnen Messeffekte werden also einfach addiert. Für diese Betrachtungen wurde die zufällige Messabweichung der Zeit vernachlässigt, da sie im Vergleich zu dem statistischen „Zählfehler" keine Rolle spielt.

2.4 Messung ionisierender Strahlung mit einem GEIGER-MÜLLER-Zählrohr

Die von radioaktiven Isotopen ausgesandte ionisierende Strahlung kann mit verschiedenen Strahlungsdetektoren gemessen werden. Es sind z.B. Gasionisations-, Anregungs- und Halbleiterdetektoren einsetzbar.

Das GEIGER-MÜLLER-Zählrohr gehört zu den Gasionisationsdetektoren, bei denen die gebildeten Ladungsträger (Elektronen und Ionen) infolge des elektrischen Feldes im Detektor zu den Elektroden gelangen und einen registrierbaren Impuls auslösen. Die angelegte Detektorspannung ist so hoch, dass es zu einer lawinenartigen Gasentladung durch Stoßionisation in Anodennähe kommt. Das GMZ wird also im sogenannten Auslösebereich betrieben.

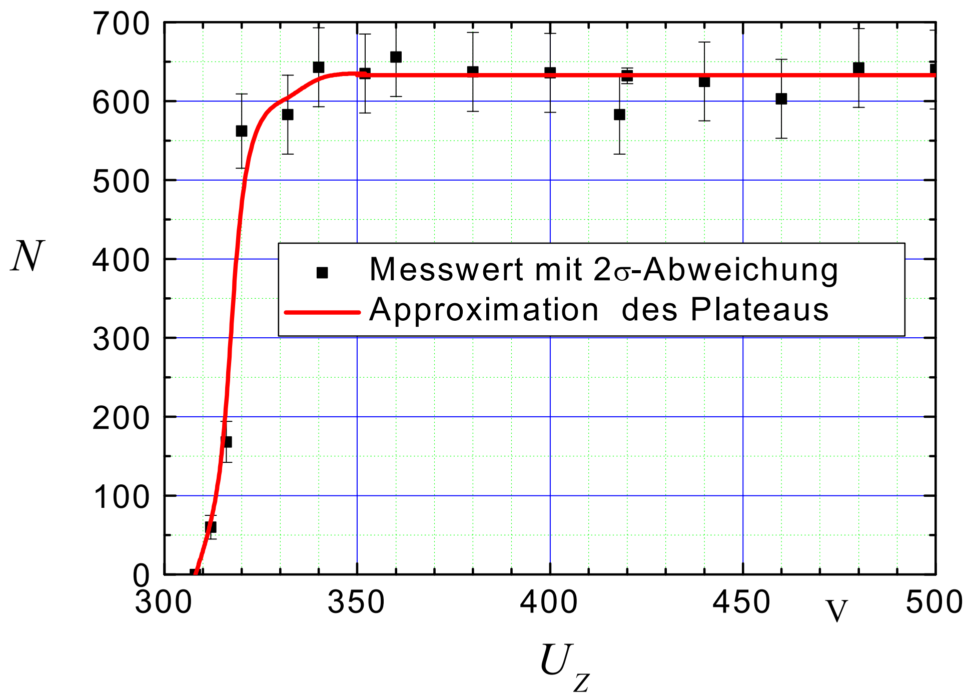

Abbildung 3: Beispiel für eine Zählrohrcharakteristik in der Darstellung $N = f(U_Z)$

3 Experimentelle Durchführung

Das elektronische Zählgerät der Fa. LEYBOLD/DIDACTIC (siehe Abb. 4) kann sowohl autark als auch mit Rechnerkopplung betrieben werden. Jeder Messvorgang besteht aus einer Serie von bis zu 2000 Einzelmessungen, die intern im Gerät gespeichert werden. Die gespeicherten

Messwerte können einzeln am Gerät abgelesen oder auf dem Arbeitsplatzrechner insgesamt angezeigt und ausgewertet werden.

Für jeden Messvorgang kann über die Gerätesoftware eine Anzahl n von Einzelmessungen ausgewählt werden. Mit der am Digitalzähler einzustellenden Messzeit Δt von jeweils 1, 10 oder $60\,s$ ergibt sich eine Gesamtmesszeit $t_m = n \cdot \Delta t$. Ein Messvorgang mit n Einzelmessungen wird mit dem Start/Stop-Knopf am Gerät bzw. dem entsprechenden Button am Bildschirm (Symbol ist eine Stoppuhr) gestartet. Nach n Einzelmessungen endet der Messvorgang automatisch.

Für eine unmittelbare Auswertung der Messreihen ist das Programm `AuswFZ.exe` vorgesehen, das die Messdateien offline verarbeitet.

Abbildung 4: Das Zählgerät in der Betriebsart GM TUBE, Impulsratenmessung (RATE) mit der Torzeit (GATE) $t = 10\,s$ und Impulsanzeige. Die Spannung U_D wird mit dem Inkrement-Dekrement-Geber oberhalb des Eingangs A eingestellt.

Komplette Messreihen können im Rechner als sogenannte $*.\mathrm{dc}-$Dateien (<u>d</u>igital <u>c</u>ounter) gespeichert werden und sind später wieder aufrufbar.

Achtung, der Beginn einer neuen Messserie ist nur nach vorherigem Löschen des Speicherinhaltes möglich! Deshalb muss n vor jedem Messvorgang neu eingegeben werden.

3.1 Messung der Zählrohrcharakteristik

Begonnen wird mit der Messung der Standardprobe mit einer Aktivität $A_1(t_K)$ zum Kalibrierzeitpunkt t_K. Nach der Ermittlung von U_E wird die vorläufige Arbeitsspannung $\tilde{U}$ gemäß $\tilde{U} = U_E + 100\,V$ festgelegt. Zur Bestimmung der Zählrohrcharakteristik wird die Zählrate Z in Abhängigkeit von der Detektorspannung U_D im Bereich zwischen Einsatzspannung U_E und dem Plateau-Ende bzw. einer Maximalspannung zwischen 460 und $500\,\mathrm{V}$ gemessen. Die Schrittweite der Spannungserhöhung sollte am Anfang $4\,\mathrm{V}$ betragen. Nach Erreichen des Plateaus kann in größeren Schritten, z.B. $20\,\mathrm{V}$ vorgegangen werden.

Für eine feste Messzeit z.B. $\Delta t = 10\,\mathrm{s}$ empfiehlt sich eine Darstellung von $N = f(U_D)$. Die zufällige Messabweichung ΔN_z sollte für einen Vertrauensbereich von $95{,}45\%$ angegeben werden, es gilt also $\Delta N_z = 2\,\sigma_N$ mit $\sigma_N = \sqrt{N}$. Auf die Darstellung eines Spannungsfehlers kann verzichtet werden, da dieser kleiner als $\pm 1\,\mathrm{V}$ ist und somit infolge des relativ geringen Plateauanstieges keine Bedeutung für die Genauigkeit der Messung hat.

Aus der grafischen Darstellung Abhängigkeit $N = f(U_D)$ sind ablesbar:

- Einsatzspannung U_E,
- Arbeitsspannung U_A (Überprüfung der Regel: $U_A \approx U_E + 50 \ldots 100\,\mathrm{V}$)
- die nachgewiesene Länge und die absolute und relative Steigung des Plateaus (Angabe in Einheiten V^{-1} und $\%/100\,\mathrm{V}$).

3.2 Bestimmung der Aktivität mit dem Relativverfahren

Ein Präparat mit der unbekannten Aktivität A liefert einen Messeffekt Z. Wird bei gleicher Messgeometrie von einem linearen Zusammenhang zwischen Messeffekt und Aktivität ausgegangen, folgt

$$Z = Z_0 + \frac{Z_1 - Z_0}{A_1 - A_0} \cdot A \qquad , \tag{19}$$

bzw. wenn $A_0 = 0$ und $Z = N / t_M$ gelten (N ist die jeweils gemessene Impulszahl und t_M die aufgewendete Messzeit), vereinfacht sich die Beziehung bei gleichen Messzeiten t_M zu

$$N = N_0 + \frac{N_1 - N_0}{A_1} \cdot A \qquad , \tag{20}$$

wobei N die gemessene Impulszahl für die unbekannte, N_1 die für die bekannte Aktivität und N_0 die für den Untergrund sind. Die Aktivitätsbestimmung erfolgt somit nach

$$A = A_1 \cdot \frac{(N - N_0)}{(N_1 - N_0)} \qquad , \tag{21}$$

wobei die berechnete Aktivität A formal als eine Funktion $f(A_1, N, N_1, N_0)$ der vier Variablen A_1, N, N_1 und N_0 betrachtet wird. Eine einfache grafische Darstellung dieses Zusammenhangs ist ebenfalls vorzunehmen und zu protokollieren.

Für alle drei Zählmessungen wird eine Gesamtmesszeit von jeweils $1000\,\mathrm{s}$ vorgeschlagen. Da geräteseitig keine Messzeit von $\Delta t = 1000\,\mathrm{s}$ zur Verfügung steht, muss diese Zeit durch Kumulation von n Einzelmessungen erzielt werden.

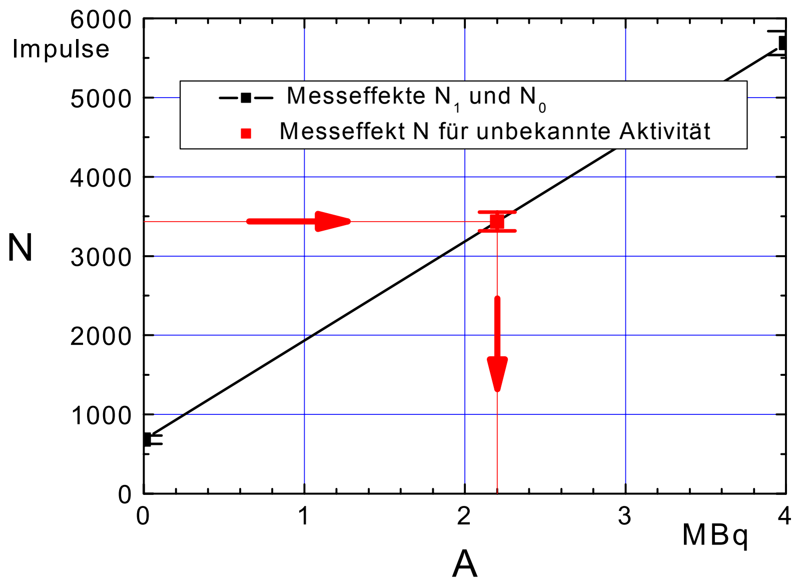

Abbildung 6: Grafische Darstellung der Messeffekte N_1, N_0 und N für eine Messzeit von $1000\,\mathrm{s}$ zur Bestimmung der unbekannten Aktivität A

3.3 Fehlerrechnung zur Aktivitätsbestimmung

Alle vier Größen zur Berechnung der unbekannten Aktivität gemäß (21) werden experimentell bestimmt und sind somit fehlerbehaftet. Dabei ist konsequent zwischen systematischen und zufälligen Messabweichungen zu unterscheiden [2,3].

Zur weiteren formalen Vereinfachung wird

$$A = A_1 \cdot \frac{(N - N_0)}{(N_1 - N_0)} = A_1 \cdot \ \tilde{f}(N, N_1, N_0) \qquad (22)$$

gesetzt. Die Funktion $\tilde{f}(N, N_1, N_0)$ ist dabei der Differenzenquotient

$$\tilde{f} = \frac{N - N_0}{N_1 - N_0}$$

der sogenannten Nettozählraten (Zählrate – Untergrundzählrate) bzw. der Netto-Impulszahlen ($N_i - N_0$). $\tilde{f}$ hat die Einheit 1.

Berechnung der systematischen Messabweichung

Eine systematische Messabweichung Δf einer Funktion f von K unabhängigen Variablen (Messwerten) x_i pflanzt sich entsprechend

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{K} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot \left| \Delta x_{i,sys} \right| \tag{23}$$

fort [2-5], so dass hier die Bildung der partiellen Ableitungen $\partial / \partial x_i$ von f nach den 4 unabhängigen Variablen A_1, N, N_1 und N_0 notwendig ist.

Es ergeben sich dabei die Ausdrücke

$$\frac{\partial f}{\partial A_1} = \tilde{f} \tag{24}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial N} = A_1 \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial N} = A_1 \cdot \frac{1}{(N_1 - N_0)} \quad , \tag{25}$$

und durch Anwendung der Quotientenregel

$$f = A_1 \cdot \tilde{f} = A_1 \cdot \frac{u}{v}$$

mit $u = N - N_0$ für die Nettoimpulszahl der unbekannten Aktivität A und $v = N_1 - N_0$ für die Nettoimpulse des Standardpräparates mit der Aktivität A_1 folgen

$$\frac{\partial f}{\partial N_1} = A_1 \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial N_1} = A_1 \cdot \frac{u'v - uv'}{v^2} = -A_1 \frac{(N - N_0)}{(N_1 - N_0)^2} \tag{26}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial N_0} = A_1 \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial N_0} = A_1 \cdot \frac{-1 \cdot (N_1 - N_0) - (N - N_0) \cdot (-1)}{(N_1 - N_0)^2} = A_1 \cdot \frac{N - N_1}{(N_1 - N_0)^2} \tag{27}$$

wobei in den partiellen Ableitungen nach N, N_1 und N_0 jeweils A_1 als konstanter Faktor auftritt. Zusammengefasst gilt

$$\left| \frac{\partial f}{\partial N_0} \right| = A_1 \cdot \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial N_0} \right| = A_1 \cdot \left| \frac{N - N_1}{(N_1 - N_0)^2} \right| \quad , \tag{28}$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial N} \right| = A_1 \cdot \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial N} \right| = A_1 \cdot \frac{1}{(N_1 - N_0)} \quad \text{und} \tag{29}$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial N_1} \right| = A_1 \cdot \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial N_1} \right| = A_1 \cdot \frac{(N - N_0)}{(N_1 - N_0)^2} \quad , \tag{30}$$

wobei es sinnvoll ist, hier die drei Zahlenwerte für die jeweiligen partiellen Ableitungen und $\tilde{f}$ explizit zu berechnen, da sie bei der Berechnung der zufälligen Messabweichung ΔA_z ebenfalls benötigt werden.

Die systematische Messabweichung Δf_{syst} wird entsprechend

$$\Delta f_{syst} = \tilde{f} \cdot \Delta A_{1,syst} + A_1 \cdot \left(\left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial N}\right| \cdot |\Delta N_{syst}| + \left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial N_1}\right| \cdot |\Delta N_{1,syst}| + \left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial N_0}\right| \cdot |\Delta N_{0,syst}| \right) \quad (31)$$

berechnet.

Die systematische Messabweichung bei der Messung der Impulsraten kann hier nur geschätzt werden. Eine relative systematische Messabweichung $\varepsilon_{syst} = 0{,}005$ erscheint vernünftig. $|\Delta N_{i,syst}|$ wird also gemäß

$$|\Delta N_{i,syst}| = \varepsilon_{syst} \cdot N_i = 0{,}005 \cdot N_i \quad (32)$$

berechnet, d.h. die relative Messabweichung der Zählraten ist immer gleich groß. Die Aktivität A_1 wurde mit einer relativen systematischen Messabweichung von $3\,\%$ bestimmt. Für Δf_{syst} gilt somit

$$\Delta A_{syst} = \Delta f_{syst} = \tilde{f} \cdot \Delta A_{1,syst} \;+\; A_1 \cdot \varepsilon_{syst} \cdot \left(\left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial N}\right| \cdot N + \left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial N_1}\right| \cdot N_1 + \left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial N_0}\right| \cdot N_0 \right) \quad (33)$$

als endgültige Beziehung für die systematische Messabweichung der unbekannten Aktivität A.

Berechnung der Varianz der Aktivitätsbestimmung

Die Varianz σ_f^2 berechnet sich nach dem (GAUSSschen) Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{K} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \sigma_{x_i}^2} \quad (34)$$

wobei $\sigma_{x_i}^2$ die Varianzen der Variablen x_i sind. Deshalb wird dieses Gesetz auch als Varianzfortpflanzungsgesetz bezeichnet. Formal wird für diesen Fall

$$\sigma_f^2 = \sum_{i=1}^{K} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \sigma_{x_i}^2 \quad (35)$$

gerechnet.

Für den konkreten Fall kann für A_1 keine zufällige Messabweichung angegeben werden, so dass

$$\sigma_A = A_1 \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial N} \right)^2 \cdot \sigma_N^2 + \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial N_1} \right)^2 \cdot \sigma_{N_1}^2 + \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial N_0} \right)^2 \cdot \sigma_{N_0}^2} \quad (36)$$

gilt, und unter Beachtung von $\sigma_N = \sqrt{N}$ folgt $\sigma_N^2 = N$, bzw. $\sigma_{N_1}^2 = N_1$ und $\sigma_{N_0}^2 = N_0$. Dadurch vereinfacht sich die Formel weiter zu

$$\sigma_A = A_1 \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial\tilde{f}}{\partial N}\right)^2 \cdot N + \left(\frac{\partial\tilde{f}}{\partial N_1}\right)^2 \cdot N_1 + \left(\frac{\partial\tilde{f}}{\partial N_0}\right)^2 \cdot N_0} \quad , \tag{37}$$

und es ist lediglich zu beachten, dass die schon mit den Zahlenwerten berechneten partiellen Ableitungen zu quadrieren sind.

Angabe der zufälligen Messabweichung der Aktivitätsbestimmung

Die zufällige Messabweichung ΔA_z ist für einen Vertrauensbereich von $95{,}45\,\%$ gemäß

$$\Delta A_z = 2 \cdot \sigma_A \tag{38}$$

anzugeben. Für allgemeine physikalische Messaufgaben ist eine Irrtumswahrscheinlichkeit kleiner 5% akzeptabel.

Angabe der Messabweichung ΔA der Aktivitätsbestimmung

Die Messabweichung ΔA der Aktivitätsbestimmung ist gemäß

$$\Delta A = \Delta A_{syst} + \Delta A_z \tag{39}$$

durch Addition der zufälligen und systematischen Messabweichung anzugeben. Die Angabe der relativen Messabweichung $\varepsilon = \Delta A / A$, vorzugsweise in der relativen Einheit Prozent, sollte ebenfalls erfolgen.

3.4 Hinweise zur Fehlerbetrachtung

Bei der Versuchsdurchführung wird die Unsicherheit der Resultate im Wesentlichen durch Messabweichungen bei der Bestimmung der Zählrate verursacht. Der Einfluss von Messabweichungen der Detektorspannung bzw. der Zeitmessung ist vernachlässigbar.

Für die Fehlerrechnung ist es sinnvoll, die drei partiellen Ableitungen (28), (29) und (30) ohne den Faktor A_1 numerisch zu berechnen. Welche physikalischen Einheiten haben diese partiellen Ableitungen von $\tilde{f}$? Mit einem Tabellenkalkulationsprogramm lassen sich die jeweiligen Anteile der einzelnen Messeffekte an der systematischen und relativen Messabweichung der Aktivitätsbestimmung leicht berechnen und saldieren. Auch ohne rechentechnische Hilfsmittel können diese Rechnungen schriftlich im Protokollheft erfolgen.

Welchen Einfluss eine Verlängerung der Messzeiten auf die Erhöhung der Messgenauigkeit besitzt, sollte ebenfalls diskutiert werden. Was bedeutet das im Kontext der begrenzten Arbeitszeit im Praktikum für Ihre Versuchsplanung?

4 Vorbereitungshinweise

In der Anleitung sind 39 Gleichungen enthalten, die für eine exakte Darstellung des Stoffes notwendig sind. Für den eigentlichen Versuch brauchen Sie weit weniger Formeln (ca. 5). Bereits das Herausfinden dieser essentiell wichtigen Beziehungen stellt eine gute Art der Vorbereitung dar. Dabei sind folgende Schwerpunkte zu beachten:

- Erarbeiten Sie sich ein Grundlagenwissen zur Radioaktivität (Definition, physikalische Einheiten, Umwandlungsarten)!
- Für den Fall zufälliger Messabweichungen bei Zählmessungen: Wie groß sind die Varianz σ^2 und die Standardabweichung σ bei N gemessenen Impulsen, bzw. wie ist eine Messzeit t_M festzulegen, wenn eine bestimmte Fehlergrenze für die zufällige Messabweichung unterschritten werden soll? Welche Informationen brauchen Sie dazu? Leiten Sie eine Formel zur Bestimmung der Messzeit t_M bei einer vorgegebenen unteren „Schranke" für die relative Standardabweichung, z.B. $\varepsilon_\sigma \geq 0,05\,(5\%)$ her!
- Stellen Sie Überlegungen an, wie eine Zählrohrcharakteristik grafisch darzustellen ist (siehe auch Abbildung 3)!
- Wann ist eine Aktivität auf ihren tausendsten bzw. millionsten Teil abgeklungen?
- Was sind grobe Fehler? Wie sind systematische und zufällige Messabweichungen definiert und wodurch werden sie hervorgerufen (siehe [2-5])?
- Leiten Sie eine Formel für die **zufällige Messabweichung** einer Nettozählrate $Z = Z_b - Z_0$ her, wobei $Z_b = N_b / t_b$ und $Z_0 = N_0 / t_0$ gilt. N_b bzw. t_b sind die Impulszahl und Messzeit für die Bestimmung der Bruttozählrate und N_0 bzw. t_0 die entsprechenden Werte für den Nulleffekt. Geben Sie eine numerisch einfache Form der Formel an! Wie vereinfacht sich die Formel für $t_{mess} = t_b = t_0$?

Beachten Sie, dass die rein messtechnischen Anforderungen an Sie bei diesem Versuch zwar nicht besonders hoch sind, es besteht aber die große Gefahr, durch keine oder schlechte Versuchsplanung **sehr viel** Zeit zu verlieren. Alle Messungen sind innerhalb zwei Stunden gut zu bewältigen. Dafür sind aber eine gründliche **Vor**bereitung und Planung notwendig.

Falls Sie im Umgang mit den angebotenen rechentechnischen Hilfsmitteln zur Versuchsauswertung nicht genügend geübt sind, verzichten Sie lieber darauf und führen die Berechnungen und grafischen Darstellungen schriftlich aus.

5 Literatur

[1]	Stolz, W.: ***Radioaktivität***, Grundlagen – Messung – Anwendungen, B.G. Teubner Verlag, Wiesbaden 2005.
[2]	Papular, L.: **Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler**, Band 2; Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium; Verlag Vieweg, Wiesbaden 2001.
[3]	Papular, L.: **Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler**, Band 3; Vektoranalysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Statistik, Fehler- und Ausgleichsrechnung; Verlag Vieweg, Wiesbaden 2001.
[4]	Papular, L.: **Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Übungen** , Kapitel X - Fehler- und Ausgleichsrechnung; Verlag Vieweg, Wiesbaden 2001.
[5]	Bronstein I.,N.; Semendjajew, K.A.; Musiol, G; Mühling, H.: **Taschenbuch der Mathematik**, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, Thun 1999.
[6]	Henniger, J.: **Versuchsanleitung POISSON-Verteilung (PV),** TU Dresden, Fachrichtung Physik, Physikalisches Praktikum, Grundpraktikum 1, Dresden April 2005.

Nutzen Sie auch das Internet (Suchmaschinen) zur Vorbereitung!

Hinweise an den Autor: juergen.henniger@tu-dresden.de